МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Н.Э. БАУМАНА

Практическая часть предпрофессионального экзамена

Направление
«Прикладная математика»

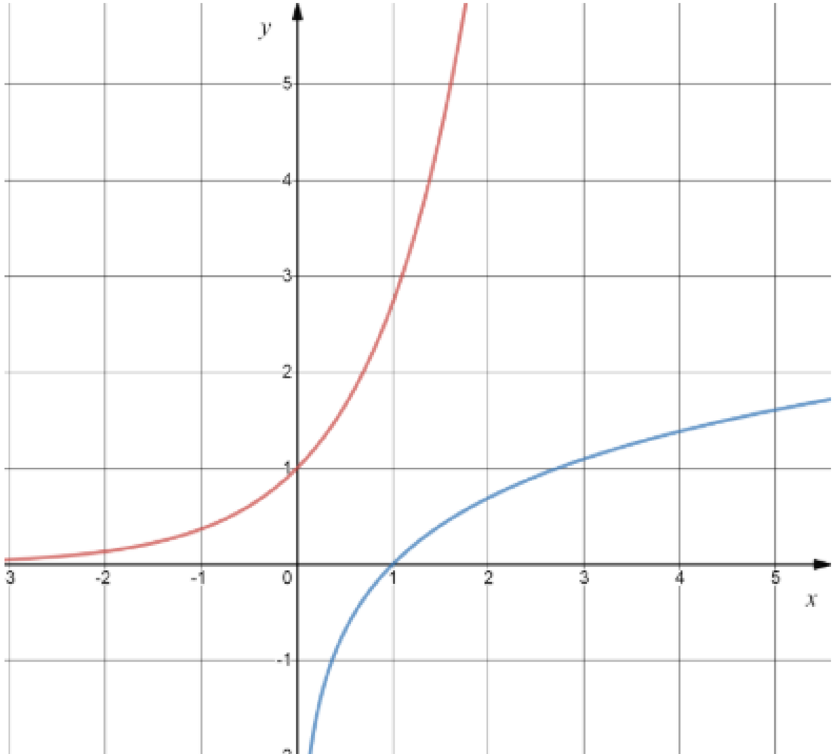
Демонстрация умений, навыков и компетенций

- Согласно положению о предпрофессиональном экзамене в академических классах, практическая часть экзамена проводится в форме решения практических ситуационных задач.
- Экзамен длится не более 120 минут.
- Максимальная оценка практической части экзамена – 60 баллов.
- Учет личных достижений

Выпускной предпрофессиональный экзамен в рамках программ «Инженерный класс в московской школе» и «Академический класс в московской школе» в 2019-2020 учебном году Департамента образования города Москвы для школьников 11-х классов с максимальным результатом баллов	**81-100 – 7 баллов** **61-80 - 6 баллов**	**http://www.bmstu.ru/content/image/files/PK/Docs/Rules/Rules-p1_11.pdf**

Теоретическая часть

Большую роль в математике, в прикладных задачах играет число e. Это трансцендентное числó, т.е. число, которое не может быть получено как корень многочлена с рациональными коэффициентами. Оно может быть введено как предел числовой последовательности: $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Это число часто используют в качестве основания для показательной функции и обратной к ней – логарифмической: $y=e^x$ или $y=\ln x$.



Исследовательская часть

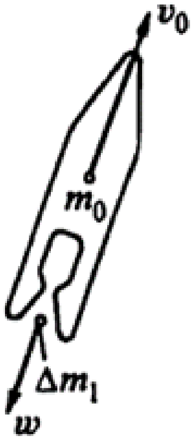
- *В основе космических достижений лежит ракетная техника.*
- *Только на основе реактивного принципа движения стало возможным достижение космических скоростей.*
- *Говоря о реактивном принципе движения, имеют в виду движение под действием силы тяги, т.е. реакции потока частиц, отбрасываемых от аппарата.*
- **Реактивное движение** − движение, возникающее при отделении от тела с какой-либо скоростью некоторой его части
- Является важным проявлением закона сохранения импульса активной струи.

Реактивная тяга обычно рассматривается как сила реакции отделяющихся частиц. Точкой приложения ее считают центр истечения — центр среза сопла двигателя, а направление — противоположное вектору скорости истечения продуктов сгорания (или рабочего тела). То есть реактивная тяга:

•приложена непосредственно к корпусу реактивного двигателя;

•обеспечивает передвижение реактивного двигателя и связанного с ним объекта в сторону, противоположную направлению реактивного движения.

Примеры:



Пусть перед началом работы ракетного двигателя ракета имела массу m_0 и скорость v_0. условно разделим работу двигателя на n этапов. На первом этапе со скоростью ω относительно ракеты отбрасывается масса Δm_1 продуктов сгорания топлива. В результате, согласно закону сохранения количества движения (без влияния атмосферы и поля тяготения) $m_0 v_0 = (m_0 - \Delta m_1)v_1 + \Delta m_1(v_0 - \omega)$, возникает приращение скорости ракеты $\Delta v_1 = v_1 - v_0 = \omega \frac{\Delta m_1}{m_0 - \Delta m_1} = \omega \frac{\Delta m_1}{m_1}$, где $m_1 = m_0 - \Delta m_1$, v_1 - масса и скорость ракеты после первого этапа работы двигателя, Подобным образом на втором этапе $\Delta v_2 = v_2 - v_1 = \omega \frac{\Delta m_2}{m_1 - \Delta m_2} = \omega \frac{\Delta m_2}{m_2}$, и т.д.. Этапы работы двигателя выберем так, чтобы $\Delta v_1 = \Delta v_2 = \ldots = \Delta v_n = \Delta v$. Тогда можно записать или $1 + \frac{\Delta v}{\omega} = 1 + \frac{\Delta m_1}{m_1} = 1 + \frac{\Delta m_2}{m_2} = \ldots = 1 + \frac{\Delta m_n}{m_n}$. С учетом того, что $1 + \frac{\Delta m_1}{m_1} = \frac{m_0}{m_1}$, $1 + \frac{\Delta m_2}{m_2} = \frac{m_1}{m_2}$ и т.д., имеем $\left(1 + \frac{\Delta v}{\omega}\right)^n = \frac{m_0}{m_к}$. Где через $m_к$ обозначена масса ракеты в конце работы двигателя после n этапов, когда скорость ракеты составит $v_к = v_0 + \Delta v_1 + \ldots + \Delta v_n = v_0 + n\Delta v$.

Формула Циолковского

Обозначим $\dfrac{\omega}{\Delta v} = x$. Тогда $n = \dfrac{v_к - v_0}{\Delta v} = x\dfrac{v_к - v_0}{\omega} \Rightarrow \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \left(\dfrac{m_0}{m_к}\right)^{\frac{\omega}{v_к - v_0}}$.

Поскольку реальный процесс горения топлива в двигателе протекает непрерывно, т.е. число этапов стремится к бесконечности, значит и $x \to \infty$. Переходя к пределу, получим

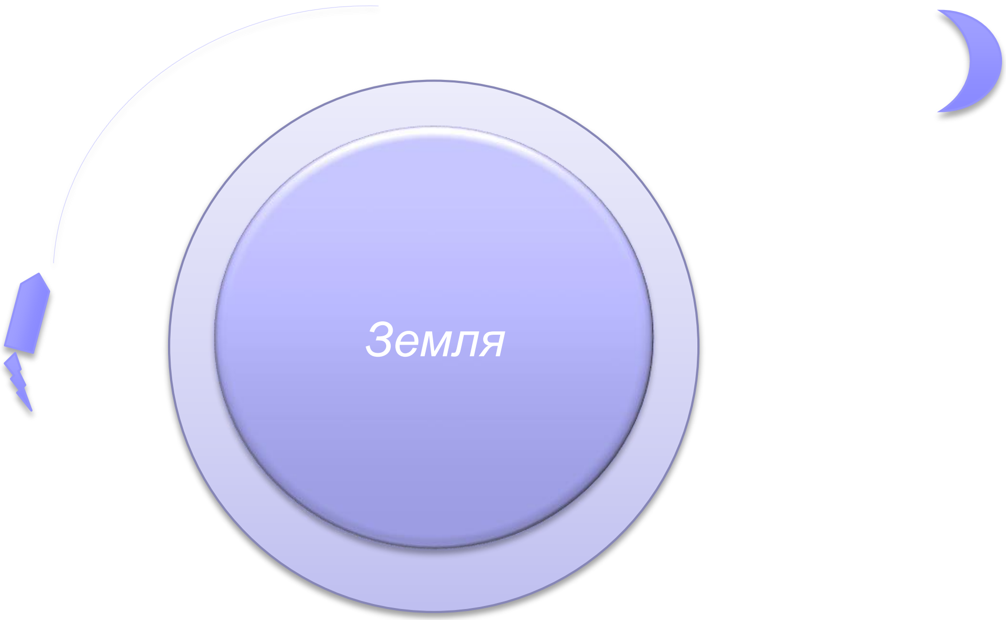
$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = \left(\frac{m_0}{m_к}\right)^{\frac{\omega}{v_к - v_0}} \Rightarrow \ln e = \ln\left(\frac{m_0}{m_к}\right)^{\frac{\omega}{v_к - v_0}} \Rightarrow$$

$$\ln e = \frac{\omega}{v_к - v_0}\ln\left(\frac{m_0}{m_к}\right) \Rightarrow v_к = v_0 + \omega \cdot \ln\frac{m_0}{m_к}.$$

Это формула Циолковского для идеальной скорости ракеты, движущейся в пустоте вне поля тяготения.

Проектная часть

Определить необходимое количество ступеней ракеты для выхода на круговую орбиту высотой 500 км вокруг Земли и массу необходимого для этого топлива. Считаем, что ракета стартует с Земли $v_0 = 0$. Необходимо вывести спутник массой 10т, с удельным импульсом двигателя $\omega = 3$ км/сек. Отношение массы топлива M_T на единицу массы ракеты M_R - $k = M_T / M_R = 9$.



Решение

1. Для выхода на круговую орбиту высотой 500 км необходима первая космическая скорость, которую вычислим по формуле $v_1 = \sqrt{GM / R}$, где $GM =$ 398603 *км³/сек²*, R – 6371 км (радиус Земли) плюс высота орбиты 500 км, т.е. требуемая скорость 7,62 км/сек. Начальная масса складывается из массы полезного груза, массы самой ракеты и массы топлива. Конечная масса – масса груза и ракеты. Обозначим M_0 - масса полезного груза. Получаем связь между массой ракеты с топливом и скоростью ракеты

$$v_к = v_0 + \omega \ln\left(\frac{M_0 + M_R + M_T}{M_0 + M_R}\right)$$

Решение

2. Записываем отношение массы топлива на единицу массы ракеты через коэффициент k

$$v_к = v_0 + \omega \ln\left(\frac{M_0 + (1 + 1/k)M_T}{M_0 + M_T/k}\right)$$ или, используя число e

$$\frac{M_0 + (1 + 1/k)M_T}{M_0 + M_T/k} = e^{\left(\frac{v_к - v_0}{\omega}\right)}$$

Решение

Найдем массу топлива, необходимую для достижения заданной скорости

$$M_0 + (1 + 1/k) M_T = (M_0 + M_T/k) e^{\left(\frac{v_к - v_0}{\omega}\right)} \quad \Rightarrow$$

$$M_T = M_0 \frac{e^{\left(\frac{v_к - v_0}{\omega}\right)} - 1}{1 + \frac{1}{k}\left[1 - e^{\left(\frac{v_к - v_0}{\omega}\right)}\right]} = M_0 k \frac{e^{\left(\frac{v_к - v_0}{\omega}\right)} - 1}{k + 1 - e^{\left(\frac{v_к - v_0}{\omega}\right)}}$$

Достижение требуемой скорости возможно только при выполнении неравенства

$$k + 1 - e^{\left(\frac{v_к - v_0}{\omega}\right)} > 0.$$

Оценка

3. Оценка возможности достичь требуемой скорости ракетой в одну ступень. Проверяем выполнение неравенства для нашего примера

$$k+1-\mathrm{e}^{\left(\frac{v_x - v_0}{\omega}\right)} = -1.59 < 0$$

Одной ступенью спутник на орбиту не вывести. Сделаем расчет для двух ступеней, например, после первой ступени достигается скорость $v_0^{(1)} = \dfrac{v_x}{2}$. Вторая ступень разгоняет до необходимой скорости $v_к$.

Оценка

В этом случае неравенство $k+1-\mathrm{e}^{\left(\frac{v_\kappa - v_0^{(1)}}{\omega}\right)} = 6.45 > 0$

Таким образом, необходима двухступенчатая ракета.

Масса необходимого топлива будет складываться из массы второй ступени плюс масса первой ступени и полезного груза: $M_{T2} = M_0 k \dfrac{e^{\left(\frac{v_\kappa - v_{02}}{\omega}\right)} - 1}{k+1-e^{\left(\frac{v_\kappa - v_{02}}{\omega}\right)}} = 35{,}58\,\text{т}$,

$M_{\kappa 2} = M_{T2}/k = 3{,}95\,\text{т}$. Тогда масса второй ступени 39,53 т.

$$M_{T1} = (M_0 + M_2)k \frac{e^{\left(\frac{v_{\kappa 1}}{\omega}\right)} - 1}{k+1-e^{\left(\frac{v_{\kappa 1}}{\omega}\right)}} = 176{,}23\,\text{т},\quad M_{\kappa 1} = M_{T1}/k = 19{,}58\,\text{т}.$$

И общая масса двухступенчатой ракеты с полезным грузом составит 195,81+39,53+10=245,34 т.

Литература

ЛИТЕРАТУРА

1. Морозова В.Д. Введение в анализ. 2-е изд. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 408 с.

2. Феодосьев В.И. Основы техники ракетного полета. М.: Наука, 1979. 496 с.

Критерии оценивания

1. Правильная формализация физических процессов, запись основных зависимостей (формул), описывающих физические процессы или состояния элементов системы. Определение необходимых параметров задачи. В качестве исходных формул необходимо использовать законы и определения физических величин, общие известные уравнения процессов и состояний.
2. Составление системы уравнений, алгоритма расчета, математической модели. Оценивается умение комбинировать и преобразовывать выражения с целью получения нужных данных, а также добавляется бонусный балл за качество оформления или представления ответа.
2. Проведение расчетов, получение и представление результата. Оценивание каждого вопроса задачи производится отдельно, а также добавляется бонусный балл за качество оформления или представления ответа.

Критерии оценивания

Критерии оценивания решения задач

1. Формализация физических процессов	13
Максимальное число баллов за этап	**13**
2. Подготовка системы уравнений, алгоритма, математической модели	
Основные баллы	15
Преобразование системы уравнений	+3
Максимальное число баллов за этап	**18**
3. Проведение расчетов, получение и представление результата	
Расчеты и результат	10
Представление результата	+3
Максимальное число баллов за этап	**13**
4. Дополнительные баллы в соответствии со спецификой задачи	
Максимальное число баллов за этап	**6**
Максимальная сумма баллов за задачу	**50**

Критерии оценивания

Защита подразумевает развернутое сопровождение логики и хода решения задачи. Максимальная оценка составляет **10 баллов** в зависимости от полноты и качества пояснений, а также ответов на вопросы комиссии.

Таким образом, полная максимальная сумма за комплекс «Решение + защита» составляет **60 баллов**.

Спасибо за внимание!