ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Предмет «МАТЕМАТИКА»

МАТЕРИАЛЫ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ

2013-2014 УЧЕБНЫЙ ГОД

Олимпиаду школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «математика» проводит Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана при участии Калужского филиала МГТУ им. Н.Э. Баумана, а также на базе региональных площадок в г. Барнаул – в Алтайском государственном техническом университете им. И.И. Ползунова и в г. Кызыл – в Тувинском государственном университете.

Основными целями Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по математике являются:

- выявление и развитие у участников творческих способностей и интереса к научно-исследовательской деятельности в области математики;
- пропаганда и популяризация научных знаний в области математики;
- создание необходимых условий для интеллектуального развития и поддержки творчески одаренной молодежи;
- привлечение талантливых молодых людей к изучению математики, расширение багажа знаний, необходимых для получения и повышения навыков в процессе обучения;
- научное просвещение и целенаправленная профессиональная ориентация учащейся молодежи;
- формирование состава студентов высших учебных заведений из граждан, наиболее подготовленных к освоению программ высшего профессионального образования.

Первый (отборочный) этап академического соревнования олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «математика» прошел в очной форме 10 ноября 2013 г. в г. Москве и г. Калуге. Первый (отборочный) этап академического соревнования на базе АлтГТУ им. И.И. Ползунова (г. Барнаул) прошел в очной форме 26 января 2014 г. Первый (отборочный) этап академического соревнования на базе ТувГУ (г. Кызыл) прошел в очной форме 25 января 2014 г. Первый (отборочный) этап академического соревнования олимпиады школьников «Шаг в будущее» для 8-10 классов проходил заочно с 01 декабря 2013 г. по 31 января 2014 г.

Второй (заключительный) этап академического соревнования олимпиады школьников «Шаг в будущее» организуется в очной форме в виде выполнения заданий по общеобразовательному предмету «математика», и прошел 16 марта 2014 г. в городе Москве и Калуге, а также на базе региональных площадок Олимпиады школьников «Шаг в будущее» в городе Кызыл (ТувГУ) и городе Барнаул (АлтГТУ имени И.И. Ползунова). Второй (заключительный) этап академического соревнования олимпиады

школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «математика» для 8-10 классов прошел в очной форме 23 февраля 2014 г.

Структура и содержание контрольных измерительных материалов по математике, использованных при проведении Олимпиады школьников «Шаг в будущее»

Конкурсные задания разработаны на основе Федерального компонента государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования. Тексты заданий в целом соответствуют формулировкам, принятым в учебниках и учебных пособиях, включенных в Федеральный перечень.

Каждый вариант олимпиадной работы по математике состоит из 10 заданий: четырех задач первого уровня сложности, двух задач второго уровня сложности и четырех задач третьего уровня сложности.

Все задания требуют от участников развернутого ответа, т.е. должно быть записано полное обоснованное решение задачи. Возможны различные способы решения и записи развернутого ответа. Главное требование – решение должно быть математически грамотным, из него должен быть понятен ход рассуждений автора работы. В остальном (метод, форма записи) решение может быть произвольным. Полнота и обоснованность рассуждений оцениваются независимо от выбранного метода решения.

При решении задачи можно использовать без доказательств и сылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, допущенных или рекомендованных Министерством образования и науки РФ.

Задачи одного билета охватывают все основные разделы школьного курса математики.

ЗАДАЧИ ПЕРВОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ требуют знания алгоритмов решения задач из одного или двух разделов математики. Для их решения требуются простые математические преобразования и вычисления. Это могут быть текстовые задачи с практико-ориентированной компонентой: задачи на движение, производительность, на пропорции и процентные отношения, на прогрессии, смеси, сплавы, растворы; тригонометрические уравнения или системы уравнений с выбором корней, примеры на тождественные преобразования тригонометрических выражений; рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические уравнения, и их системы; задачи, связанные со свойствами геометрических фигур, в том числе, задачи по планиметрии и простейшие стереометрические задачи. Однако и при решении задач первого уровня сложности от участников требуется не только показать математическую грамотность, но и

продемонстрировать свои аналитические способности и креативность мышления.

ЗАДАЧИ ВТОРОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ содержат рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические неравенства, смешанные неравенства и их системы; задачи, связанные с исследованием функций, проверяющие умение выполнять действия с функциями, строить их графики, использовать основные свойства элементарных функций, а именно, находить области определения и множества значений, учитывать непрерывность, монотонность.

ЗАДАЧИ ТРЕТЬЕГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ носят творческий характер. К ним относится планиметрическая задача на нахождение геометрических величин(длин, углов, площадей), проверяющая знания основных свойств и соотношений в треугольниках, четырехугольниках, многоугольниках, свойств окружностей и их касательных, умение выполнять геометрические построения. Здесь же предлагается задача на использование производной, которая проверяет умение выполнять действия с функциями, вычислять производные, использовать геометрический смысл производной, составлять уравнения касательных к графикам функций, находить экстремумы функций, наибольшие и наименьшие значения на отрезке и владеть основами аналитической геометрии (выполнять действия с координатами и векторами на плоскости). К этой группе относится и задача, которая требует умения решать алгебраические уравнения, неравенства или системы уравнений с параметрами при наличии ограничений на неизвестные. Решение этой задачи показывает уровень логического мышления участника, его способность находить выход из нестандартной ситуации. Последняя задача это задача по стереометрии. Для ее решения необходимо владеть методикой построения стереометрических чертежей и навыками применения теорем планиметрии и стереометрии для вычисления требуемых элементов. Успешное решение последней задачи показывает уровень пространственного воображения участника, необходимого будущему инженеру.

Ниже предлагается структура типового варианта по математике

для 1 и 2 туров.

Структура типового варианта задания

МГТУ им. Н. Э. Баумана 2014 г. Математика

ВАРИАНТ

Задачи первого уровня сложности.

1 Текстовая задача одного из типов: на движение, на работу, на проценты. (8 баллов)

2. Показательное или логарифмическое уравнение или неравенство. (8 баллов)

3. Задача, связанная со свойствами арифметической или геометрической прогрессии, или задача на целые числа. (8 баллов)

4. Тригонометрическое уравнение с ограничениями на корни (выбор корней из отрезка, уравнение, содержащее радикалы, модули…) (8 баллов)

Задачи второго уровня сложности.

5. Рациональное, иррациональное, показательное, логарифмическое или смешанное неравенство. (10 баллов)

6. Нахождение области определения или множества значений функции. (10 баллов)

Задачи третьего уровня сложности.

7. Задача по планиметрии. (12 баллов)

8. Задача, связанная с исследованием функций: нахождение экстремумов функций, наибольших и наименьших значений на отрезке, составление уравнений касательных к графику функции, использование метода координат. (12 баллов)

9. Уравнение, неравенство или система уравнений, неравенств с параметрами. (12 баллов)

10. Стереометрическая задача. (12 баллов)

На сайте Центра довузовской подготовки в разделе «Демонстрационные варианты и задания олимпиады» опубликованы варианты заданий с решениями отборочного и заключительного этапа олимпиады:

Отборочный этап:

- Вариант 1 с решениями задач
  http://cendop.bmstu.ru/userfiles/materials/2013_matem_autumn_var_1.pdf
- Вариант 7 с решениями задач
  http://cendop.bmstu.ru/userfiles/materials/2013_matem_autumn_var_7.pdf
- Вариант задания для 10 класса
  http://cendop.bmstu.ru/userfiles/materials/10_classes_matem_1_tour.pdf
- Вариант задания для 9 класса
  http://cendop.bmstu.ru/userfiles/materials/9_classes_matem_1_tour.pdf
- Вариант задания для 8 класса
  http://cendop.bmstu.ru/userfiles/materials/8_classes_matem_1_tour.pdf

Заключительный этап:

- Типовой вариант с решениями
  http://cendop.bmstu.ru/userfiles/docs/matem2014.pdf
- Вариант 13 с решениями
  http://cendop.bmstu.ru/userfiles/materials/2014_matem_spring_var_13.pdf
- Вариант 15 с решениями
  http://cendop.bmstu.ru/userfiles/materials/2014_matem_spring_var_15.pdf
- Варианты задания для 10 класса
  http://cendop.bmstu.ru/userfiles/materials/10_classes_matem_2_tour.pdf
- Варианты задания для 9 класса
  http://cendop.bmstu.ru/userfiles/materials/9_classes_matem_2_tour.pdf
- Варианты задания для 8 класса
  http://cendop.bmstu.ru/userfiles/materials/8_classes_matem_2_tour.pdf
- Рекомендуемая литература для подготовки
  http://cendop.bmstu.ru/userfiles/materials/2014_literature.pdf

"УТВЕРЖДАЮ"

Ректор МГТУ им. Н.Э. Баумана

А.А. Александров

"__" _____ 2014 г.

Заключительный этап академического соревнования Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика»

Типовой вариант задания

1. Васе и Пете, участвующим в школьной спортивно-развлекательной игре, необходимо, имея на двоих лишь одну пару роликов, как можно быстрее преодолеть дистанцию в 5 км. Они стартуют одновременно, один просто бежит, другой бежит на роликах. В любой момент времени бегущий на роликах может оставить их своему товарищу и продолжить бег без них. Такой обмен можно провести сколько угодно раз. Найдите минимальное время прохождения дистанции друзьями (определяется по последнему прибежавшему), если скорости Васи при простом беге и беге на роликах равны 4 км/ч и 8 км/ч, а Пети – 6 км/ч и 12 км/ч. Считать, что при переходе на ролики и обратно время не теряется. (8 баллов)

2. Решите уравнение $\left(\log_2 x\right)\cdot\log_{81}\left(8x\right)=\log_3 2$. (8 баллов)

3. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии S_3 относится к сумме первых двух членов S_2 как $43:42$, а сумма первого и третьего членов равна 37. Найдите первый член и знаменатель прогрессии и определите, в каких пределах может изменяться сумма n членов прогрессии S_n. (8 баллов)

4. Найдите все удовлетворяющие условию $|x|+|y|\le 14$ решения уравнения

$\left(\cos^8\left(x/8\right)-\sin^8\left(x/8\right)\right)\left(5-\cos 2y-4\cos y\right)=\cos^2\left(x/4\right)-\cos\left(x/4\right)$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{(5\cdot 25^x-26\cdot 5^x+5)(\sqrt{x+7}-x-1)}{\log_3(x+2)\cdot\log_2(6-x)}\le 0$. (10 баллов)

6. Для функции $f(x)=g(g(x))-(7+\pi)g(x)+4\pi-2$ найдите множество значений при $x\in[0;\ 0{,}5]$, где $g(x)=2\cos\pi x+7x+2$. (10 баллов)

7. Две окружности внешним образом касаются друг друга и сторон треугольника ABC. Первая окружность радиуса 1 касается сторон AB и AC в точках L и K, вторая окружность радиуса 9 касается сторон AC и BC в точках N и M. Найдите площадь треугольника ABC, если $AL=2$, $CM=12$. (12 баллов)

8. Стороны треугольника ΔABC лежат на касательных к графику функции $y=0{,}25\left(x^2+6x+1\right)$; две из них проходят через точку $A(-1;-2)$, а точка касания графика с третьей касательной лежит на стороне BC. Какую наибольшую площадь может иметь ΔABC? (12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$\left(x-a\right)^2+y=12-a,\quad y^2+\left(\left(x-12\right)/\left(|x|-12\right)\right)^2=1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (12 баллов)

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит равносторонний треугольник ABC, а высота пирамиды, равная 2, совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной медиане AD боковой грани TAB и проходящей через середину стороны основания AB и центр сферы радиуса $\sqrt{11/3}$, описанной около пирамиды. (12 баллов)

Решение типового варианта заключительного этапа академического соревнования Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика»

1. Васе и Пете, участвующим в школьной спортивно-развлекательной игре, необходимо, имея на двоих лишь одну пару роликов, как можно быстрее преодолеть дистанцию в 5 км. Они стартуют одновременно, один просто бежит, другой бежит на роликах. В любой момент времени бегущий на роликах может оставить их своему товарищу и продолжить бег без них. Такой обмен можно провести сколько угодно раз. Найдите минимальное время прохождения дистанции друзьями (определяется по последнему прибежавшему), если скорости Васи при простом беге и беге на роликах равны 4 км/ч и 8 км/ч, а Пети – 6 км/ч и 12 км/ч. Считать, что при переходе на ролики и обратно время не теряется.(8 баллов)

Решение: Вся дистанция делится на несколько этапов, которые один из школьников бежит без роликов, другой на роликах. Пусть x – сумма длин этапов, которые Вася пробегает на роликах, t_1 – время, затраченное им на пробег всей дистанции, а t_2 – время, которое затрачивает Петя на пробег всей дистанции, тогда $t_1 = \frac{x}{8} + \frac{5-x}{4} = \frac{10-x}{8}$ и $t_2 = \frac{5-x}{12} + \frac{x}{6} = \frac{5+x}{12}$. Отметим, что функция $t_1(x)$ убывающая, а функция $t_2(x)$ возрастающая. Укажем значение x, при котором $t_1 = t_2$, то есть, бегуны закончили бы пробег одновременно. Из $\frac{10-x}{8} = \frac{5+x}{12} \Rightarrow x = 4$, $t_1 = t_2 = \frac{3}{4}$ часа. Если $x < 4$, то $t_1(x) > \frac{3}{4} > t_2(x)$, если $x > 4$, то $t_1(x) < \frac{3}{4} < t_2(x)$. Следовательно, минимальное время прохождения дистанции друзьями (по последнему прибежавшему), равно 3/4 часа.
Ответ: 3/4 ч.

2. $(\log_2 x)\cdot \log_{81}(8x) = \log_3 2$; $\frac{\log_2(8x)}{4\log_2 3}\cdot \log_2 x = \frac{1}{\log_2 3}$; $(3+\log_2 x)\log_2 x = 4$;

$\log_2^2 x + 3\log_2 x - 4 = 0$. 1) $\log_2 x = -4$, $x = 1/16$, 2) $\log_2 x = 1$, $x = 2$. Ответ: $\{1/16;2\}$.

3. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии S_3 относится к сумме первых двух членов S_2 как $43:42$, а сумма первого и третьего членов равна 37. Найдите первый член и знаменатель прогрессии и определите, в каких пределах может изменяться сумма n членов прогрессии S_n.

Решение: $\frac{S_3}{S_2} = \frac{a(1+q+q^2)}{a(1+q)} = \frac{43}{42}$. $42q^2 + 42q + 42 = 43q + 43$; $42q^2 - q - 1 = 0$;

$q = \frac{1 \pm \sqrt{1+168}}{84} = \frac{1 \pm 13}{84} = \left[\begin{array}{l} 1/6, \\ -1/7. \end{array}\right.$ Возможны два решения.

1) Если $q = \frac{1}{6}$, из условия $a(1+q^2) = 37 \Rightarrow a = 36$.

$$S_n = 36\frac{1-(1/6)^n}{1-1/6} = \frac{216}{5}\left(1-(1/6)^n\right);\ 36 \le S_n < \frac{216}{5}.$$

2) Если $q = -\frac{1}{7}$, $a\left(1+\frac{1}{49}\right) = 37$, $a = \frac{49\cdot 37}{50} = \frac{1813}{50}$.

Так как $q<0, |q|<1$, $S_2 \le S_n \le S_1$. $\frac{49\cdot 37}{50}\left(1-\frac{1}{7}\right) \le S_n \le \frac{1813}{50}$, $\frac{1554}{50} \le S_n \le \frac{1813}{50}$.

4. Найдите все решения уравнения

$$\left(\cos^8\frac{x}{8} - \sin^8\frac{x}{8}\right)(5-\cos 2y - 4\cos y) = \cos^2\frac{x}{4} - \cos\frac{x}{4},$$

удовлетворяющие условию $|x|+|y| \le 14$. (8 баллов)

Решение: После равносильных преобразований имеем

$$\left(\sin^4\frac{x}{8} - \cos^4\frac{x}{8}\right)\left(\sin^4\frac{x}{8} + \cos^4\frac{x}{8}\right)\left(2\cos^2 y + 4\cos y - 6\right) = \cos^2\frac{x}{4} - \cos\frac{x}{4} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\sin^2\frac{x}{8} - \cos^2\frac{x}{8}\right)\left(\sin^4\frac{x}{8} + \cos^4\frac{x}{8}\right)\left(2\cos^2 y + 4\cos y - 6\right) = -\cos\frac{x}{4}\left(1-\cos\frac{x}{4}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\cos\frac{x}{4}\left(\sin^4\frac{x}{8} + \cos^4\frac{x}{8}\right)\left(\cos^2 y + 2\cos y - 3\right) = \cos\frac{x}{4}\sin^2\frac{x}{8}$$

1) $\cos\frac{x}{4} = 0$, $y \in R \Leftrightarrow x = 2\pi + 4\pi n$, $n \in Z$. Выберем решения, удовлетворяющие условию $|x|+|y| \le 14$: $x = 2\pi$, $x = -2\pi$, $|y| \le 14 - 2\pi$. В итоге имеем $(\pm 2\pi;\ y)$, $y \in [\pi - 14; 14 - \pi]$.

2) $\left(\sin^4\frac{x}{8} + \cos^4\frac{x}{8}\right)\left((\cos y + 1)^2 - 4\right) = \sin^2\frac{x}{8}$. Так как

$\sin^4\frac{x}{8} + \cos^4\frac{x}{8} > 0$, $\sin^2\frac{x}{8} \ge 0$ для любых $x \in R$, то $(\cos y + 1)^2 \ge 4$, или $\cos y \ge 1$.

Откуда получаем $\cos y = 1$, $\sin\frac{x}{8} = 0$, или $x = 8\pi n$, $y = 2\pi k$, $n, k \in Z$. Поскольку $x \in [-14; 14]$, то $n = 0$. Тогда $-14 \le 2\pi k \le 14$, и $k = 0; \pm 1; \pm 2$.

Ответ: $(\pm 2\pi;\ y)$, $y \in [\pi - 14; 14 - \pi]$; $(0;\ 2\pi k)$, $k = 0; \pm 1; \pm 2$.

5. Решите неравенство $\dfrac{(5\cdot 25^x - 26\cdot 5^x + 5)(\sqrt{x+7} - x - 1)}{\log_3(x+2)\cdot\log_2(6-x)} \le 0$. (10 баллов)

Решение:

ОДЗ: $x+7 \ge 0$, $x+2>0$, $6-x>0$, $x \ne -1$, $x \ne 5$ $\Rightarrow$ $x \in (-2;-1)\cup(-1;5)\cup(5;6)$.

Имеем $\dfrac{(5^x - 5)(5^x - 5^{-1})(\sqrt{x+7} - x - 1)}{(\log_3(x+2) - \log_3 1)(\log_2(6-x) - \log_2 1)} \le 0.$

На ОДЗ исходное неравенство эквивалентно следующему

$\dfrac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+7} - (x+1))}{(x+1)(5-x)} \le 0 \Rightarrow \dfrac{(x-1)(\sqrt{x+7} - (x+1))}{(5-x)} \le 0.$

Если $x \in (-2;-1)$, то $x<-1 \Rightarrow \sqrt{x+7}-(x+1)>0$. Следовательно, приходим к неравенству $\frac{(x-1)}{(5-x)} \le 0$, и $x \in (-2;-1)$.

Если $x \in (-1;5) \cup (5;6)$ то приходим к неравенству $\frac{(x-1)(x+7-(x+1)^2)}{(5-x)} \le 0$, и $\frac{(x-1)(x-2)(x+3)}{(x-5)} \le 0 \Rightarrow x \in (-1;1] \cup [2;5)$.

Окончательно имеем $x \in (-2;-1) \cup (-1;1] \cup [2;5)$.

Ответ: $x \in (-2;-1) \cup (-1;1] \cup [2;5)$.

6. Найдите множество значений функции $f(x)=g(g(x))-(7+\pi)g(x)+4\pi-2$ при $x \in [0;0{,}5]$, где $g(x)=2\cos\pi x+7x+2$. (10 баллов)

Решение: Исследуем функцию $g(x)$ на монотонность. Так как $g'(x)=-2\pi\sin\pi x+7>0$ для всех $x \in R$, то функция $g(x)$ возрастает на отрезке $[0;0{,}5]$ и ее множество значений на этом отрезке совпадает с отрезком $[g(0);g(0{,}5)]=[4;5{,}5]$. Множество значений E_f функции $f(x)=g(g(x))-(7+\pi)g(x)+4\pi-2$ на отрезке $[0;0{,}5]$ совпадает с множеством значений E_φ функции $\varphi(t)=g(t)-(7+\pi)t+4\pi-2$ на отрезке $[4;5{,}5]$. Найдем E_φ. Функция $\varphi(t)=2\cos\pi t-\pi t+4\pi$ имеет производную $\varphi'(t)=-2\pi\sin\pi t-\pi$. Тогда $\varphi'(t)=0$ в том случае, если $\sin\pi t=-0{,}5$, т.е. при $t=-\frac{1}{6}+2k$ или $t=-\frac{5}{6}+2k$, $k \in Z$. Из точек, при которых $\varphi'(t)=0$, в отрезок $[4;5{,}5]$ попадает только точка $t=5\frac{1}{6}$. Вычислим значения функции φ в точках $t=4, t=5\frac{1}{6}, t=5{,}5$:

$$\varphi(4)=2;\ \varphi(31/6)=-\sqrt{3}-\frac{31\pi}{6}+4\pi=-\sqrt{3}-\frac{7\pi}{6};\ \varphi(5{,}5)=-1{,}5\pi.$$

Так как $\sqrt{3}+\frac{7\pi}{6}>1{,}5\pi$, то $E_\varphi=\left[-\sqrt{3}-\frac{7\pi}{6};2\right]$. Следовательно, $E_f=\left[-\sqrt{3}-\frac{7\pi}{6};2\right]$

Ответ: $E_f=\left[-\sqrt{3}-\frac{7\pi}{6};2\right]$.

7. Две окружности внешним образом касаются друг друга и сторон треугольника ABC. Первая окружность радиуса 1 касается сторон AB и AC в точках L и K, вторая окружность радиуса 9 касается сторон AC и BC в точках N и M. Найдите площадь треугольника ABC, если $AL=2$, $CM=12$.

Решение: $a=2,\quad b=12,\quad r=1,\quad R=9$

$KN = 2\sqrt{rR} = 6, \quad AC = a + KN + b = 20$

$tg\dfrac{A}{2} = \dfrac{r}{a}, \quad tg\dfrac{C}{2} = \dfrac{R}{b},$

$\cos^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{a^2}{a^2+r^2}, \quad \cos^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{b^2}{b^2+R^2},$

$\cos A = 2\cos^2\dfrac{A}{2} - 1 = \dfrac{2a^2}{a^2+r^2} - 1 = \dfrac{a^2-r^2}{a^2+r^2} = \dfrac{3}{5},$

$\cos C = 2\cos^2\dfrac{C}{2} - 1 = \dfrac{2b^2}{b^2+R^2} - 1 = \dfrac{b^2-R^2}{b^2+R^2} = \dfrac{7}{25},$

$\sin A = \dfrac{2ar}{a^2+r^2} = \dfrac{4}{5}, \quad \sin C = \dfrac{2bR}{b^2+R^2} = \dfrac{24}{25},$

$\sin B = \sin(A+C) = \sin A\cos C + \cos A\sin C = \dfrac{100}{125} =$

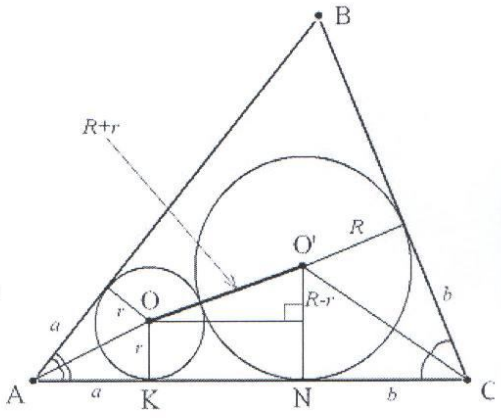


Рис. 1

Теорема синусов: $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{AC}{\sin B}.$

$AB = \dfrac{AC\sin C}{\sin B}, \quad S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB\cdot AC\sin A = \dfrac{AC^2\sin A\sin C}{2\sin B} = \dfrac{400\cdot 4\cdot 24\cdot 5}{2\cdot 5\cdot 25\cdot 4} = 192.$

Ответ: 192.

8. Стороны треугольника ΔABC лежат на касательных к графику функции $y = 0{,}25\left(x^2+6x+1\right)$; две из них проходят через точку $A(-1;-2)$, а точка касания графика с третьей касательной лежит на стороне BC. Какую наибольшую площадь может иметь ΔABC?

$y = 0{,}25\left(x^2+6x+1\right); \; A(-1;-2)$

Уравнение касательной к графику функции:

$y = \dfrac{1}{4}x_0^2 + \dfrac{3}{2}x_0 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{x_0+3}{2}\cdot(x-x_0),$

или

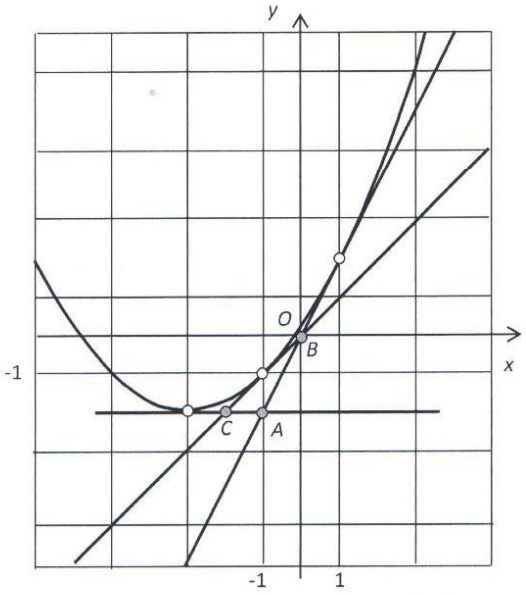
$y = -\dfrac{1}{4}x_0^2 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{x_0+3}{2}\cdot x.$

Для касательных, проходящих через точку A,

$-2 = -\dfrac{1}{4}x_0^2 + \dfrac{1}{4} - \dfrac{x_0+3}{2}$. Отсюда

$x_0^2 + 2x_0 - 3 = 0, \; x_0 = \left[\begin{array}{l} 1, \\ -3. \end{array}\right.$ Уравнения касательных, проходящих через точку A: 1) $y = -2$; 2). $y = 2x$ Уравнение прямой CB:

$y = -\dfrac{1}{4}x_*^2 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{x_*+3}{2}\cdot x,$



где x_* – абсцисса точки касания с графиком функции. В точке $C(y_C;x_C)$ $y_C=-2$.

Тогда $-2=-\frac{1}{4}x_*^2+\frac{1}{4}+\frac{x_*+3}{2}\cdot x_C$. Отсюда $x_C=\frac{x_*^2-9}{4(x_*+3)}\cdot 2=\frac{x_*-3}{2}$.

В точке $B(x_B;y_B)$ $-\frac{1}{4}x_*^2+\frac{1}{4}+\frac{x_*+3}{2}\cdot x_B=2x_B$, $\frac{x_*-1}{2}\cdot x_B=\frac{x_*^2-1}{4}$, $x_B=\frac{x_*+1}{2}$,

$y_B=2x_B=x_*+1$.

Площадь треугольника ABC равна

$S_{\Delta ABC}=0,5\cdot(x_A-x_C)\cdot(y_B-y_A)=\frac{1}{2}\cdot\left(-1-\frac{x_*-3}{2}\right)\cdot(x_*+1+2)=\frac{1}{4}\left(3-2x_*-x_*^2\right)=S(x_*)$.

$S'(x_*)=0,25(-2-2x_*)=0$ при $x_*=-1$. $\max S_{\Delta ABC}=S(-1)=0,25\cdot(3+2-1)=1$.

Ответ: 1 $ед^2$.

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$(x-a)^2+y=12-a$, $y^2+\left(\frac{x-12}{|x|-12}\right)^2=1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

Решение. Преобразуем второе уравнение:

$y^2=\frac{x^2-24|x|+144-x^2+24x-144}{(|x|-12)^2}$; $y^2=-\frac{24(|x|-x)}{(|x|-12)^2}$.

При $x<0$ уравнение решений не имеет, так как правая часть меньше нуля; при $x\ge 0$ оно равносильно системе: $x\ge 0$, $x\ne 12$, $y=0$. Подставляя $y=0$ в первое уравнение, получаем; $(x-a)^2=12-a$, или $x^2-2ax+a^2+a-12=0$ (*), у которого

$D/4=a^2-a^2-a+12=12-a$.

Корень $x=12$ квадратного уравнения может получиться, когда $(12-a)^2=12-a$, т.е. если 1) $a=12$, уравнение имеет вид $(x-12)^2=0$, тогда этот корень единственный и заданная система решений не имеет, или 2) $12-a=1$, т.е. $a=11$, тогда для x получаем уравнение $(x-11)^2=12-11$, $x=11\pm 1$, у которого, кроме постороннего корня $x_1=12$, есть еще один корень $x_2=10$, удовлетворяющий условиям, и заданная система имеет единственное решение $(10;0)$.

Рассмотрим остальные случаи, когда решение системы будет единственным.

1. $\begin{cases} D/4=12-a=0, \\ a>0, \quad a\ne 12. \end{cases}$ Система решений не имеет.

2. $a^2+a-12<0$, т.е. при $-4<a<3$ $x=a+\sqrt{12-a}$.

3. $a^2+a-12=0$, отсюда $a=3$, $x^2-6x=0$, $x_1=0$, $x_2=6$ удовлетворяют условиям, или $a=-4$, $x^2+8x=0$, $x_1=0$, $x_2=-8$ – посторонний корень.

Рассмотрим случаи, когда система будет иметь два различных решения. Квадратное уравнение (*) будет иметь два различных неотрицательных корня $x=a\pm\sqrt{12-a}$, если

$$\begin{cases} 12-a>0, \\ a>0, \\ a^2+a-12\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a<12, \\ \left[\begin{array}{l} a\le -4, \\ a\ge 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 3\le a<12.$$ Из этого промежутка надо убрать рассмотренную ранее точку $a=11$. Объединяя найденные значения a, получим ответ.

Ответ: $a\in[-4;3)$, $x=a+\sqrt{12-a}$, $y=0$;

$a\in[3;11)\cup(11;12)$, $x_{1,2}=a\pm\sqrt{12-a}$, $y=0$;

$a=11$, $x=10$, $y=0$.

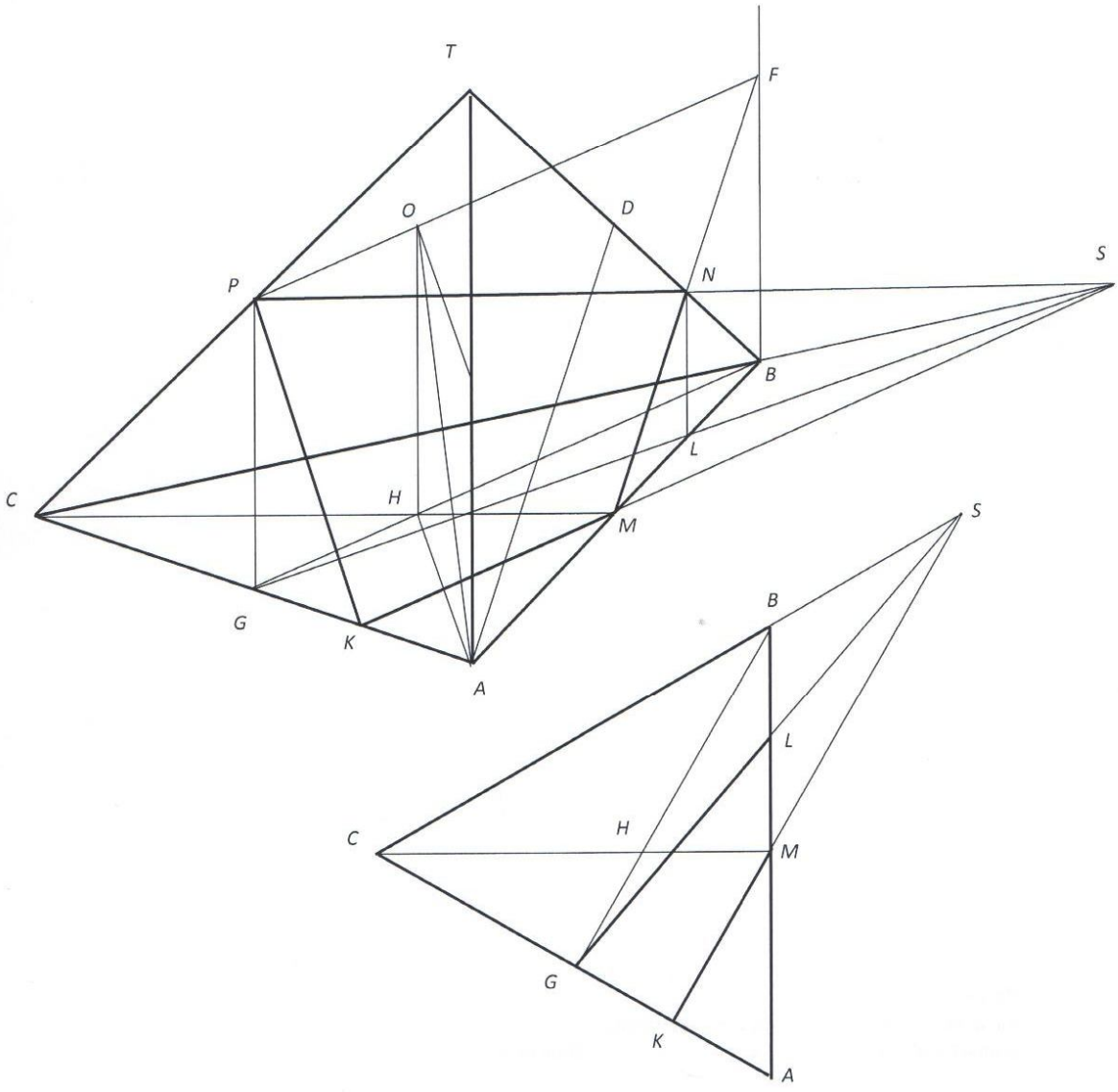
10. Центр сферы O лежит на перпендикуляре к плоскости основания, проведенном через центр основания H; $OH=AT/2$. Через вершину B проведем прямую $BE\parallel AT$. Через середину стороны AB точку M проведем прямую $MN\parallel AD$, $N\in TB$, $TB=4NB$, и продолжим ее до пересечения с BE в точке F. Очевидно, MF лежит в секущей плоскости и $BF=AT/2$. Прямая FO лежит в секущей плоскости, она параллельна медиане основания BG и пересекает боковое ребро TC в его середине – точке P. Проведем $MK\parallel BG$, $K\in AC$; MK – линия пересечения секущей плоскости с основанием пирамиды. Значит, $MNPK$ – искомое сечение. Пусть S – точка пересечения прямых MK и NP; очевидно $S\in(BC)$. Из того, что $\Delta PSG\sim\Delta NSL$ и $NL=1/2\,PG$, следует $NS=\frac{1}{2}PS$. Кроме того, $MS=\frac{2}{3}KS$. Тогда площадь треугольника MSN $S_{\Delta MSN}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}S_{\Delta KSP}=\frac{1}{3}S_{\Delta KSP}$, а площадь сечения $S_{MNPK}=\frac{2}{3}S_{\Delta KSP}$.

Обозначим $AB=a$, $TA=h$, $OA=R$. В ΔAOH $OH=h/2$, $AH=a/\sqrt{3}$. Так как $OA^2=OH^2+AH^2$, $R^2=(h/2)^2+\left(a/\sqrt{3}\right)^2$, $a=\sqrt{3}\sqrt{R^2-(h/2)^2}$. Заметим, что $PK\perp KS$, так как $KM\perp AC$, тогда $S_{\Delta KSP}=\frac{1}{2}KS\cdot PK$. Так как $KS=\frac{3}{2}BG$, $KS=\frac{3\sqrt{3}\,a}{4}$. В треугольнике PKG $PK=\sqrt{GK^2+PG^2}=\sqrt{(a/4)^2+(h/2)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{a^2+4h^2}$. Площадь треугольника

$S_{\Delta KSP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}\,a}{4} \cdot \frac{\sqrt{a^2+4h^2}}{4} = \frac{3\sqrt{3}\,a\sqrt{a^2+4h^2}}{32}$. Площадь сечения

$S_{MNPK} = \frac{2}{3} S_{\Delta FMN} = \frac{\sqrt{3}a\sqrt{a^2+4h^2}}{16}$.

Ответы: $R = \sqrt{\frac{11}{3}}, h = 2, a = \sqrt{3\left(\frac{11}{3}-1\right)} = \sqrt{8},\ S = \frac{\sqrt{8}\sqrt{3}\sqrt{8+4\cdot 4}}{16} = \frac{3}{2}$.



Заключительный этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету

«Математика» в 2014 г.

Вариант № 13

1. Васе и Пете, участвующим в школьной спортивно-развлекательной игре, необходимо, имея на двоих лишь одну пару роликов, как можно быстрее преодолеть дистанцию в 3 км. Они стартуют одновременно, один просто бежит, другой бежит на роликах. В любой момент времени бегущий на роликах может оставить их своему товарищу и продолжить бег без них. Такой обмен можно провести сколько угодно раз. Найдите минимальное время прохождения дистанции друзьями (определяется по последнему прибежавшему), если скорости Васи при простом беге и беге на роликах равны 4 км/ч и 8 км/ч, а Пети – 5 км/ч и 10 км/ч. Считать, что при переходе на ролики и обратно время не теряется. (8 баллов)

2. Решите уравнение $(\log_3 x)\cdot\log_4(x/3)=\log_2 3$. (8 баллов)

3. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии S_3 относится к сумме первых двух членов S_2 как $19:15$, а сумма первого и третьего членов равна 13. Найдите первый член и знаменатель прогрессии и определите, в каких пределах может изменяться сумма n членов прогрессии S_n. (8 баллов)

4. Найдите все удовлетворяющие условию $|x|+|y|\le 9$ решения уравнения $\left(\sin^8(x/4)-\cos^8(x/4)\right)(\cos 4y+4\cos 2y-5)=\cos^2(x/2)-\cos(x/2)$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{(4^x-12\cdot 2^x+32)(\sqrt{2x-1}-x+2)}{\log_2(x-1)\cdot\log_3(7-x)}\le 0.$ (10 баллов)

6. Для функции $f(x)=g(g(x))+(7+\pi)g(x)-3\pi-1$ найдите множество значений при $x\in[-0{,}5;\ 0]$, где $g(x)=2\cos\pi x-7x+1$. (10 баллов)

7. Две окружности внешним образом касаются друг друга и сторон треугольника ABC. Первая окружность радиуса $1/18$ касается сторон AB и AC в точках L и K, вторая окружность радиуса $2/9$ касается сторон AC и BC в точках N и M. Найдите площадь треугольника ABC, если $AL=1/9$, $CM=1/6$. (12 баллов)

8. Стороны треугольника ΔABC лежат на касательных к графику функции $y=0{,}25x^2-x+4$; две из них проходят через точку $A(4;3)$, а точка касания графика с третьей касательной лежит на стороне BC. Какую наибольшую площадь может иметь ΔABC? (12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений $3(x-a)^2+y=2-a,\quad y^2+\left((x-2)/(|x|-2)\right)^2=1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (12 баллов)

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит равносторонний треугольник ABC, а высота пирамиды, равная $\sqrt{2}$, совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной медиане AD боковой грани TAB и проходящей через середину стороны основания AB и центр сферы радиуса $\sqrt{11/6}$, описанной около пирамиды. (12 баллов)

Решение варианта №13

1. Васе и Пете, участвующим в школьной спортивно-развлекательной игре, необходимо, имея на двоих лишь одну пару роликов, как можно быстрее преодолеть дистанцию в 3 км. Они стартуют одновременно, один просто бежит, другой бежит на роликах. В любой момент времени бегущий на роликах может оставить их своему товарищу и продолжить бег без них. Такой обмен можно провести сколько угодно раз. Найдите минимальное время прохождения дистанции друзьями (определяется по последнему прибежавшему), если скорости Васи при простом беге и беге на роликах равны 4 км/ч и 8 км/ч, а Пети – 5 км/ч и 10 км/ч. Считать, что при переходе на ролики и обратно время не теряется.(8 баллов)

Решение: Вся дистанция делится на несколько этапов, которые один из школьников бежит без роликов, другой на роликах. Пусть x – сумма длин этапов, которые Вася пробегает на роликах, t_1 – время, затраченное им на пробег всей дистанции, а t_2 – время, которое затрачивает Петя на пробег всей дистанции, тогда $t_1 = \frac{x}{8} + \frac{3-x}{4} = \frac{6-x}{8}$ и $t_2 = \frac{3-x}{10} + \frac{x}{5} = \frac{3+x}{10}$. Отметим, что функция $t_1(x)$ убывающая, а функция $t_2(x)$ возрастающая. Укажем значение x, при котором $t_1 = t_2$, то есть, бегуны закончили бы пробег одновременно. Из $\frac{6-x}{8} = \frac{3+x}{10} \Rightarrow x = 2,\ t_1 = t_2 = \frac{1}{2}$ часа. Если $x < 2$, то $t_1(x) > \frac{1}{2} > t_2(x)$, если $x > 2$, то $t_1(x) < \frac{1}{2} < t_2(x)$. Следовательно, минимальное время прохождения дистанции друзьями (по последнему прибежавшему), равно 0,5 часа.
Ответ: 0,5 ч.

2. Решите уравнение $(\log_3 x)\cdot\log_4(x/3) = \log_2 3$.

Решение: $(\log_3 x)\cdot\log_4(x/3) = \log_2 3;\ \frac{\log_3(x/3)}{2\log_3 2}\cdot\log_3 x = \frac{1}{\log_3 2};$

$(\log_3 x - 1)\log_3 x = 2;\ \log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0$. 1) $\log_3 x = -1,\quad x = 1/3,$
2) $\log_3 x = 2,\quad x = 9$. Ответ: $\{1/3; 9\}$.

3. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии S_3 относится к сумме первых двух членов S_2 как $19:15$, а сумма первого и третьего членов равна 13. Найдите первый член и знаменатель прогрессии и определите, в каких пределах может изменяться сумма n членов прогрессии S_n.

Решение:

$$\frac{S_3}{S_2} = \frac{a\left(1+q+q^2\right)}{a(1+q)} = \frac{19}{15}.\ 15q^2 + 15q + 15 = 19q + 19;\ 15q^2 - 4q - 4 = 0;$$

$$q = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{15} = \frac{2 \pm 8}{15} = \left[\begin{array}{l} 2/3, \\ -2/5. \end{array}\right.$$ Возможны два решения.

1) Если $q=\frac{2}{3}$, из условия $a\left(1+q^2\right)=13\Rightarrow a=9$.

$S_n=9\frac{1-(2/3)^n}{1-2/3}=27\left(1-(2/3)^n\right);\ 9\le S_n<27$.

2) Если $q=-\frac{2}{5}$, $a\left(1+\frac{4}{25}\right)=13,\ a=\frac{13\cdot 25}{29}=\frac{325}{29}$.

Так как $q<0,\ |q|<1,\ S_2\le S_n\le S_1$. $\frac{325}{29}\left(1-\frac{2}{5}\right)\le S_n\le\frac{325}{29},\ \frac{195}{29}\le S_n\le\frac{325}{29}$.

Ответ: 1) $q=\frac{2}{3}$, $a=9,\ 9\le S_n<27$; 2) $q=-\frac{2}{5},\ a=\frac{325}{29},\ \frac{195}{29}\le S_n\le\frac{325}{29}$.

4. Найдите все решения уравнения
$\left(\sin^8\frac{x}{4}-\cos^8\frac{x}{4}\right)(\cos 4y+4\cos 2y-5)=\cos^2\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}$, удовлетворяющие условию $|x|+|y|\le 9$.

Решение:
После равносильных преобразований имеем

$\left(\sin^4\frac{x}{4}-\cos^4\frac{x}{4}\right)\left(\sin^4\frac{x}{4}+\cos^4\frac{x}{4}\right)\left(2\cos^2 2y+4\cos 2y-6\right)=\cos^2\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\quad\Leftrightarrow$

$\left(\sin^2\frac{x}{4}-\cos^2\frac{x}{4}\right)\left(\sin^4\frac{x}{4}+\cos^4\frac{x}{4}\right)\left(2\cos^2 2y+4\cos 2y-6\right)=-\cos\frac{x}{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\quad\Leftrightarrow$

$\cos\frac{x}{2}\left(\sin^4\frac{x}{4}+\cos^4\frac{x}{4}\right)\left(\cos^2 2y+2\cos 2y-3\right)=\cos\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{4}$

1) $\cos\frac{x}{2}=0,\quad y\in R\Leftrightarrow x=\pi+2\pi n,\ n\in Z$. Выберем решения, удовлетворяющие условию $|x|+|y|\le 9$: $x=\pi$, $x=-\pi$, $|y|\le 9-\pi$. В итоге имеем
$(\pm\pi;\ y),\quad y\in[\pi-9;9-\pi]$.

2) $\left(\sin^4\frac{x}{4}+\cos^4\frac{x}{4}\right)\left((\cos 2y+1)^2-4\right)=\sin^2\frac{x}{4}$

Так как $\sin^4\frac{x}{4}+\cos^4\frac{x}{4}>0,\ \sin^2\frac{x}{4}\ge 0$ для любых $x\in R$, то $(\cos 2y+1)^2\ge 4$, или

$\cos 2y\ge 1$. Откуда получаем $\cos 2y=1$, $\sin\frac{x}{4}=0$, или $x=4\pi n,\ y=\pi k,\ n,k\in Z$.

Поскольку $x\in[-9;9]$, то $n=0$. Тогда $-9\le\pi k\le 9$, и $k=0;\pm 1;\pm 2$.

Ответ: $(\pm\pi;\ y),\quad y\in[\pi-9;9-\pi];\ (0;\pi k),\ k=0;\pm 1;\pm 2$.

5. Решите неравенство $\dfrac{(4^x-12\cdot 2^x+32)(\sqrt{2x-1}-x+2)}{\log_2(x-1)\cdot\log_3(7-x)}\le 0$. (10 баллов)

Решение:

ОДЗ: $2x-1\ge 0,\quad x-1>0,\ 7-x>0, x\ne 2, x\ne 6 \ \Rightarrow\ \ x\in(1;2)\cup(2;6)\cup(6;7)$.

Имеем $\dfrac{(2^x-8)(2^x-4)(\sqrt{2x-1}-x+2)}{(\log_2(x-1)-\log_2 1)(\log_3(7-x)-\log_3 1)}\le 0.$

На ОДЗ исходное неравенство эквивалентно следующему

$\dfrac{(x-3)(x-2)(\sqrt{2x-1}-(x-2))}{(x-2)(6-x)}\le 0 \ \Rightarrow \dfrac{(x-3)(\sqrt{2x-1}-(x-2))}{(6-x)}\le 0.$

Если $x\in(1;2)$, то $x-2<0 \ \Rightarrow\ \sqrt{2x-1}-(x-2)>0$. Следовательно, приходим к неравенству $\dfrac{(x-3)}{(6-x)}\le 0$, и $x\in(1;2)$.

Если $x\in(2;6)\cup(6;7)$ то приходим к неравенству $\dfrac{(x-3)(2x-1-(x-2)^2)}{(6-x)}\le 0$, и

$\dfrac{(x-3)(x-5)(x-1)}{(x-6)}\le 0 \Rightarrow\ x\in(2;3]\cup[5;6)$.

Окончательно имеем $x\in(1;2)\cup(2;3]\cup[5;6)$.

Ответ: $x\in(1;2)\cup(2;3]\cup[5;6)$.

6. Найдите множество значений функции $f(x)=g(g(x))+(7+\pi)g(x)-3\pi-1$ при $x\in[-0{,}5;0]$, где $g(x)=2\cos\pi x-7x+1$. (10 баллов)

Решение: Исследуем функцию $g(x)$ на монотонность. Так как $g'(x)=-2\pi\sin\pi x-7<0$ для всех $x\in R$, то функция $g(x)$ убывает на отрезке $[-0{,}5;0]$ и ее множество значений на этом отрезке совпадает с отрезком $[g(0);\ g(-0{,}5)]=[3;4{,}5]$. Множество значений E_f функции $f(x)=g(g(x))+(7+\pi)g(x)-3\pi-1$ на отрезке $[-0{,}5;0]$ совпадает с множеством значений E_φ функции $\varphi(t)=g(t)+(7+\pi)t-3\pi-1$ на отрезке $[3;4{,}5]$. Найдем E_φ. Функция $\varphi(t)=2\cos\pi t+\pi t-3\pi$ имеет производную $\varphi'(t)=-2\pi\sin\pi t+\pi$. Тогда $\varphi'(t)=0$ в том случае, если $\sin\pi t=0{,}5$, т.е. при $t=\dfrac{1}{6}+2k$ или $t=\dfrac{5}{6}+2k$, $k\in Z$. Из точек, при которых $\varphi'(t)=0$, в отрезок $[3;4{,}5]$ попадает только точка $t=4\dfrac{1}{6}$. Вычислим значения функции φ в точках $t=3,\ t=4\dfrac{1}{6},\ t=4{,}5$:

$$\varphi(3)=-2;\ \ \varphi(25/6)=\sqrt{3}+\frac{25\pi}{6}-3\pi=\sqrt{3}+\frac{7\pi}{6};\ \ \varphi(4{,}5)=1{,}5\pi.$$

Так как $\sqrt{3}+\dfrac{7\pi}{6}>1{,}5\pi$, то $E_\varphi=\left[-2;\sqrt{3}+\dfrac{7\pi}{6}\right]$. Следовательно, $E_f=\left[-2;\sqrt{3}+\dfrac{7\pi}{6}\right]$

Ответ: $E_f=\left[-2;\sqrt{3}+\dfrac{7\pi}{6}\right]$.

7. Две окружности касаются друг друга и сторон треугольника ABC. Первая окружность радиуса $\frac{1}{18}$ касается сторон AB и AC в точках L и K, вторая окружность радиуса $\frac{2}{9}$ касается сторон AC и BC в точках N и M. Найдите площадь треугольника ABC, если $AL=\frac{1}{9}$, $CM=\frac{1}{6}$.

Решение:

$a=\frac{1}{9}$, $b=\frac{1}{6}$, $r=\frac{1}{18}$, $R=\frac{2}{9}$, $KN=2\sqrt{rR}=\frac{2}{9}$, $AC=a+KN+b=\frac{1}{2}$

$tg\frac{A}{2}=\frac{r}{a}$, $tg\frac{C}{2}=\frac{R}{b}$,

$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{a^2}{a^2+r^2}$, $\cos^2\frac{C}{2}=\frac{b^2}{b^2+R^2}$,

$\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}-1=\frac{2a^2}{a^2+r^2}-1=\frac{a^2-r^2}{a^2+r^2}=\frac{3}{5}$,

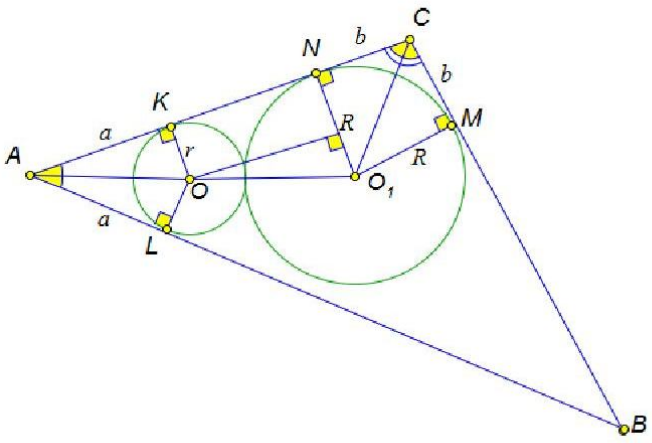
$\cos C=2\cos^2\frac{C}{2}-1=\frac{2b^2}{b^2+R^2}-1=\frac{b^2-R^2}{b^2+R^2}=-\frac{7}{25}$, $\sin A=\frac{2ar}{a^2+r^2}=\frac{4}{5}$,

$\sin C=\frac{2bR}{b^2+R^2}=\frac{24}{25}$, $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\frac{44}{125}$.

Теорема синусов: $\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}$.

$AB=\frac{AC\sin C}{\sin B}$, $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A=\frac{AC^2\sin A\sin C}{2\sin B}=\frac{4\cdot 24\cdot 125}{8\cdot 5\cdot 25\cdot 44}=\frac{3}{11}$.

Ответ: $\frac{3}{11}$.



8. Стороны треугольника ΔABC лежат на касательных к графику функции $y=0,25x^2-x+4$; две из них проходят через точку $A(4;3)$, а точка касания графика с третьей касательной лежит на стороне BC. Какую наибольшую площадь может иметь ΔABC?

$y=0,25x^2-x+4;\quad A(4;3)$.

Уравнение касательной к графику функции:

$y=\frac{1}{4}x_0^2-x_0+4+\frac{x_0-2}{2}\cdot(x-x_0)$, или

$y=-\frac{1}{4}x_0^2+4+\frac{x_0-2}{2}\cdot x$.

Для касательных, проходящих через точку A,

$3=-\frac{1}{4}x_0^2+4+\frac{x_0-2}{2}\cdot 4$. Отсюда

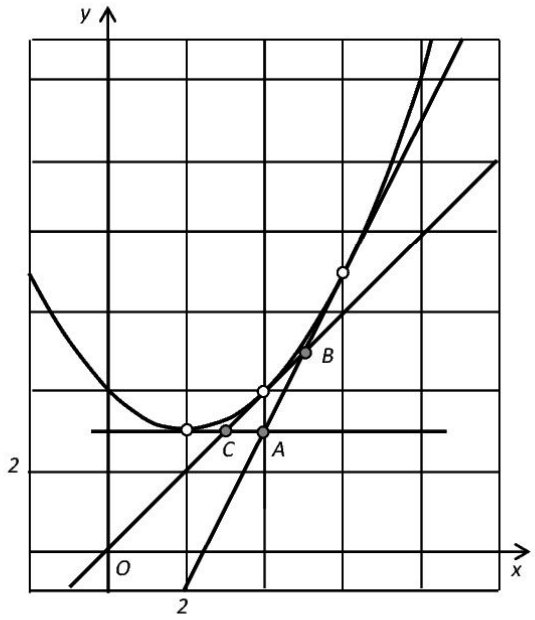
$x_0^2-8x_0+12=0$, $x_0=4\pm 2=\left[\begin{array}{l}2,\\6.\end{array}\right.$

Уравнения касательных, проходящих через точку A: 1) $y=3$; 2). $y=2x-5$

Уравнение прямой CB:

$y=-\frac{1}{4}x_*^2+4+\frac{x_*-2}{2}\cdot x$,

где x_* – абсцисса точки касания с графиком функции.



В точке $C(y_C;x_C)$ $y_C=3$. Тогда

$3=-\frac{1}{4}x_*^2+4+\frac{x_*-2}{2}\cdot x_C$. Отсюда $x_C=\frac{0,25x_*^2-1}{x_*-2}\cdot 2=\frac{x_*+2}{2}$.

В точке $B(x_B;y_B)$ $-\frac{1}{4}x_*^2+4+\frac{x_*-2}{2}\cdot x_B=2x_B-5$, $\frac{x_*-6}{2}\cdot x_B=\frac{x_*^2-36}{4}$, $x_B=\frac{x_*+6}{2}$.

$y_B-2x_B-5-x_*+1$. Площадь треугольника ABC равна

$S_{\Delta ABC}=0,5\cdot(x_A-x_C)\cdot(y_B-y_A)=\frac{1}{2}\cdot\left(4-\frac{x_*+2}{2}\right)\cdot(x_*+1-3)=\frac{1}{4}\left(-12+8x_*-x_*^2\right)=S(x_*)$.

$S'(x_*)=0,25(8-2x_*)=0$ при $x_*=4$. $\max S_{\Delta ABC}=S(4)=0,25\cdot(-12+8\cdot 4-16)=1$.

Ответ: 1 *ед*^{2}.

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$3(x-a)^2+y=2-a,\quad y^2+\left(\frac{x-2}{|x|-2}\right)^2=1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

Решение. Преобразуем второе уравнение:

$$y^2=\frac{x^2-4|x|+4-x^2+4x-4}{(|x|-2)^2};\ y^2=-\frac{4(|x|-x)}{(|x|-2)^2}.$$

При $x<0$ уравнение решений не имеет, так как правая часть меньше нуля; при $x\ge 0$ оно равносильно системе: $x\ge 0,\ x\ne 2,\ y=0$. Подставляя $y=0$ в первое уравнение, получаем; $3(x-a)^2=2-a$, или $3x^2-6ax+3a^2+a-2=0$ (*), у которого $D/4=9a^2-9a^2-3a+6=6-3a$.

Корень $x=2$ квадратного уравнения может получиться, когда $3(2-a)^2=2-a$, т.е. если 1) $a=2$, уравнение имеет вид $(x-2)^2=0$, тогда этот корень единственный и заданная система решений не имеет, или 2) $3(2-a)=1$, т.е. $a=5/3$, тогда для x получаем уравнение $3(x-5/3)^2=2-5/3,\ x=5/3\pm 1/3$, у которого, кроме постороннего корня $x_1=2$, есть еще один корень $x_2=4/3$, удовлетворяющий условиям, и заданная система имеет единственное решение $(4/3;0)$.

Рассмотрим остальные случаи, когда решение системы будет единственным.

1. $\begin{cases} D/4=6-3a=0, \\ a>0,\quad a\ne 2. \end{cases}$ Система решений не имеет.

2. $3a^2+a-2<0$, т.е. при $-1<a<2/3$ $x=\left(3a+\sqrt{6-3a}\right)/3$.

3. $3a^2+a-2=0$, отсюда $a=2/3$, $3x^2-4x=0$, $x_1=0$, $x_2=4/3$ удовлетворяют условиям, или $a=-1$, $3x^2+6x=0$, $x_1=0$, $x_2=-2$ –посторонний корень.

Рассмотрим случаи, когда система будет иметь два различных решения. Квадратное уравнение (*) будет иметь два различных неотрицательных корня $x_{1,2}=\left(3a\pm\sqrt{6-3a}\right)/3$, если

$$\begin{cases} 6-3a>0, \\ a>0, \\ 3a^2+a-2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a<2, \\ \left[\begin{array}{l} a\le -1, \\ a\ge 2/3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 2/3\le a<2.$$ Из этого промежутка надо убрать рассмотренную ранее точку $a=5/3$. Объединяя найденные значения a, получим ответ.

Ответ: $a\in[-1;2/3),\ x=\left(3a+\sqrt{6-3a}\right)/3,\ y=0;$

$a\in[2/3;5/3)\cup(5/3;2),\ x_{1,2}=\left(3a\pm\sqrt{6-3a}\right)/3,\ y=0;$

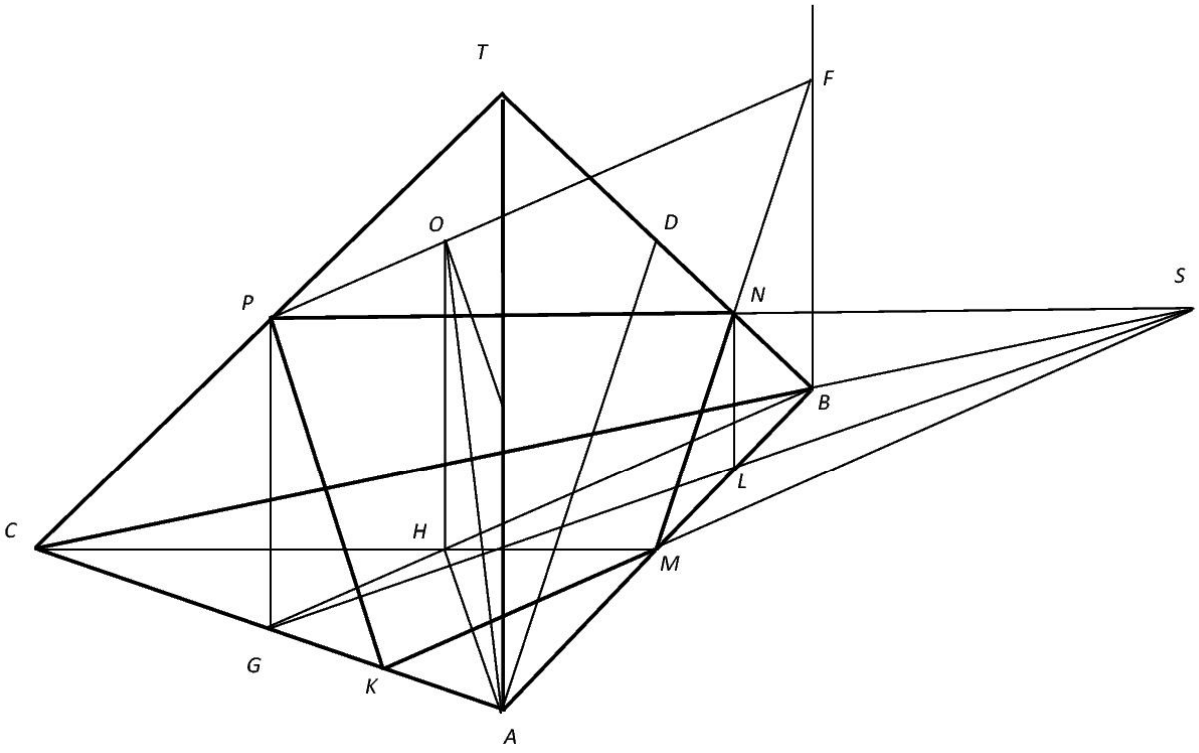
$a=5/3,\ x=4/3,\ y=0.$

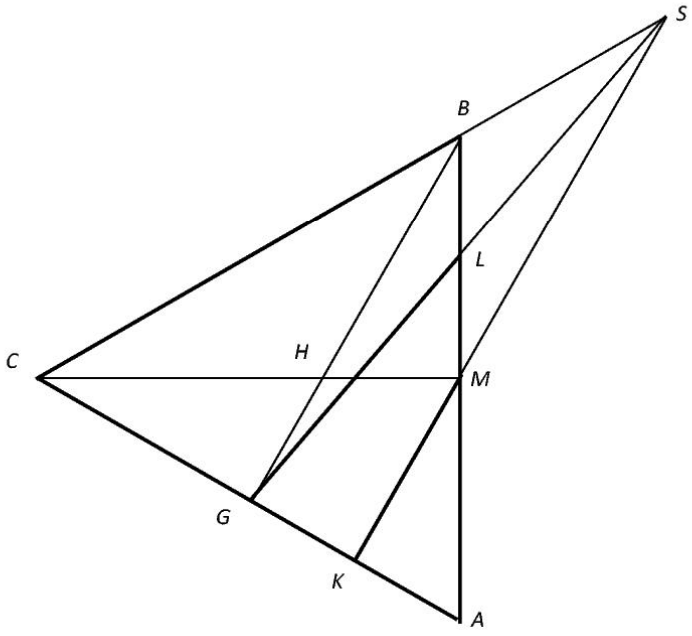
10. Основанием пирамиды $TABC$ служит равносторонний треугольник ABC, а высота пирамиды, равная $\sqrt{2}$, совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной медиане AD боковой грани TAB и проходящей через середину стороны основания AB и центр сферы радиуса $\sqrt{11/6}$, описанной около пирамиды.

Решение: Центр сферы O лежит на перпендикуляре к плоскости основания, проведенном через центр основания H; $OH = AT/2$. Через вершину B проведем прямую $BE||AT$. Через середину стороны AB точку M проведем прямую $MN||AD$, $N \in TB$, $TB = 4NB$, и продолжим ее до пересечения с BE в точке F. Очевидно, MF лежит в секущей плоскости и $BF = AT/2$. Прямая FO лежит в секущей плоскости, она параллельна медиане основания BG и пересекает боковое ребро TC в его середине – точке P. Проведем $MK||BG, K \in AC$; MK – линия пересечения секущей плоскости с основанием пирамиды. Значит, $MNPK$ – искомое сечение. Пусть S – точка пересечения прямых MK и NP; очевидно $S \in (BC)$. Из того, что $\Delta PSG \sim \Delta NSL$ и $NL = 1/2\,PG$, следует $NS = \frac{1}{2}PS$. Кроме того, $MS = \frac{2}{3}KS$. Тогда площадь треугольника MSN $S_{\Delta MSN} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}S_{\Delta KSP} = \frac{1}{3}S_{\Delta KSP}$, а площадь сечения $S_{MNPK} = \frac{2}{3}S_{\Delta KSP}$.

Обозначим $AB = a$, $TA = h$, $OA = R$. В ΔAOH $OH = h/2$, $AH = a/\sqrt{3}$. Так как $OA^2 = OH^2 + AH^2$, $R^2 = (h/2)^2 + \left(a/\sqrt{3}\right)^2$, $a = \sqrt{3}\sqrt{R^2 - (h/2)^2}$. Заметим, что $PK \perp KS$, так как $KM \perp AC$, тогда $S_{\Delta KSP} = \frac{1}{2}KS \cdot PK$. Так как $KS = \frac{3}{2}BG$, $KS = \frac{3\sqrt{3}\,a}{4}$. В треугольнике PKG $PK = \sqrt{GK^2 + PG^2} = \sqrt{(a/4)^2 + (h/2)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{a^2 + 4h^2}$. Площадь треугольника $S_{\Delta KSP} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}\,a}{4}\cdot\frac{\sqrt{a^2+4h^2}}{4} = \frac{3\sqrt{3}\,a\sqrt{a^2+4h^2}}{32}$. Площадь сечения $S_{MNPK} = \frac{2}{3}S_{\Delta FMN} = \frac{\sqrt{3}a\sqrt{a^2+4h^2}}{16}$.

Ответ: $R = \sqrt{\frac{11}{6}}, h = \sqrt{2}, a = \sqrt{3\left(\frac{11}{6} - \frac{1}{2}\right)} = 2$, $S = \frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{4\cdot 2 + 4}}{16} = \frac{3}{4}$.


T
F
O
D
S
P
N
B
L
C
H
M
G
K
A


S
B
L
C
H
M
G
K
A

Заключительный этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету

«Математика» в 2014 г.

Вариант № 15

1. Васе и Пете, участвующим в школьной спортивно-развлекательной игре, необходимо, имея на двоих лишь одну пару роликов, как можно быстрее преодолеть дистанцию в 3,5 км. Они стартуют одновременно, один просто бежит, другой бежит на роликах. В любой момент времени бегущий на роликах может оставить их своему товарищу и продолжить бег без них. Такой обмен можно провести сколько угодно раз. Найдите минимальное время прохождения дистанции друзьями (определяется по последнему прибежавшему), если скорости Васи при простом беге и беге на роликах равны 3 км/ч и 9 км/ч, а Пети – 4 км/ч и 12 км/ч. Считать, что при переходе на ролики и обратно время не теряется. (8 баллов)

2. Решите уравнение $(\log_2 x)\cdot\log_{27}(4x)=\log_3 2$. (8 баллов)

3. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии S_3 относится к сумме первых двух членов S_2 как $21:20$, а сумма первого и третьего членов равна 17. Найдите первый член и знаменатель прогрессии и определите, в каких пределах может изменяться сумма n членов прогрессии S_n. (8 баллов)

4. Найдите все удовлетворяющие условию $|x|+|y|\le 8$ решения уравнения $\left(\sin^8(x/4)-\cos^8(x/4)\right)(5-\cos 4y-4\cos 2y)=\cos^2(x/2)+\cos(x/2)$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{(9^x-12\cdot 3^x+27)(\sqrt{x+5}-x+1)}{\log_3 x\cdot\log_4(6-x)}\le 0.$ (10 баллов)

6. Для функции $f(x)=g(g(x))+(7-\pi)g(x)-2+(\pi/2)$ найдите множество значений при $x\in[0;\ 0{,}5]$, где $g(x)=2\sin\pi x-7x+2$. (10 баллов)

7. Две окружности внешним образом касаются друг друга и сторон треугольника ABC. Первая окружность радиуса $2/3$ касается сторон AB и AC в точках L и K, вторая окружность радиуса $1/6$ касается сторон AC и BC в точках N и M. Найдите площадь треугольника ABC, если $AL=1$, $CM=1/3$. (12 баллов)

8. Стороны треугольника ΔABC лежат на касательных к графику функции $y=-0{,}25x^2+2x-1$; две из них проходят через точку $A(2;3)$, а точка касания графика с третьей касательной лежит на стороне BC. Какую наибольшую площадь может иметь ΔABC? (12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений $2(x-a)^2+y=10-a,\ y^2+\left((x-10)/(|x|-10)\right)^2=1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (12 баллов)

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит равносторонний треугольник ABC, а высота пирамиды, равная 2, совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной медиане AD боковой грани TAB и проходящей через середину стороны основания AB и центр сферы радиуса $\sqrt{17}$, описанной около пирамиды. (12 баллов)

Решение варианта №15

1. Васе и Пете, участвующим в школьной спортивно-развлекательной игре, необходимо, имея на двоих лишь одну пару роликов, как можно быстрее преодолеть дистанцию в 3,5 км. Они стартуют одновременно, один просто бежит, другой бежит на роликах. В любой момент времени бегущий на роликах может оставить их своему товарищу и продолжить бег без них. Такой обмен можно провести сколько угодно раз. Найдите минимальное время прохождения дистанции друзьями (определяется по последнему прибежавшему), если скорости Васи при простом беге и беге на роликах равны 3 км/ч и 9 км/ч, а Пети – 4 км/ч и 12 км/ч. Считать, что при переходе на ролики и обратно время не теряется.

Решение: Вся дистанция делится на несколько этапов, которые один из школьников бежит без роликов, другой на роликах. Пусть x – сумма длин этапов, которые Вася пробегает на роликах, t_1 – время, затраченное им на пробег всей дистанции, а t_2 – время, которое затрачивает Петя на пробег всей дистанции, тогда $t_1 = \frac{x}{12} + \frac{3,5-x}{4} = \frac{10,5-2x}{12}$ и $t_2 = \frac{3,5-x}{9} + \frac{x}{3} = \frac{3,5+2x}{9}$. Отметим, что функция $t_1(x)$ убывающая, а функция $t_2(x)$ возрастающая. Укажем значение x, при котором $t_1 = t_2$, то есть, бегуны закончили бы пробег одновременно. Из $\frac{10,5-2x}{12} = \frac{2x+3,5}{9} \Rightarrow x = \frac{5}{4}$, $t_1 = t_2 = \frac{2}{3}$ часа. Если $x < 5/4$, то $t_1(x) > \frac{2}{3} > t_2(x)$, если $x > 5/4$, то $t_1(x) < \frac{2}{3} < t_2(x)$. Следовательно, минимальное время прохождения дистанции друзьями (по последнему прибежавшему), равно 2/3 часа.
Ответ: 2/3 ч.

2. Решите уравнение $(\log_2 x)\cdot \log_{27}(4x) = \log_3 2$.

Решение: $(\log_2 x)\cdot \log_{27}(4x) = \log_3 2$; $\frac{\log_2(4x)}{3\log_2 3}\cdot \log_2 x = \frac{1}{\log_2 3}$;

$(2+\log_2 x)\log_2 x = 3$; $\log_2^2 x + 2\log_2 x - 3 = 0$.

1) $\log_2 x = -3$, $x = 1/8$, 2) $\log_2 x = 1$, $x = 2$. Ответ: $\{1/8;2\}$.

3. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии S_3 относится к сумме первых двух членов S_2 как $21:20$, а сумма первого и третьего членов равна 17. Найдите первый член и знаменатель прогрессии и определите, в каких пределах может изменяться сумма n членов прогрессии S_n.

Решение:

$\frac{S_3}{S_2} = \frac{a(1+q+q^2)}{a(1+q)} = \frac{21}{20}$. $20q^2 + 20q + 20 = 21q + 21$; $20q^2 - q - 1 = 0$;

$q = \frac{1\pm\sqrt{1+80}}{40} = \frac{1\pm 9}{40} = \left[\begin{array}{l} 1/4, \\ -1/5. \end{array}\right.$ Возможны два решения.

1) Если $q = \frac{1}{4}$, из условия $a(1+q^2) = 17 \Rightarrow a = 16$.

$S_n = 16\dfrac{1-(1/4)^n}{1-1/4} = \dfrac{64}{3}\left(1-(1/4)^n\right);\ 16 \le S_n < \dfrac{64}{3}.$

2) Если $q = -\dfrac{1}{5},\ a\left(1+\dfrac{1}{25}\right) = 17,\ a = \dfrac{25\cdot 17}{26} = \dfrac{425}{26}.$

Так как $q<0, |q|<1,\ S_2 \le S_n \le S_1.\ \dfrac{425}{26}\left(1-\dfrac{1}{5}\right) \le S_n \le \dfrac{425}{26},\ \dfrac{340}{26} \le S_n \le \dfrac{425}{26}.$

Ответ: 1) $q = \dfrac{1}{4},\ a = 16,\ 16 \le S_n < \dfrac{64}{3}$; 2) $q = -\frac{1}{5},\ a = \frac{425}{26},\ \frac{340}{26} \le S_n \le \frac{425}{26}.$

4. Найдите все решения уравнения
$\left(\sin^8\dfrac{x}{4} - \cos^8\dfrac{x}{4}\right)(5-\cos 4y - 4\cos 2y) = \cos^2\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}$, удовлетворяющие условию $|x|+|y| \le 8.$

Решение: После равносильных преобразований имеем

$\left(\cos^4\dfrac{x}{4} - \sin^4\dfrac{x}{4}\right)\left(\sin^4\dfrac{x}{4} + \cos^4\dfrac{x}{4}\right)\left(2\cos^2 2y + 4\cos 2y - 6\right) = \cos^2\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2} \quad \Leftrightarrow$

$\left(\cos^2\dfrac{x}{4} - \sin^2\dfrac{x}{4}\right)\left(\sin^4\dfrac{x}{4} + \cos^4\dfrac{x}{4}\right)\left(2\cos^2 2y + 4\cos 2y - 6\right) = \cos\dfrac{x}{2}\left(1+\cos\dfrac{x}{2}\right) \quad \Leftrightarrow$

$\cos\dfrac{x}{2}\left(\sin^4\dfrac{x}{4} + \cos^4\dfrac{x}{4}\right)\left(\cos^2 2y + 2\cos 2y - 3\right) = \cos\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{4}$

1) $\cos\dfrac{x}{2} = 0,\quad y \in R \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$ Выберем решения, удовлетворяющие условию $|x|+|y| \le 8$: $x = \pi,\ x = -\pi,\ |y| \le 8-\pi$. В итоге имеем
$(\pm\pi;\ y),\quad y \in [\pi - 8; 8-\pi].$

2) $\left(\sin^4\dfrac{x}{4} + \cos^4\dfrac{x}{4}\right)\left((\cos 2y+1)^2 - 4\right) = \cos^2\dfrac{x}{4}$

Так как $\sin^4\dfrac{x}{4} + \cos^4\dfrac{x}{4} > 0, \cos^2\dfrac{x}{4} \ge 0$ для любых $x \in R$, то $(\cos 2y+1)^2 \ge 4$, или $\cos 2y \ge 1$. Откуда получаем $\cos 2y = 1,\ \cos\dfrac{x}{4} = 0$, или $x = 2\pi + 4\pi n,\ y = \pi k,\ n,k \in Z$.
Поскольку $x \in [-8;8]$, то $n = 0; -1$. Тогда $2\pi - 8 \le \pi k \le 8 - 2\pi$, и $k = 0$. В итоге имеем решения: $(2\pi;\ 0),\ (-2\pi;\ 0)$.

Ответ: $(\pm\pi;\ y),\quad y \in [\pi - 8; 8-\pi];\ (2\pi;\ 0),\ (-2\pi;\ 0).$

5. Решите неравенство $\dfrac{(9^x - 12\cdot 3^x + 27)(\sqrt{x+5} - x + 1)}{\log_3 x \cdot \log_4 (6-x)} \le 0.$

Решение:

ОДЗ: $x+5 \ge 0,\quad x > 0,\ 6-x > 0,\ x \ne 1,\ x \ne 5 \ \Rightarrow\ \ x \in (0;1) \cup (1;5) \cup (5;6).$

Имеем $\dfrac{(3^x - 9)(3^x - 3)(\sqrt{x+5} - x + 1)}{(\log_3 x - \log_3 1)(\log_4 (6-x) - \log_4 1)} \le 0.$

На ОДЗ исходное неравенство эквивалентно следующему

$$\frac{(x-2)(x-1)(\sqrt{x+5}-(x-1))}{(x-1)(5-x)}\le 0 \;\Rightarrow \frac{(x-2)(\sqrt{x+5}-(x-1))}{(5-x)}\le 0.$$

Если $x\in(0;1)$, то $x-1<0 \;\Rightarrow\; \sqrt{x+5}-(x-1)>0$. Следовательно, приходим к неравенству $\frac{(x-2)}{(5-x)}\le 0$, и $x\in(0;1)$.

Если $x\in(1;5)\cup(5;6)$ то приходим к неравенству $\frac{(x-2)(x+5-(x-1)^2)}{(5-x)}\le 0$, и

$\frac{(x-2)(x+1)(x-4)}{(x-5)}\le 0 \Rightarrow\; x\in(1;2]\cup[4;5)$.

Окончательно имеем $x\in(0;1)\cup(1;2]\cup[4;5)$.

Ответ: $x\in(0;1)\cup(1;2]\cup[4;5)$.

6. Найдите множество значений функции $f(x)=g(g(x))+(7-\pi)g(x)-2+\frac{\pi}{2}$ при $x\in[0;0{,}5]$, где $g(x)=2\sin\pi x-7x+2$. (10 баллов)

Решение: Исследуем функцию $g(x)$ на монотонность. Так как $g'(x)=2\pi\cos\pi x-7<0$ для всех $x\in R$, то функция $g(x)$ убывает на отрезке $[0;0{,}5]$ и ее множество значений на этом отрезке совпадает с отрезком $[g(0{,}5);\,g(0)]=[0{,}5;\,2]$. Множество значений E_f функции $f(x)=g(g(x))+(7-\pi)g(x)-2+\frac{\pi}{2}$ на отрезке $[0;0{,}5]$ совпадает с множеством значений E_φ функции $\varphi(t)=g(t)+(7-\pi)t-2+\frac{\pi}{2}$ на отрезке $[0{,}5;\,2]$. Найдем E_φ. Функция $\varphi(t)=2\sin\pi t-\pi t+\frac{\pi}{2}$ имеет производную $\varphi'(t)=2\pi\cos\pi t-\pi$. Тогда $\varphi'(t)=0$ в том случае, если $\cos\pi t=0{,}5$, т.е. при $t=\frac{1}{3}+2k$ или $t=-\frac{1}{3}+2k$, $k\in Z$. Из точек, при которых $\varphi'(t)=0$, в отрезок $[0{,}5;\,2]$ попадает только точка $t=\frac{5}{3}$. Вычислим значения функции φ в точках $t=0{,}5,\ t=\frac{5}{3},\ t=2$:

$$\varphi(0{,}5)=2;\;\; \varphi(5/3)=-\sqrt{3}-\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=-\sqrt{3}-\frac{7\pi}{6};\;\; \varphi(2)=-1{,}5\pi.$$

Так как $\sqrt{3}+\frac{7\pi}{6}>1{,}5\pi$, то $E_\varphi=\left[-\sqrt{3}-\frac{7\pi}{6};\,2\right]$. Следовательно, $E_f=\left[-\sqrt{3}-\frac{7\pi}{6};\,2\right]$.

Ответ: $E_f=\left[-\sqrt{3}-\frac{7\pi}{6};\,2\right]$.

7. Две окружности внешним образом касаются друг друга и сторон треугольника ABC. Первая окружность радиуса $\frac{2}{3}$ касается сторон AB и AC в точках L и K, вторая окружность радиуса $\frac{1}{6}$ касается сторон AC и BC в точках N и M. Найдите площадь треугольника ABC, если $AL=1$, $CM=\frac{1}{3}$.

Решение:

$a=1,\quad b=\frac{1}{3},\quad r=\frac{2}{3},\quad R=\frac{1}{6},\quad KN=2\sqrt{rR}=\frac{2}{3},\quad AC=a+KN+b=2$

$tg\frac{A}{2}=\frac{r}{a},\quad tg\frac{C}{2}=\frac{R}{b},$

$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{a^2}{a^2+r^2},\quad \cos^2\frac{C}{2}=\frac{b^2}{b^2+R^2},$

$\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}-1=\frac{2a^2}{a^2+r^2}-1=\frac{a^2-r^2}{a^2+r^2}=\frac{5}{13},$

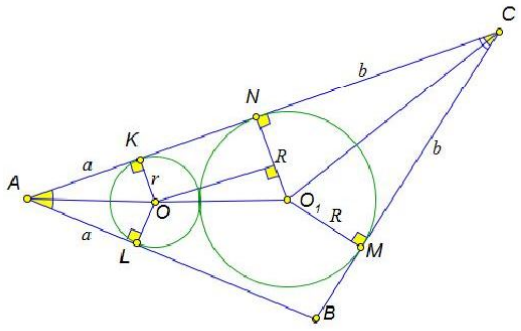
$\cos C=2\cos^2\frac{C}{2}-1=\frac{2b^2}{b^2+R^2}-1=\frac{b^2-R^2}{b^2+R^2}=\frac{3}{5},\quad \sin A=\frac{2ar}{a^2+r^2}=\frac{12}{13},$

$\sin C=\frac{2bR}{b^2+R^2}=\frac{4}{5},\quad \sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\frac{56}{65}.$

Теорема синусов: $\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}.$

$AB=\frac{AC\sin C}{\sin B},\quad S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A=\frac{AC^2\sin A\sin C}{2\sin B}=\frac{4\cdot12\cdot4\cdot65}{2\cdot13\cdot5\cdot56}=\frac{12}{7}.$

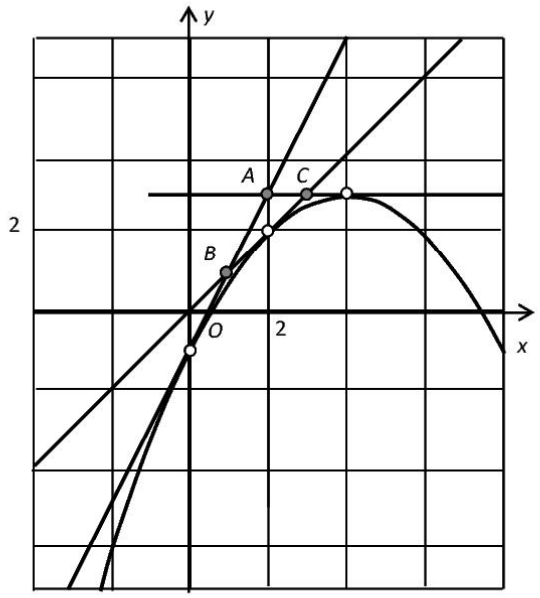
Ответ: $\frac{12}{7}$.



8. Стороны треугольника ΔABC лежат на касательных к графику функции $y=-0,25x^2+2x-1$; две из них проходят через точку $A(2;3)$, а точка касания графика с третьей касательной лежит на стороне BC. Какую наибольшую площадь может иметь ΔABC?

Решение:

$y=-0,25x^2+2x-1;\quad A(2;3)$.



Уравнение касательной к графику функции:

$$y=-\frac{1}{4}x_0^2+2x_0-1+\frac{4-x_0}{2}\cdot(x-x_0),$$

или

$$y=\frac{1}{4}x_0^2-1+\frac{4-x_0}{2}\cdot x.$$

Для касательных, проходящих через точку A,

$3=\frac{1}{4}x_0^2-1+\frac{4-x_0}{2}\cdot 2$. Отсюда

$x_0^2-4x_0=0,\ x_0=\left[\begin{array}{l}4,\\0.\end{array}\right.$ Уравнения касательных, проходящих через точку A: 1) $y=3$; 2). $y=2x-1$

Уравнение прямой CB:

$$y=\frac{1}{4}x_*^2-1+\frac{4-x_*}{2}\cdot x,$$

где x_* – абсцисса точки касания с графиком функции.

В точке $C(y_C;x_C)$ $y_C=3$. Тогда $3=\frac{1}{4}x_*^2-1+\frac{4-x_*}{2}\cdot x_C$. Отсюда

$$x_C=\frac{0,25x_*^2-4}{x_*-4}\cdot 2=\frac{x_*+4}{2}.$$

В точке $B(x_B;y_B)$ $\frac{1}{4}x_*^2-1+\frac{4-x_*}{2}\cdot x_B=2x_B-1,\ x_B=\frac{x_*}{2},\ y_B=2\frac{x_B}{2}-1=x_*-1.$

Площадь треугольника ABC равна

$$S_{\Delta ABC}=0,5\cdot(x_C-x_A)\cdot(y_A-y_B)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x_*+4}{2}-2\right)\cdot(3+1-x_*)=\frac{1}{4}\left(4x_*-x_*^2\right)=S(x_*).$$

$S'(x_*)=0,25(4-2x_*)=0$ при $x_*=2$. $\max S_{\Delta ABC}=S(2)=0,25\cdot(8-4)=1$.

Ответ: 1 $ед^2$.

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$2(x-a)^2+y=10-a,\quad y^2+\left(\frac{x-10}{|x|-10}\right)^2=1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

Решение: Преобразуем второе уравнение:

$$y^2=\frac{x^2-20|x|+100-x^2+20x-100}{(|x|-10)^2};\ \ y^2=-\frac{20(|x|-x)}{(|x|-10)^2}.$$

При $x<0$ уравнение решений не имеет, так как правая часть меньше нуля; при $x\ge 0$ оно равносильно системе: $x\ge 0,\ x\ne 10,\ y=0$. Подставляя $y=0$ в первое уравнение, получаем; $2(x-a)^2=10-a$, или $2x^2-4ax+2a^2+a-10=0$ (*), у которого $D/4=4a^2-4a^2-2a+20=20-2a$.

Корень $x=10$ квадратного уравнения может получиться, когда $2(10-a)^2=10-a$, т.е. если 1) $a=10$, уравнение имеет вид $(x-10)^2=0$, тогда этот корень единственный и заданная система решений не имеет, или 2) $2(10-a)=1$, т.е. $a=19/2$, тогда для x получаем уравнение $2(x-19/2)^2=10-19/2$, $x=19/2\pm 1/2$, у которого, кроме постороннего корня $x_1=10$, есть еще один корень $x_2=9$, удовлетворяющий условиям, и заданная система имеет единственное решение $(9;0)$.

Рассмотрим остальные случаи, когда решение системы будет единственным.

1. $\begin{cases} D/4=20-2a=0, \\ a>0,\quad a\ne 10. \end{cases}$ Система решений не имеет.

2. $2a^2+a-10<0$, т.е. при $-5/2<a<2$ $x=\left(2a+\sqrt{20-2a}\right)/2$.

3. $2a^2+a-10=0$, отсюда $a=2$, $2x^2-8x=0$, $x_1=0$, $x_2=4$ удовлетворяют условиям, или $a=-5/2$, $2x^2+10x=0$, $x_1=0,\ x_2=-5$ –посторонний корень.

Рассмотрим случаи, когда система будет иметь два различных решения. Квадратное уравнение (*) будет иметь два различных неотрицательных корня $x_{1,2}=\left(2a\pm\sqrt{20-2a}\right)/2$, если

$$\begin{cases} 20-2a>0, \\ a>0, \\ 2a^2+a-10\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 0<a<10, \\ \left[\begin{array}{l} a\le -5/2, \\ a\ge 2 \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow 2\le a<10.$$ Из этого промежутка надо убрать

рассмотренную ранее точку $a=19/2$. Объединяя найденные значения a, получим ответ.

Ответ: $a\in[-5/2;2),\ x=\left(2a+\sqrt{20-2a}\right)/2,\ y=0;$

$a\in[2;19/2)\cup(19/2;10),\ x_{1,2}=\left(2a\pm\sqrt{20-2a}\right)/2,\ y=0;$

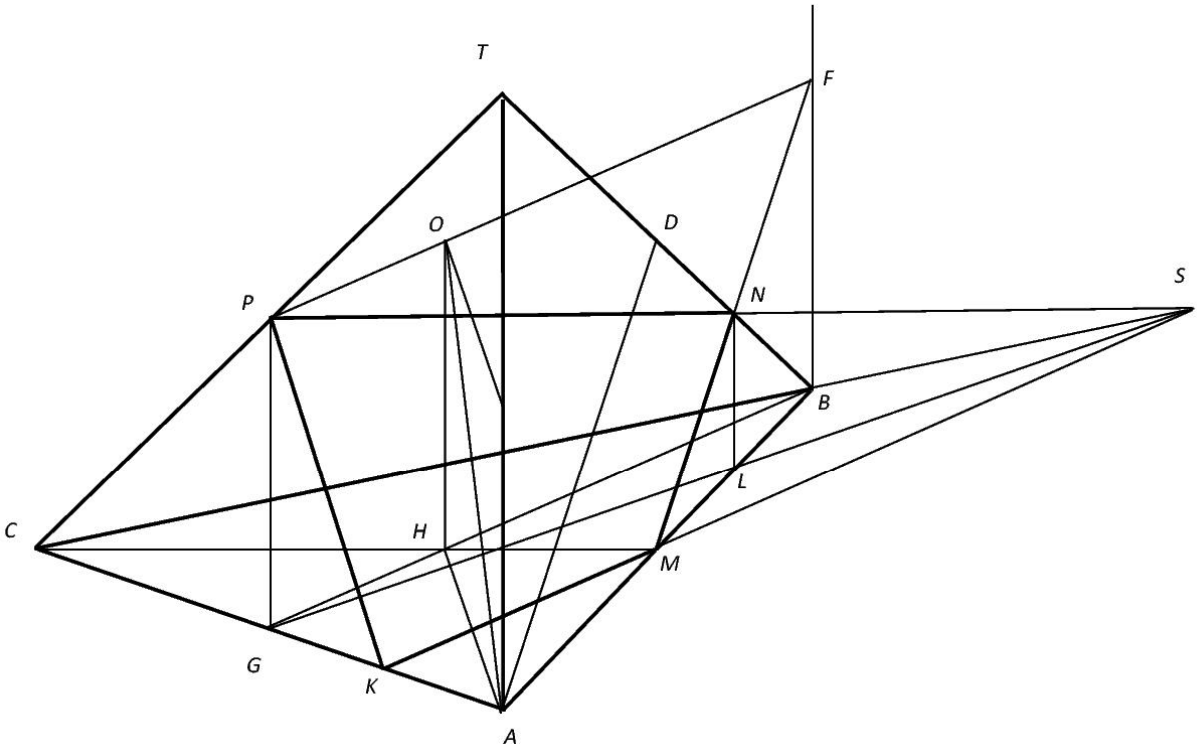
$a=19/2,\ x=9,\ y=0.$

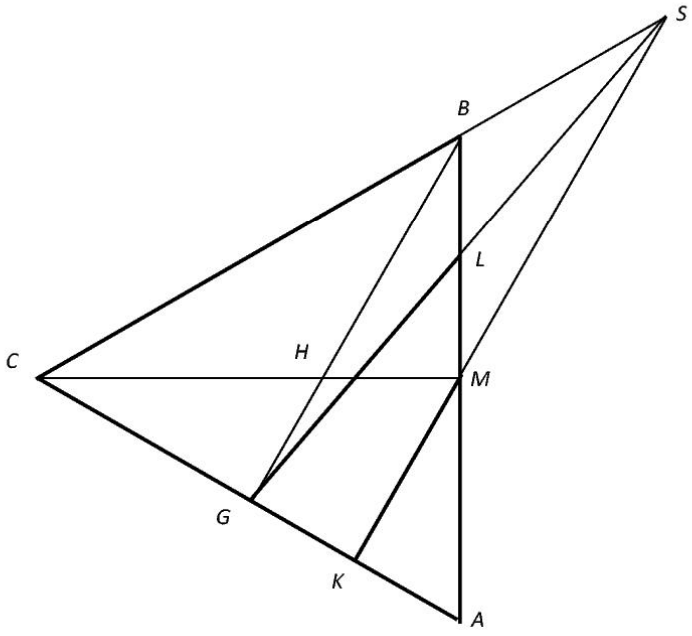
10. Основанием пирамиды $TABC$ служит равносторонний треугольник ABC, а высота пирамиды, равная 2, совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной медиане AD боковой грани TAB и проходящей через середину стороны основания AB и центр сферы радиуса $\sqrt{17}$, описанной около пирамиды.

Решение: Центр сферы O лежит на перпендикуляре к плоскости основания, проведенном через центр основания H; $OH = AT/2$. Через вершину B проведем прямую $BE||AT$. Через середину стороны AB точку M проведем прямую $MN||AD$, $N \in TB$, $TB = 4NB$, и продолжим ее до пересечения с BE в точке F. Очевидно, MF лежит в секущей плоскости и $BF = AT/2$. Прямая FO лежит в секущей плоскости, она параллельна медиане основания BG и пересекает боковое ребро TC в его середине – точке P. Проведем $MK||BG, K \in AC$; MK – линия пересечения секущей плоскости с основанием пирамиды. Значит, $MNPK$ – искомое сечение. Пусть S – точка пересечения прямых MK и NP; очевидно $S \in (BC)$. Из того, что $\Delta PSG \sim \Delta NSL$ и $NL = 1/2\,PG$, следует $NS = \frac{1}{2}PS$. Кроме того, $MS = \frac{2}{3}KS$. Тогда площадь треугольника MSN $S_{\Delta MSN} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}S_{\Delta KSP} = \frac{1}{3}S_{\Delta KSP}$, а площадь сечения $S_{MNPK} = \frac{2}{3}S_{\Delta KSP}$.

Обозначим $AB = a$, $TA = h$, $OA = R$. В ΔAOH $OH = h/2$, $AH = a/\sqrt{3}$. Так как $OA^2 = OH^2 + AH^2$, $R^2 = (h/2)^2 + \left(a/\sqrt{3}\right)^2$, $a = \sqrt{3}\sqrt{R^2 - (h/2)^2}$. Заметим, что $PK \perp KS$, так как $KM \perp AC$, тогда $S_{\Delta KSP} = \frac{1}{2}KS \cdot PK$. Так как $KS = \frac{3}{2}BG$, $KS = \frac{3\sqrt{3}\,a}{4}$. В треугольнике PKG $PK = \sqrt{GK^2 + PG^2} = \sqrt{(a/4)^2 + (h/2)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{a^2 + 4h^2}$. Площадь треугольника $S_{\Delta KSP} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}\,a}{4}\cdot\frac{\sqrt{a^2+4h^2}}{4} = \frac{3\sqrt{3}\,a\sqrt{a^2+4h^2}}{32}$. Площадь сечения $S_{MNPK} = \frac{2}{3}S_{\Delta FMN} = \frac{\sqrt{3}a\sqrt{a^2+4h^2}}{16}$.

Ответ: $R = \sqrt{17}, h = 2, a = \sqrt{3(17-1)} = 4\sqrt{3}$, $S = \frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\sqrt{16\cdot 3 + 4\cdot 4}}{16} = 6$.


T
F
O
D
S
P
N
B
L
C
H
M
G
K
A


S
B
L
C
H
M
G
K
A

Первый (отборочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика», осень 2013 г.

Вариант № 1

1. Двое рабочих одновременно приступили к изготовлению одинаковых партий деталей. Когда первый рабочий сделал половину деталей, второму оставалось изготовить 24 детали, а когда второй выполнил половину работы, первому оставалось сделать 15 деталей. Сколько деталей осталось изготовить второму рабочему, когда первый выполнил свою работу? (8 баллов)

2. Решите уравнение $2^x - 6\cdot 2^{1-x} = 1$. (8 баллов)

3. Какое наибольшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_{17} = 52$, $a_{30} = 13$? (8 баллов)

4. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos\dfrac{\pi y}{8} = \sqrt{1+2\cos^2\dfrac{\pi y}{8}\cos\dfrac{\pi x}{4} - \cos\dfrac{\pi x}{4}}, \\ |x|+|y-4|\le 4, \quad y < x+2. \end{cases}$$ (8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{4-2x}}{2x+5-2\sqrt{x^2+5x+6}} \le 0$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x) = g(g^2(x))$, где $g(x) = 3/\left(x^2-4x+5\right)$. (10 баллов)

7. В прямоугольную трапецию $ABCD$ с углом A, равным $2\arccos(15/17)$, вписана окружность. Вторая окружность с радиусом 10,8 касается сторон AB и AD трапеции и вписанной в нее окружности. Найдите площадь трапеции $ABCD$. (12 баллов)

8. Составьте уравнение общей касательной к графикам функций

$y = 1+x-x^2$ и $y = 0,5\left(x^2+3\right)$. (12 баллов)

9. Определите все значения a, при которых уравнение $(x-a)^2 - 1 = 2\left(x+|x|\right)$ имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений a. (12 баллов)

10. Через диагональ прямоугольного параллелепипеда и точку, лежащую на боковом ребре, не пересекающем эту диагональ, проведена плоскость так, чтобы площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью была наименьшей. Найдите объем параллелепипеда, если известно, что диагонали сечения равны 3 и $\sqrt{3}$, а угол между ними $30°$. (12 баллов)

Решение варианта №1

1. Двое рабочих одновременно приступили к изготовлению одинаковых партий деталей. Когда первый рабочий сделал половину деталей, второму оставалось изготовить 24 детали, а когда второй выполнил половину работы, первому оставалось сделать 15 деталей. Сколько деталей осталось изготовить второму рабочему, когда первый выполнил свою работу?

Решение: Если n – количество деталей в партии, p_1 и p_2 – производительности рабочих, то $\frac{n}{2p_1}=\frac{n-24}{p_2}$; $\frac{n}{2p_2}=\frac{n-15}{p_1}$; $\frac{n}{p_1}=\frac{n-x}{p_2}$. Из первых двух уравнений получаем:

$n^2/4=n^2-39n+360$, или $n^2-52n+480=0$; $n=26\pm 14$, $n_1=12$ – пост. корень, $n_2=40$.

Подставляя $n=40$ в первое и третье уравнения, получаем $\frac{20}{p_1}=\frac{16}{p_2}$ и $\frac{40}{p_1}=\frac{40-x}{p_2}$, откуда

$40-x=32$, $x=8$. **Ответ:** 8 деталей.

2. Решите уравнение $2^x-6\cdot 2^{1-x}=1$.

Решение: $2^x-6\cdot 2^{1-x}=1$, $\left(2^x\right)^2-2^x-12=0$; $2^x=(1\pm 7)/2$, $2^x=4$, $x=2$. **Ответ:** $x=2$.

3. Какое наибольшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_{17}=52$, $a_{30}=13$?

Решение: Если a – первый член и d – разность арифметической прогрессии,

$\begin{cases} a+16d=52, \\ a+29d=13 \end{cases} \Leftrightarrow d=-3,\ a=100.$

Сумма первых n членов арифметической прогрессии S_n принимает наибольшее значение, если $a_n>0$, а $a_{n+1}\le 0$. Так как $a_n=a+d(n-1)$, то из неравенства $100-3(n-1)>0$ найдем $n=[103/3]=34$. Тогда $\max S_n=S_{34}=0{,}5\cdot(100+100-3\cdot 33)\cdot 34=1717$.

Ответ: 1717.

4. Найдите все целочисленные решения системы

$\begin{cases} \sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}=\sqrt{1+2\cos^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4}-\cos\frac{\pi x}{4}}, \\ |x|+|y-4|\le 4, \quad y<x+2. \end{cases}$

Решение:

Рассмотрим уравнение системы $\sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}=\sqrt{1+2\cos^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4}-\cos\frac{\pi x}{4}}$. При условии

$\sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}\ge 0$, т.е. при $-4+16k\le y\le 4+16k$, $k\in Z$, имеем

$2\cos^2\frac{\pi y}{8}-1-2\cos^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4}+\cos\frac{\pi x}{4}=0 \Leftrightarrow (2\cos^2\frac{\pi y}{8}-1)(1-\cos\frac{\pi x}{4})=0 \Leftrightarrow$

$\sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}=1$ или $\cos\frac{\pi x}{4}=1 \Leftrightarrow y=2+16k$, $y=-2+16k$, $k\in Z$, или $x=8n$, $n\in Z$.

Целочисленными решениями системы будут точки

$(l;2+16k)$, $(l;-2+16k)$, $(8n;m)$, $l,k,n,m\in Z$, $-4+16s\le m\le 4+16s$, $s\in Z$, лежащие в

квадрате с центром в точке $(0;4)$, стороной $4\sqrt{2}$, диагоналями параллельными осям координат и в полуплоскости $y < x+2$. Такими точками будут $(0;0), (0;1), (1;2), (2;2)$.

Ответ: $(0;0), (0;1), (1;2), (2;2)$.

5. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{4-2x}}{2x+5-2\sqrt{x^2+5x+6}} \le 0.$

Решение:

ОДЗ числителя и знаменателя: $x(x+1) \ge 0,\ \ 4-2x \ge 0,\ \ x^2+5x+6 \ge 0,\ \ \Rightarrow$ $x \in (-\infty;-3] \cup [-2;-1] \cup [0;2]$.

На ОДЗ исходное неравенство эквивалентно следующему

$$\frac{x^2+x-(4-2x)}{(x+3)-2\sqrt{(x+3)(x+2)}+x+2} \le 0 \ \Rightarrow \frac{(x+4)(x-1)}{(x+3)-2\sqrt{(x+3)(x+2)}+x+2} \le 0.$$

Если $x \ge -2$, то приходим к неравенству $\dfrac{(x+4)(x-1)}{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2})^2} \le 0$, и $x \in [-2;1]$.

С учетом ОДЗ $x \in [-2;-1] \cup [0;1]$.

Если $x \le -3$, то приходим к неравенству $\dfrac{(x+4)(x-1)}{-(\sqrt{-x-3}+\sqrt{-x-2})^2} \le 0$, и

$x \in (-\infty;-4]$, что входит в ОДЗ.

Окончательно имеем $x \in (-\infty;-4] \cup [-2;-1] \cup [0;1]$.

Ответ: $x \in (-\infty;-4] \cup [-2;-1] \cup [0;1]$.

6. Найдите множество значений функции $f(x) = g(g^2(x))$, где $g(x) = \dfrac{3}{x^2-4x+5}$.

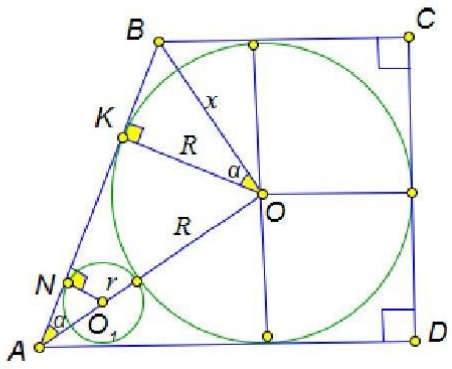
Решение: Функция $g(x) = \dfrac{3}{x^2-4x+5} = \dfrac{3}{(x-2)^2+1}$ определена на всей числовой оси и принимает все значения из промежутка $(0;3]$. Функция $g(x)$ достигает максимального значения в точке $x=2$, $g_{\max} = g(2) = 3$, на промежутке $(-\infty;2)$ функция $g(x)$ возрастает, на промежутке $(2;+\infty)$ – убывает. Функция $g^2(x)$ принимает все значения из промежутка $(0;9]$, поскольку $t = g(x) \in (0;3]$, а функция t^2 возрастает в этом промежутке. Для нахождения множества значений функции $f(x) = g(g^2(x))$ достаточно найти множество значений функции $g(x)$ на промежутке $(0;9]$. На указанном промежутке $g(x)$ принимает все значения из множества $[g(9); g(2)] = [3/50; 3]$. Ответ: $E_f = \left[\dfrac{3}{50}; 3\right]$.

7. В прямоугольную трапецию $ABCD$ с углом A, равным $2\arccos\frac{15}{17}$ вписана окружность. Вторая окружность с радиусом 10,8 касается сторон AB и AD трапеции и вписанной в нее окружности. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

Решение: Пусть O - центр вписанной в трапецию окружности, O_1 - центр окружности, касающейся сторон AB и AD трапеции и вписанной в нее окружности. Пусть для определенности угол D прямой (случай с прямым углом B рассматривается аналогично). Точки K и N - точки касаний стороны AB окружностей с центрами в точках O и O_1 соответственно. Треугольник OAB прямоугольный, угол AOB равен 90° (AO и BO - биссектрисы углов A и B, сумма этих углов равна 180°). Пусть $x = OB$, $\alpha = \angle OAB = \frac{\angle BAD}{2} = \arccos\frac{15}{17}$. Так как $OK \perp AB$, $\angle BOK = \alpha = \arccos\frac{15}{17}$, то $R = OK = x\cos\alpha = \frac{15}{17}x$ (R - радиус вписанной в трапецию окружности). В прямоугольном треугольнике OAB имеем: $AB = \frac{x}{\sin\alpha} = \frac{17}{8}x$, $OA = \frac{x}{tg\alpha} = \frac{15}{8}x$. В прямоугольном треугольнике NAO_1 имеем: $AO_1 = \frac{r}{\sin\alpha} = \frac{459}{20} = 22{,}95$, r - радиус второй окружности из условия задачи, $r = 10{,}8$. Для отрезка OA получаем соотношение $OA = R + r + AO_1 = \frac{15}{17}x + 10{,}8 + 22{,}95$, следовательно, $\frac{15}{8}x = \frac{15}{17}x + 10{,}8 + 22{,}95$, $x = 34$.

Найдем площадь трапеции $ABCD$:

$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2}2R = R(AB + 2R) = 30(\frac{17 \cdot 34}{8} + 60) = 3967{,}5$. **Ответ:** 3967,5.



8. Составьте уравнение общей касательной к графикам функций $y = 1 + x - x^2$ и $y = 0{,}5\left(x^2 + 3\right)$.

Решение: $y = 1 + x - x^2$, $y = 0{,}5\left(x^2 + 3\right)$, $y = ax + b$.

$1 + x - x^2 = ax + b$, $x^2 + (a-1)x + b - 1 = 0$.

$D = (a-1)^2 - 4b + 4 = 0$, $a^2 - 2a - 4b + 5 = 0$. (*)

$0{,}5\left(x^2 + 3\right) = ax + b$, $x^2 - 2ax - 2b + 3 = 0$.

$D/4 = a^2 - (-2b+3) = 0,\ a^2 + 2b - 3 = 0.$ (**)

Из (*) и (**) получаем $3a^2 - 2a - 1 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = -1/3$.

$b = \dfrac{3-a^2}{2},\ b_1 = 1, b_2 = \dfrac{13}{9}$.

Ответ: $y = x + 1,\ y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{13}{9}$.

9. Определите все значения a, при которых уравнение $(x-a)^2 - 1 = 2\left(x + |x|\right)$ имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений a.

Решение:

I. $x \ge 0,\quad (x-a)^2 - 1 = 4x,\ x^2 - 2(a+2)x + a^2 - 1 = 0;\ D/4 = a^2 + 4a + 4 - a^2 + 1 = 4a + 5$.

Уравнение имеет два различных неотрицательных корня $x_{1,2} = a + 2 \pm \sqrt{4a+5}$, если

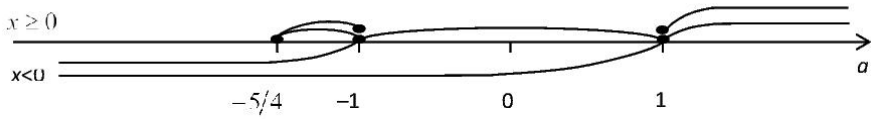
$$\begin{cases} 4a+5 > 0, \\ a+2 > 0, \\ a^2 - 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -5/4, \\ \left[\begin{array}{l} a \le -1, \\ a \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -5/4 < a \le -1, \\ a \ge 1. \end{array}\right.$$

Уравнение имеет ровно один неотрицательный корень $x_{1,2} = a + 2 + \sqrt{4a+5}$, если

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D = 4a+5 = 0, \\ a+2 \ge 0, \\ a^2 - 1 < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a^2 - 1 = 0, \\ a + 2 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = -5/4, \\ a > -2, \end{cases} \\ -1 < a < 1, \\ \begin{cases} a^2 - 1 = 0, \\ a + 2 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -5/4, \\ -1 < a < 1. \end{array}\right.$$

II. $x < 0,\quad (x-a)^2 - 1 = 0$.

Корень $x_1 = a + 1 < 0$, если $a < -1$, и корень $x_2 = a - 1 < 0$, если $a < 1$, то есть, уравнение имеет два различных отрицательных корня $x_{1,2} = a \pm 1$, если $-\infty < a < -1$, и уравнение имеет ровно один отрицательный корень $x = a - 1$, если $-1 \le a < 1$.



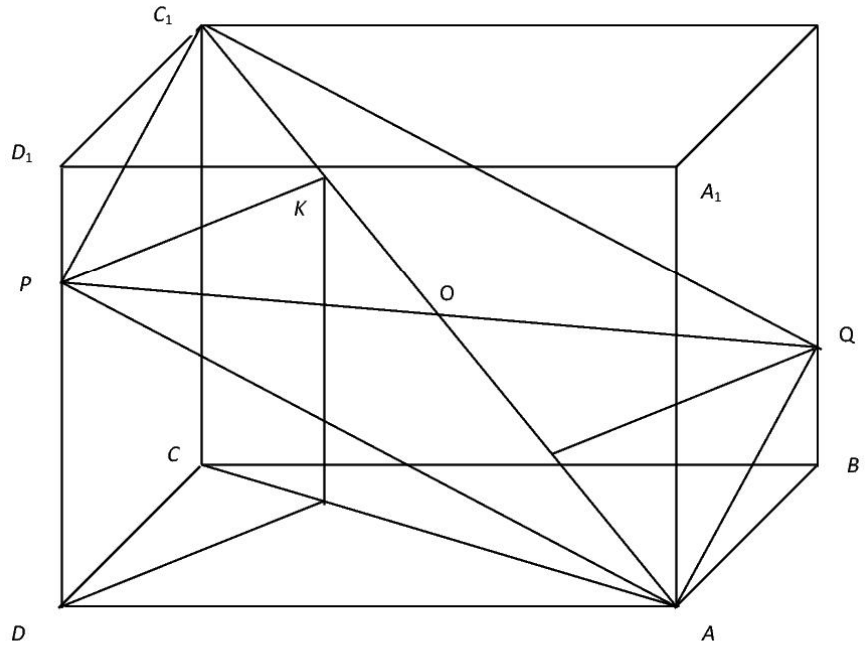
Ответ: $a \in (-\infty; -5/4),\quad x_{1,2} = a \pm 1;$

$a \in (-1; 1),\quad x_1 = a - 1,\quad x_2 = a + 2 + \sqrt{4a+5};$

$a \in [1; +\infty),\quad x_{1,2} = a + 2 \pm \sqrt{4a+5}$.

10. Через диагональ прямоугольного параллелепипеда и точку, лежащую на боковом ребре, не пересекающем эту диагональ, проведена плоскость так, чтобы площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью была наименьшей. Найдите объем параллелепипеда, если известно, что диагонали сечения равны 3 и $\sqrt{3}$, а угол между ними $30°$.

Решение:



Проведем $DL \perp AC$, $LK \parallel CC_1$ $(K \in AC_1)$, $PK \parallel DL$. Откладывая на боковом ребре BB_1 отрезок $BQ=PD_1$, получаем параллелограмм $PAQC_1$, который будет сечением наименьшей площади; при этом AC_1–его большая, а PQ –меньшая диагонали, заданные в условии.

$AC_1 = 3,\ PQ = \sqrt{3},\ \varphi = 30°,\ \sin\varphi = 1/2,\ \cos\varphi = \sqrt{3}/2.$

$DL = PK = \frac{1}{2}\cdot PQ\cdot\sin\varphi = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.\quad OK = \frac{1}{2}\cdot PQ\cdot\cos\varphi = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}.$

$\frac{CL}{AL} = \frac{C_1K}{AK} = \frac{C_1O-OK}{C_1O+OK} = \frac{3/2-3/4}{3/2+3/4} = \frac{1}{3}.$ Пусть $CL = x$, тогда $AL = 3x,\ AC = 4x.$

$DL^2 = CL\cdot AL$, т.е. $\frac{3}{16} = 3x^2,\ x = \frac{1}{4},\ AC = 1.\ CC_1 = \sqrt{AC_1^2 - AC^2} = \sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}.$

Объем $V = AC\cdot DL\cdot CC_1 = 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$ **Ответ:** $V = \frac{\sqrt{6}}{2}.$

Первый (отборочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика», осень 2013 г.

Вариант № 7

1. Из пунктов *A* и *B* одновременно выехали навстречу друг другу два велосипедиста. Когда первый проехал половину пути, второму осталось проехать до пункта *A* 72 км, а когда второй проехал половину пути, первому осталось проехать до пункта *B* 45 км. На каком расстоянии от пункта *A* велосипедисты встретились? (8 баллов)

2. Решите уравнение $3^{1+\sqrt{x}}+3^{2-\sqrt{x}}=28$. (8 баллов)

3. Какое наименьшее значение может принять сумма первых *n* членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_{35}=2,\ a_{40}=17$? (8 баллов)

4. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases}\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi(y+4)}{8}=\sqrt{2\sin^2\dfrac{\pi x}{8}-2\sin^2\dfrac{\pi y}{8}\cos\dfrac{\pi x}{4}+2\cos\dfrac{\pi x}{4}},\\ |x|+|y-4|\le 4,\quad y<x+2.\end{cases}$$ (8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{|x+1|-\sqrt{3x+7}}{\sqrt{4-2x}-\sqrt{x^2+x}}\ge 0$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x)=g(g^2(x))$, где $g(x)=3/(|x-2|+1)$. (10 баллов)

7. В прямоугольную трапецию *ABCD* с углом *A*, равным $2\arccos(15/17)$, вписана окружность. Вторая окружность с радиусом $18/25$ касается сторон *AB* и *AD* трапеции и вписанной в нее окружности. Найдите площадь треугольника *ABD*. (12 баллов)

8. Составьте уравнение общей касательной к графикам функций

$y=1+x+x^2$ и $y=0,5\left(x^2+3\right)$. (12 баллов)

9. Определите все значения *a*, при которых уравнение $(x+1)^2=a(2|x|-1)$ имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений *a*. (12 баллов)

10. Через диагональ прямоугольного параллелепипеда и точку, лежащую на боковом ребре, не пересекающем эту диагональ, проведена плоскость так, чтобы площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью была наименьшей. Найдите длины сторон основания параллелепипеда, если известно, что диагонали сечения равны 6 и $2\sqrt{3}$, а угол между ними $30°$. (12 баллов)

Решение варианта №7

1. Из пунктов A и B одновременно выехали навстречу друг другу два велосипедиста. Когда первый проехал половину пути, второму осталось проехать до пункта A 72 км, а когда второй проехал половину пути, первому осталось проехать до пункта B 45 км. На каком расстоянии от пункта A велосипедисты встретились?

Решение: Если l – расстояние между A и B, v_1, v_2 – скорости велосипедистов, то

$\frac{l}{2v_1}=\frac{l-72}{v_2}$; $\frac{l}{2v_2}=\frac{l-45}{v_1}$; $\frac{x}{v_1}=\frac{l-x}{v_2}$. Из первых двух уравнений получаем:

$l^2/4=l^2-117l+72\cdot 45$, или $l^2-156l+4320=0$; $l=78\pm 42$, $l_1=120$, $l_2=36$ – пост. корень.

Подставляя $l=120$ в первое и третье уравнения, получаем $\frac{60}{v_1}=\frac{48}{v_2}$ и $\frac{x}{v_1}=\frac{120-x}{v_2}$, откуда

$4x=600-5x$, $x=66\frac{2}{3}$. **Ответ:** $66\frac{2}{3}$ км.

2. Решите уравнение $3^{1+\sqrt{x}}+3^{2-\sqrt{x}}=28$.

Решение: $3^{1+\sqrt{x}}+3^{2-\sqrt{x}}=28$. $3\cdot\left(3^{\sqrt{x}}\right)^2-28\cdot 3^{\sqrt{x}}+9=0$;

$3^{\sqrt{x}}=\frac{14\pm\sqrt{196-27}}{3}=\frac{14\pm 13}{3}$.

1) $3^{\sqrt{x}}=1/3$, нет решений; 2) $3^{\sqrt{x}}=9$, $\sqrt{x}=2$, $x=4$. **Ответ:** $x=4$.

3. Какое наименьшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_{35}=2$, $a_{40}=17$?

Решение: Если a – первый член и d – разность арифметической прогрессии,

$\begin{cases} a+34d=2, \\ a+39d=17 \end{cases} \Leftrightarrow d=3,\ a=-100.$

Сумма первых n членов арифметической прогрессии S_n принимает наименьшее значение, если $a_n<0$, а $a_{n+1}\ge 0$. Так как $a_n=a+d(n-1)$, то из неравенства $-100+3(n-1)<0$ найдем $n=[103/3]=34$.

Тогда $\min S_n=S_{34}=0{,}5\cdot(-100-100+3\cdot 33)\cdot 34=-1717$. **Ответ:** –1717.

4. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} \sqrt{2}\sin\frac{\pi(y+4)}{8}=\sqrt{2\sin^2\frac{\pi x}{8}-2\sin^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4}+2\cos\frac{\pi x}{4}}, \\ |x|+|y-4|\le 4, \quad y<x+2. \end{cases}$$

Решение:

Рассмотрим уравнение системы $\sqrt{2}\sin\frac{\pi(y+4)}{8}=\sqrt{2\sin^2\frac{\pi x}{8}-2\sin^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4}+2\cos\frac{\pi x}{4}}$. Оно равносильно уравнению $\sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}=\sqrt{2\sin^2\frac{\pi x}{8}+2\cos^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4}}$ или

$\sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}=\sqrt{1+2\cos^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4}-\cos\frac{\pi x}{4}}$. При условии $\sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}\ge 0$, т.е. при $-4+16k\le y\le 4+16k$, $k\in Z$, имеем

$2\cos^2\frac{\pi y}{8}-1-2\cos^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4}+\cos\frac{\pi x}{4}=0 \Leftrightarrow (2\cos^2\frac{\pi y}{8}-1)(1-\cos\frac{\pi x}{4})=0 \Leftrightarrow$

$\sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}=1$ или $\cos\frac{\pi x}{4}=1 \Leftrightarrow y=2+16k,\ y=-2+16k, k\in Z,$ или $x=8n,\ n\in Z.$

Целочисленными решениями системы будут точки
$(l;2+16k), (l;-2+16k), (8n;m), l,k,n,m\in Z,\ -4+16s\le m\le 4+16s,\ s\in Z,$ лежащие в квадрате с центром в точке $(0;4)$, стороной $4\sqrt{2}$, диагоналями параллельными осям координат и в полуплоскости $y<x+2$. Такими точками будут $(0;0), (0;1), (1;2), (2;2)$.

Ответ: $(0;0), (0;1), (1;2), (2;2)$.

5. Решите неравенство $\dfrac{|x+1|-\sqrt{3x+7}}{\sqrt{4-2x}-\sqrt{x^2+x}}\ge 0.$

Решение:

ОДЗ числителя и знаменателя: $3x+7\ge 0,\quad x(x+1)\ge 0,\quad 4-2x\ge 0,\ \Rightarrow$
$x\in[-7/3;-1]\cup[0;2].$

На ОДЗ исходное неравенство эквивалентно следующему

$\dfrac{(x+1)^2-3x-7}{x^2+x-(4-2x)}\le 0 \Rightarrow \dfrac{x^2-x-6}{(x+4)(x-1)}\le 0 \Rightarrow \dfrac{(x+2)(x-3)}{(x+4)(x-1)}\le 0 \Rightarrow x\in(-4;-2]\cup(1;3].$

Окончательно имеем $x\in[-7/3;-2]\cup(1;2].$

Ответ: $x\in[-7/3;-2]\cup(1;2].$

6. Найдите множество значений функции $f(x)=g(g^2(x))$, где $g(x)=\dfrac{3}{|x-2|+1}.$

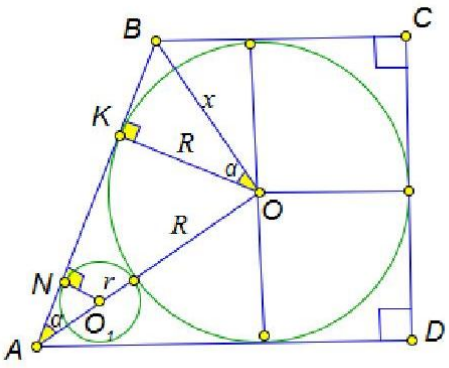
Решение: Функция $g(x)==\dfrac{3}{|x-2|+1}$ определена на всей числовой оси и принимает все значения из промежутка $(0;3]$. Функция $g(x)$ достигает максимального значения в точке $x=2$, $g_{\max}=g(2)=3$, на промежутке $(-\infty;2)$ функция $g(x)$ возрастает, на промежутке $(2;+\infty)-$ убывает. Функция $g^2(x)$ принимает все значения из промежутка $(0;9]$, поскольку $t=g(x)\in(0;3]$, а функция t^2 возрастает в этом промежутке. Для нахождения множества значений функции $f(x)=g(g^2(x))$ достаточно найти множество значений функции $g(x)$ на промежутке $(0;9]$. На указанном промежутке $g(x)$ принимает все значения из множества $[g(9);g(2)]=[3/8;3]$.

Ответ: $E_f=\left[\dfrac{3}{8};3\right].$

7. В прямоугольную трапецию $ABCD$ с углом A, равным $2\arccos\frac{15}{17}$ вписана окружность. Вторая окружность с радиусом $\frac{18}{25}$ касается сторон AB и AD трапеции и вписанной в нее окружности. Найдите площадь треугольника ABD.

Решение: Пусть O - центр вписанной в трапецию окружности, O_1 - центр окружности, касающейся сторон AB и AD трапеции и вписанной в нее окружности. Пусть для определенности угол D прямой (случай с прямым углом B рассматривается аналогично). Точки K и N - точки касаний стороны AB окружностей с центрами в точках O и O_1 соответственно. Треугольник OAB прямоугольный, угол AOB равен 90° (AO и BO - биссектрисы углов A и B, сумма этих углов равна 180°). Пусть $x = OB$, $\alpha = \angle OAB = \frac{\angle BAD}{2} = \arccos\frac{15}{17}$. Так как $OK \perp AB$, $\angle BOK = \alpha = \arccos\frac{15}{17}$, то $R = OK = x\cos\alpha = \frac{15}{17}x$ (R - радиус вписанной в трапецию окружности). В прямоугольном треугольнике OAB имеем: $AB = \frac{x}{\sin\alpha} = \frac{17}{8}x$, $OA = \frac{x}{tg\alpha} = \frac{15}{8}x$. В прямоугольном треугольнике NAO_1 имеем: $AO_1 = \frac{r}{\sin\alpha} = \frac{153}{100} = 1{,}53$, r - радиус второй окружности из условия задачи, $r = \frac{18}{25} = 0{,}72$. Для отрезка OA получаем соотношение $OA = R + r + AO_1 = \frac{15}{17}x + 0{,}72 + 1{,}53$, следовательно, $\frac{15}{8}x = \frac{15}{17}x + 0{,}72 + 1{,}53$, $x = \frac{34}{15}$.
Найдем площадь треугольника ABD:
$S_{ABD} = AD \cdot R = (AO\cos\alpha + R)R = R(\frac{15 \cdot 15}{8 \cdot 17}x + R) = 2(3{,}75 + 2) = 11{,}5$.

Ответ: 11,5.



8. Составьте уравнение общей касательной к графикам функций
$y = 1 + x + x^2$ и $y = 0{,}5\left(x^2 + 3\right)$.

Решение:
$y = 1 + x + x^2$, $y = 0{,}5\left(x^2 + 3\right)$, $y = ax + b$.

$1+x+x^2=ax+b,\ x^2+(1-a)x+1-b=0.$

$D=(1-a)^2-4(1-b)=0,\ a^2-2a+4b-3=0.$ (*)

$0,5(x^2+3)=ax+b,\ x^2-2ax-2b+3=0.$

$D/4=a^2-(-2b+3)=0,\ a^2+2b-3=0.$ (**)

Из (*) и (**) получаем $a^2+2a-3=0,\ a_1=1,\ a_2=-3.$

$b=\dfrac{3-a^2}{2},\ b_1=1, b_2=-3.$

Ответ: $y=x+1,\ y=-3(x+1).$

9. Определите все значения a, при которых уравнение $(x+1)^2=a(2|x|-1)$ имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений a.

Решение:

I. $x\ge 0,\ x^2+2x+1=2ax-a;\ x^2-2(a-1)x+a+1=0;$

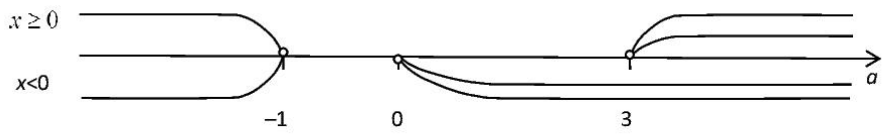
$D/4=a^2-2a+1-a-1=a^2-3a.$

1) два различных неотрицательных корня $x_{1,2}=a-1\pm\sqrt{a^2-3a}$, если:

$$\begin{cases} a^2-3a>0, \\ a-1>0, \\ a+1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a<0, \\ a>3, \end{array}\right. \\ a>1 \end{cases} \Leftrightarrow a>3.$$

2) один неотрицательный корень $x=a-1+\sqrt{a^2-3a}$, если:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2-3a=0, \\ a-1\ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a+1<0, \\ \left[\begin{array}{l} a+1=0, \\ a-1<0 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3, \\ a<-1, \\ a=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3, \\ a\le -1. \end{array}\right.$$



II. $x<0,\ x^2+2x+1=-2ax-a;\ x^2+2(a+1)x+a+1=0;$

$D/4=a^2+2a+1-a-1=a^2+a.$

1) два различных отрицательных корня $x_{1,2}=-a-1\pm\sqrt{a^2+a}$, если:

$$\begin{cases} a^2+a>0, \\ a+1>0, \\ a+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0, \\ a>-1 \end{cases} \Leftrightarrow a>0.$$

2) один отрицательный корень $x=-a-1-\sqrt{a^2+a}$, если:

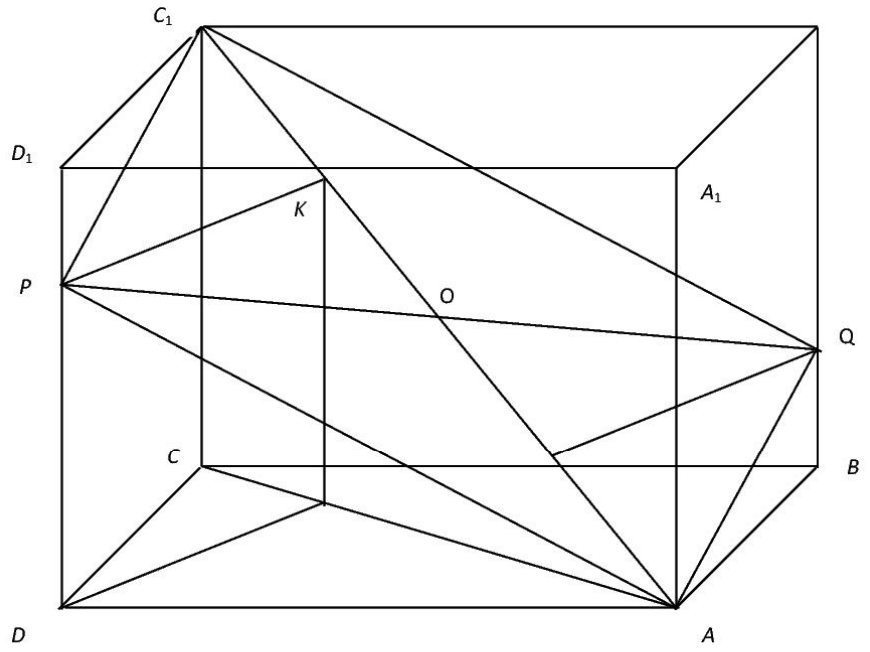
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+a=0,\\ a+1>0,\end{cases}\\ \begin{cases}a+1<0,\\ a+1=0,\\ a+1>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=0,\\ a<-1.\end{array}\right.$$

Ответ: $a<-1,\ x_1=a-1+\sqrt{a^2-3a},\ x_2=-a-1-\sqrt{a^2+a}$;

$0<a<3,\ x_{1,2}=-a-1\pm\sqrt{a^2+a}$.

10. Через диагональ прямоугольного параллелепипеда и точку, лежащую на боковом ребре, не пересекающем эту диагональ, проведена плоскость так, чтобы площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью была наименьшей. Найдите длины сторон основания параллелепипеда, если известно, что диагонали сечения равны 6 и $2\sqrt{3}$, а угол между ними $30°$.

Решение:



Проведем $DL\perp AC$, $LK\|CC_1$ $(K\in AC_1)$, $PK\|DL$. Откладывая на боковом ребре BB_1 отрезок $BQ=PD_1$, получаем параллелограмм $PAQC_1$, который будет сечением наименьшей площади; при этом AC_1–его большая, а PQ –меньшая диагонали, заданные в условии.

$AC_1=6,\quad PQ=2\sqrt{3},\quad \varphi=30°,\quad \sin\varphi=1/2,\quad \cos\varphi=\sqrt{3}/2.$

$DL = PK = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $OK = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$.

$\frac{CL}{AL} = \frac{C_1K}{AK} = \frac{C_1O - OK}{C_1O + OK} = \frac{3 - 3/2}{3 + 3/2} = \frac{1}{3}$. Пусть $CL = x$, тогда $AL = 3x$.

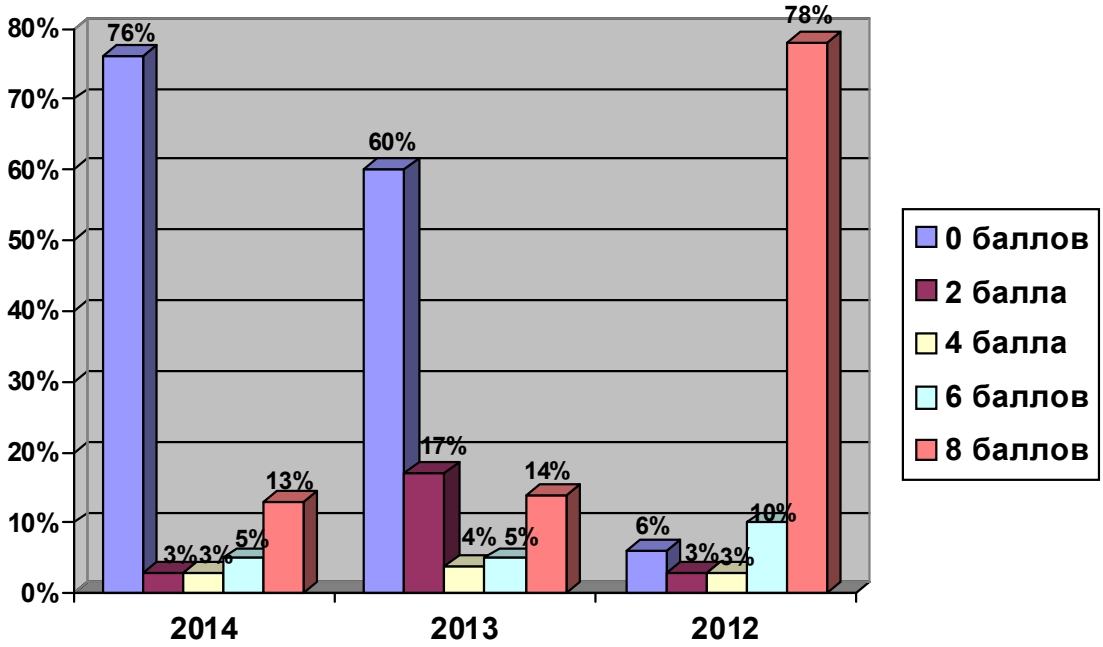
$DL^2 = CL \cdot AL$, т.е. $\frac{3}{4} = 3x^2$, $x = \frac{1}{2}$, $CL = \frac{1}{2}$, $AL = \frac{3}{2}$. Тогда $CD = \sqrt{DL^2 + CL^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$,

$AD = \sqrt{DL^2 + AL^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{3}$.

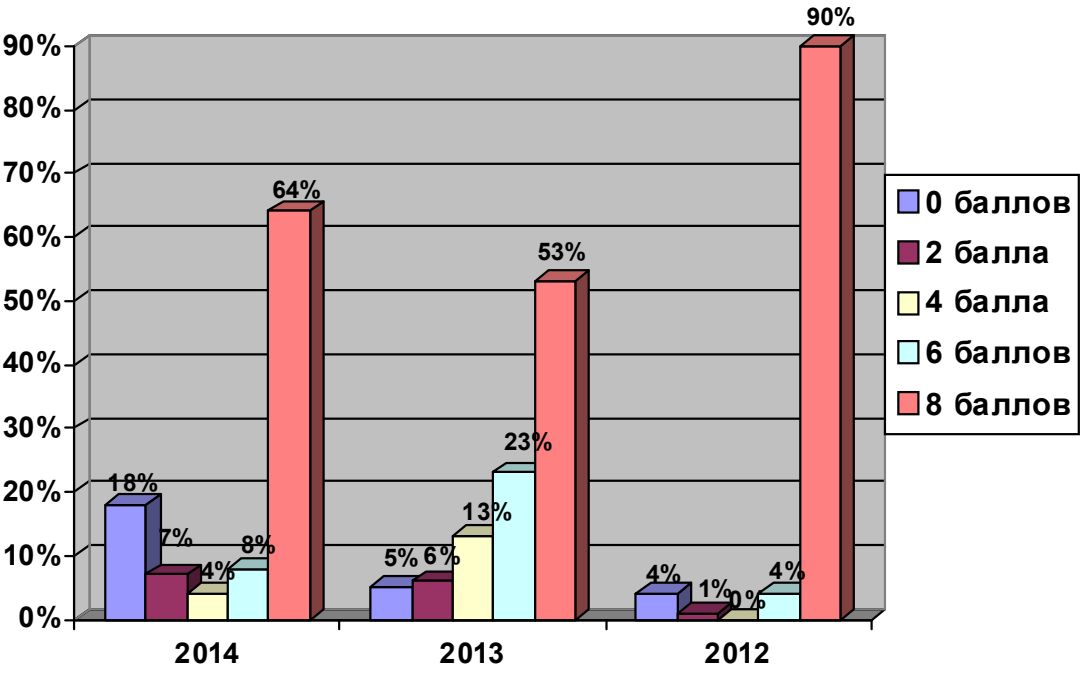
Ответ: $1; \sqrt{3}$.

По результатам проведения Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика» среди учащихся 11 классов был проведен анализ выполнения участниками задач из разных разделов математики, отличающихся уровнем сложности. Основные статистические результаты приведены ниже.

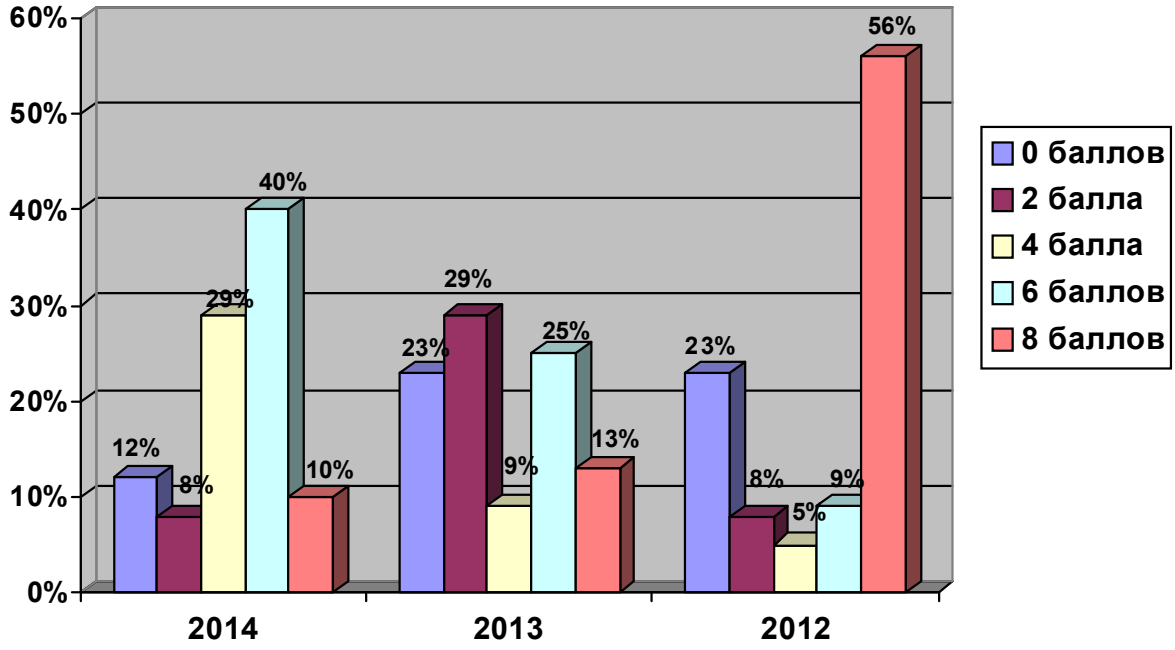
Гистограмма распределения баллов за задачу №1 (текстовая задача) во 2 туре



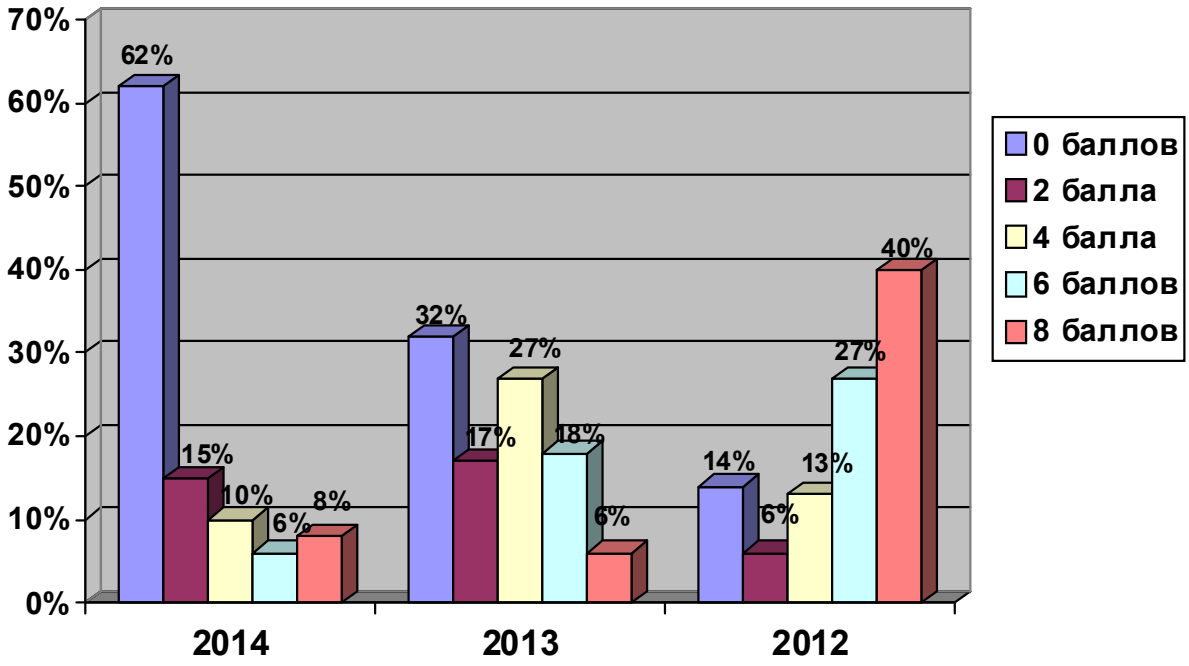
Гистограмма распределения баллов за задачу №2 (показательные, логарифмические уравнения) во 2 туре



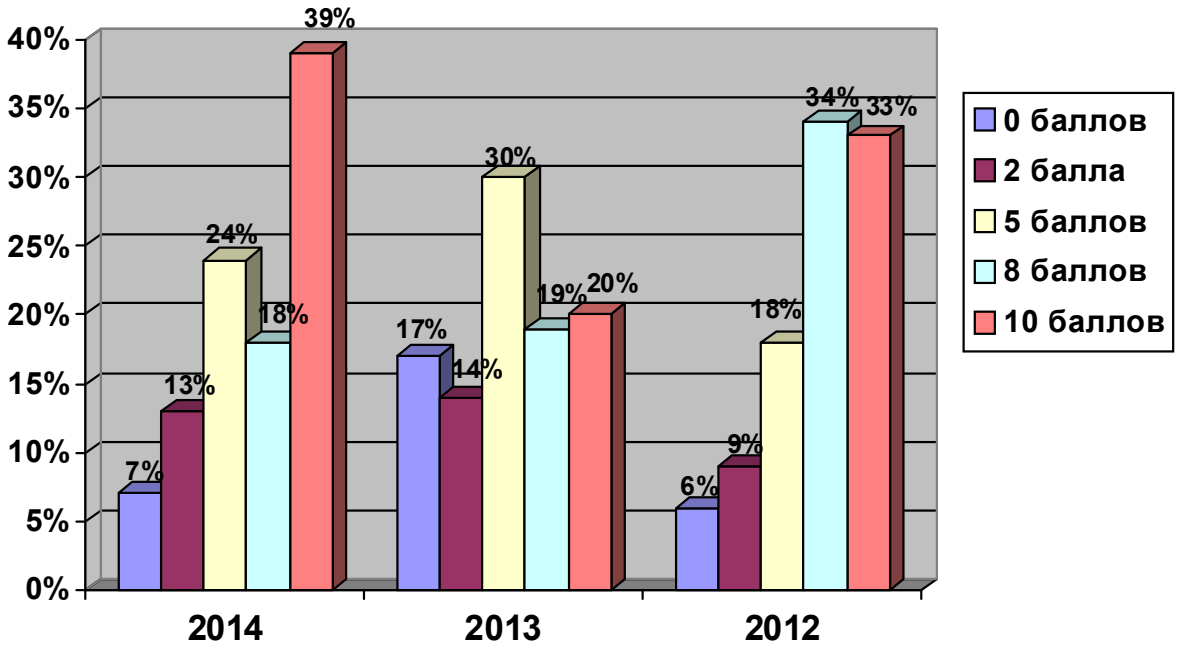
Гистограмма распределения баллов за задачу №3 (прогрессия) во 2 туре



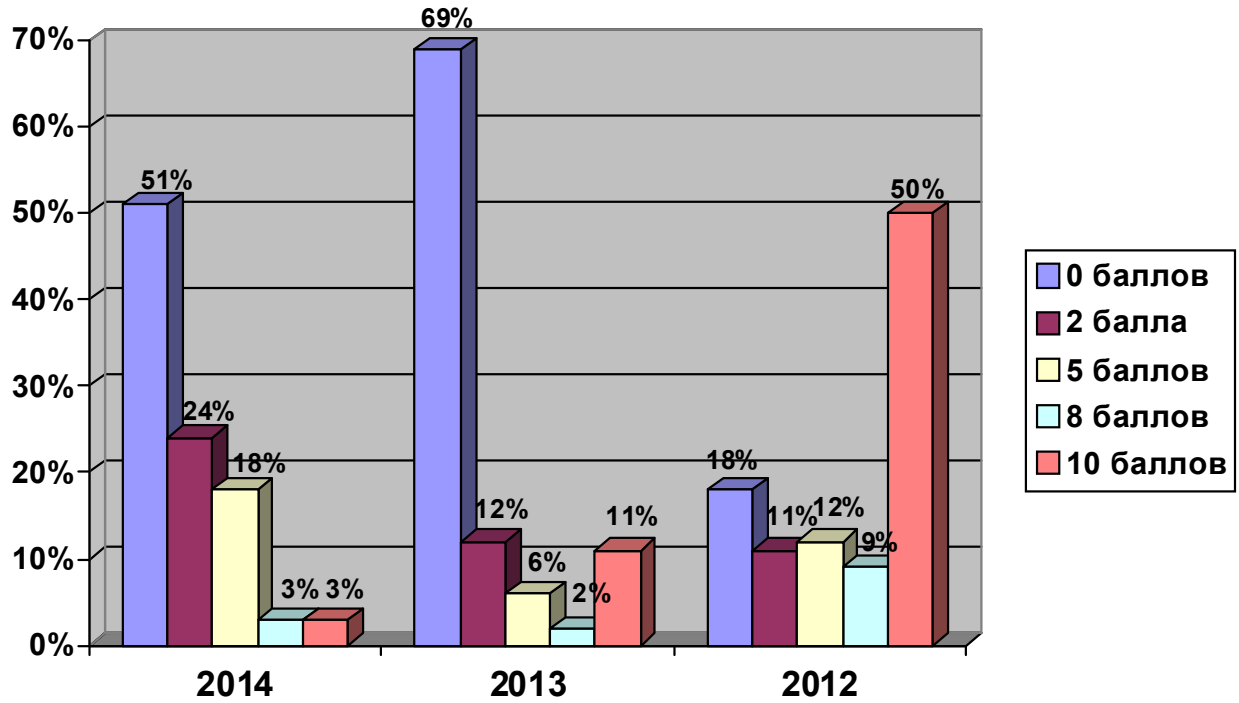
Гистограмма распределения баллов за задачу №4 (тригонометрия) во 2 туре



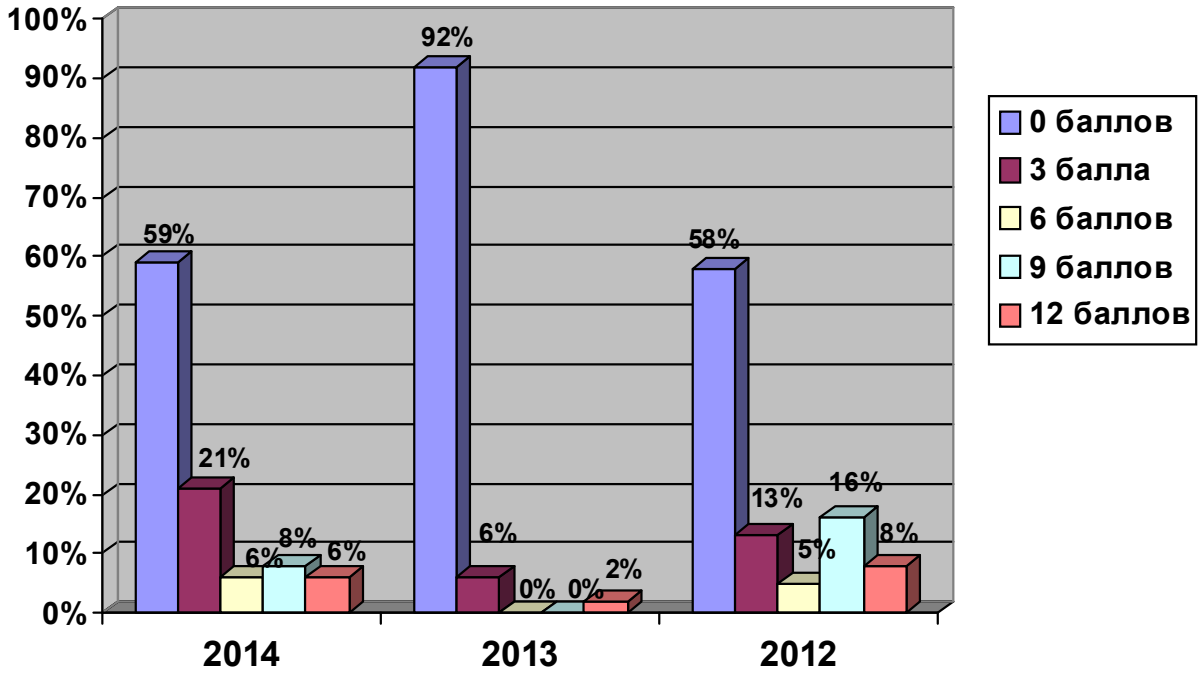
Гистограмма распределения баллов за задачу №5 (неравенство) во 2 туре



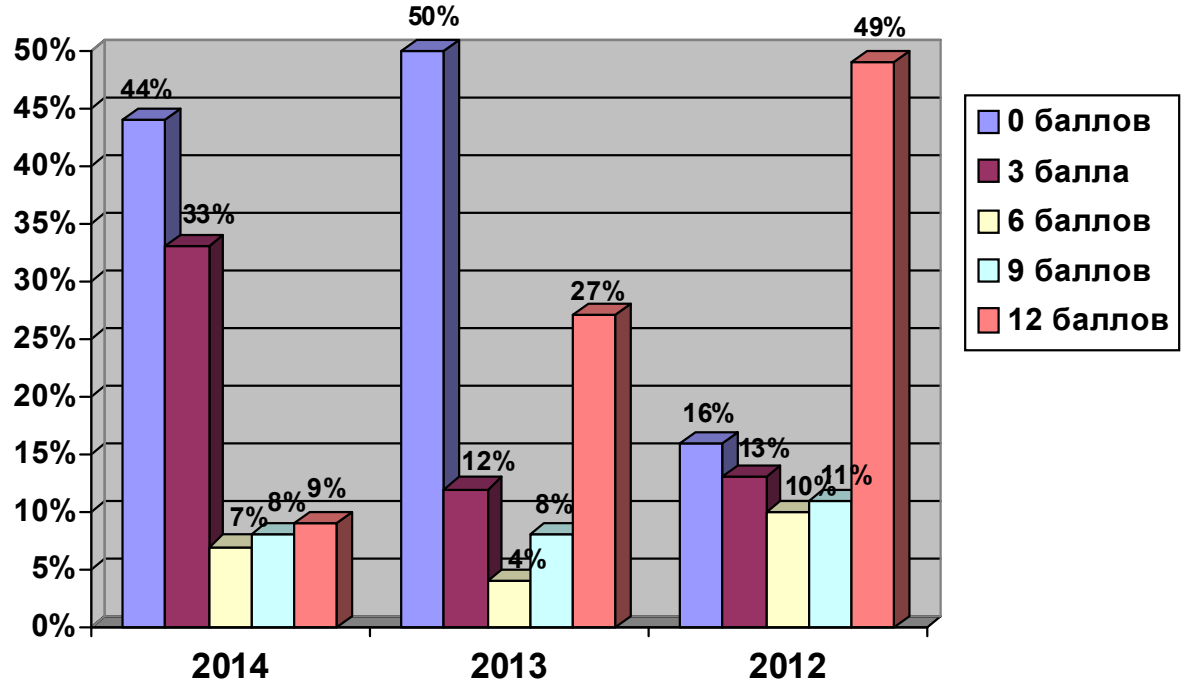
Гистограмма распределения баллов за задачу №6 (свойства функций) во 2 туре



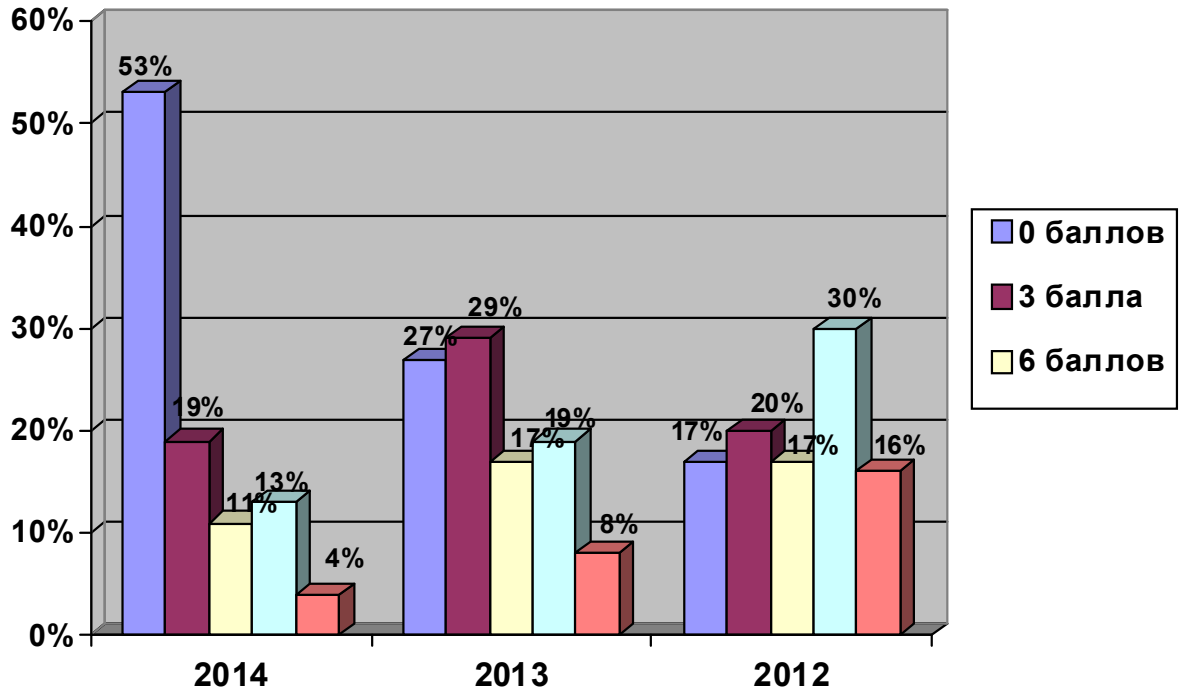
Гистограмма распределения баллов за задачу №7 (планиметрия) во 2 туре



Гистограмма распределения баллов за задачу №8 (производная) во 2 туре



Гистограмма распределения баллов за задачу №9 (уравнения с параметрами) во 2 туре



Гистограмма распределения баллов за задачу №10 (стереометрия) во 2 туре

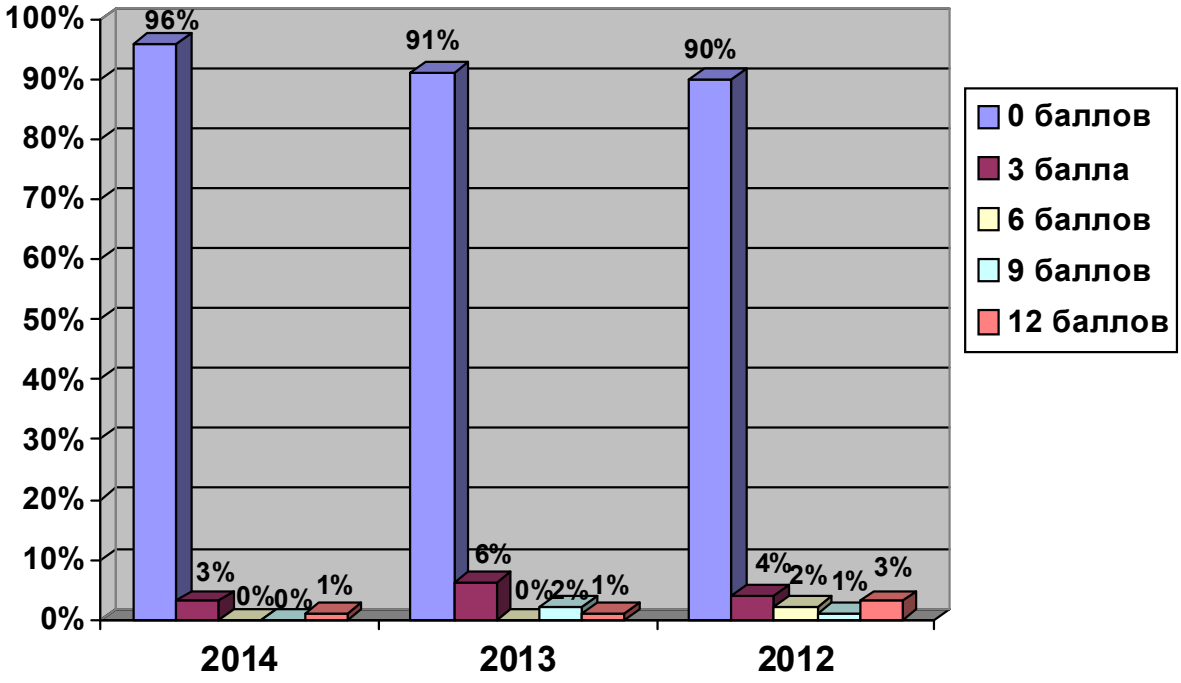
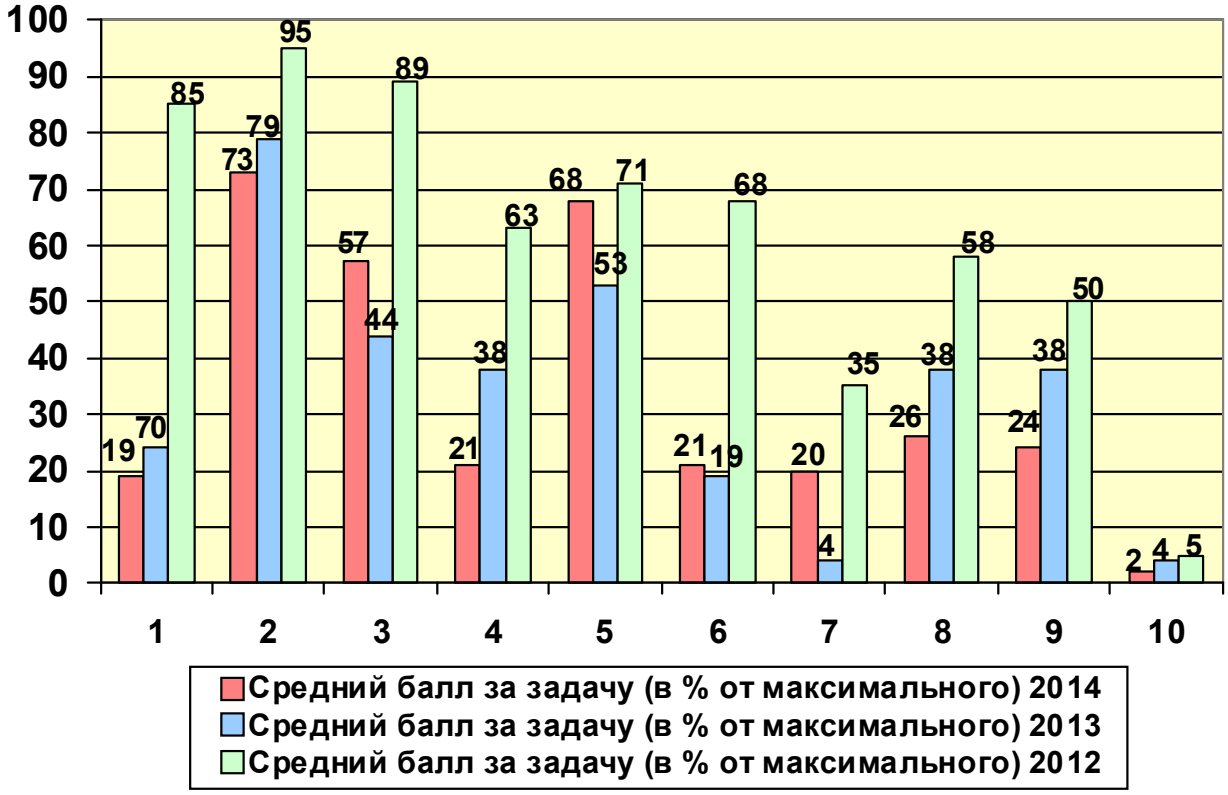
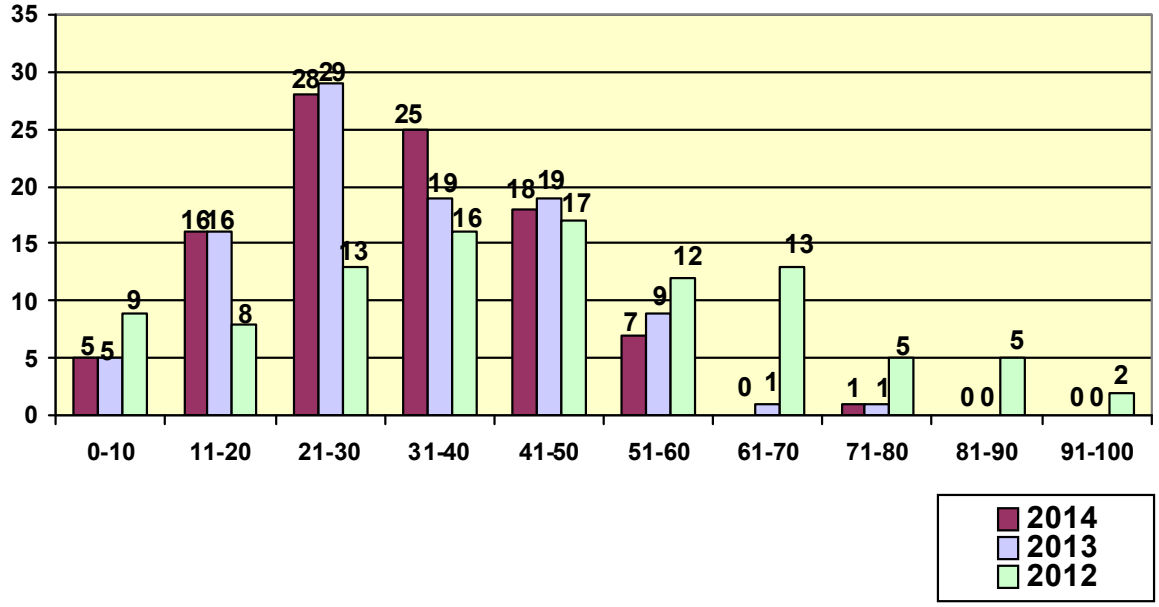


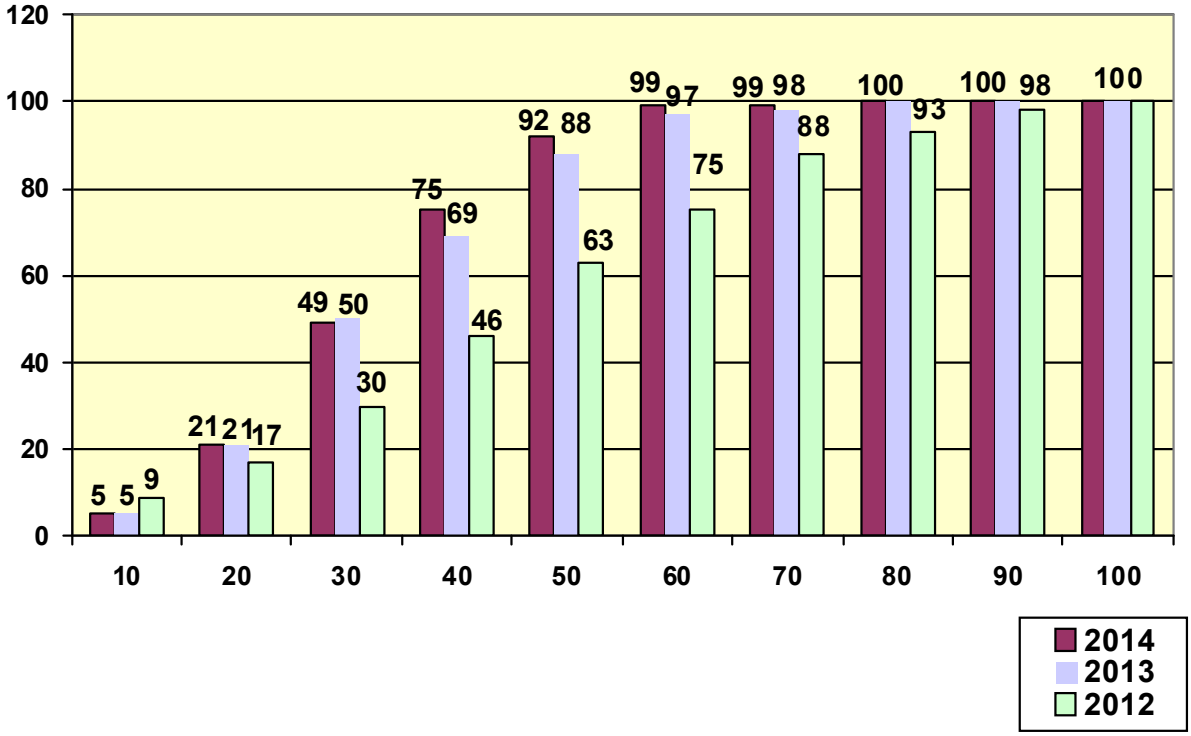
Диаграмма средних баллов



Гистограмма суммарных баллов за 10 задач



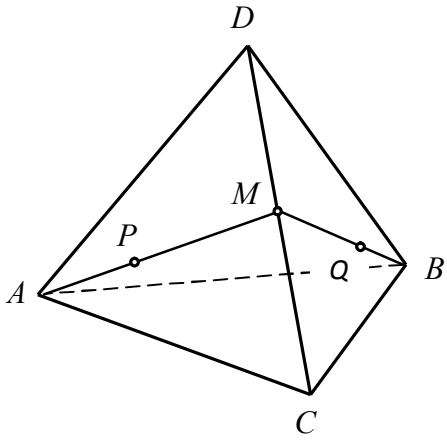
Кумулятивная гистограмма распределения суммарных баллов



ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО (ОЧНОГО) ЭТАПА ОЛИМПИАДЫ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА «ШАГ В БУДУЩЕЕ» ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ 8-10 КЛАССОВ 2013-2014 УЧЕБНОГО ГОДА.

ВАРИАНТ 1 (10 класс)

1. Петя, Вася и Толя соревнуются в беге на дистанции AB. Если Петя и Вася одновременно выбегут из пунктов A и B навстречу друг другу, а Толя выбежит с ними одновременно, то Толя успеет пробежать всю дистанцию до момента встречи Пети и Васи. Если Петя и Толя побегут навстречу друг другу, а Вася выбежит с ними одновременно, то Вася успеет пробежать половину дистанции до момента встречи Пети и Толи. Успеет ли Петя пробежать четверть дистанции к моменту встречи Толи и Васи, если они побегут навстречу друг другу?



2. Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром a. На медиане AM грани ACD взята точка P так, что $2|AP| = |PM|$, а на медиане BM грани BCD точка — Q так, что $2|BQ| = |QM|$. Найти длину кратчайшего пути из P в Q по поверхности тетраэдра.

3. Определить координаты точки, лежащей на графике функции $y = 4k - kx$, в которой разность квадрата абсциссы и ординаты принимает наименьшее значение. При каком значении параметра k оно достигается?

4. Решить уравнение $|\operatorname{ctg} x| + \dfrac{1}{|\operatorname{ctg} x|} = \sqrt[6]{-\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 63}$.

5. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 3 и 4. На его гипотенузе как на стороне внешним образом построен квадрат. Найти расстояние от вершины прямого угла треугольника до центра квадрата.

6. Известно, что оба корня квадратичной функции $f_1(x) = 3x^2 + ax + b$ больше 2014, а оба корня квадратичной функции $f_2(x) = 2x^2 + cx + d$ меньше 2014 ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$). Может ли функция $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ иметь два действительных корня, один из которых больше 2014, а другой — меньше?

7. Найти все значения параметра a, при которых решением системы неравенств $\begin{cases} x^2-4x+2a\geq 0 \\ (a-2)\left(x^2-ax+2\right)\geq 0 \end{cases}$ является множество всех действительных чисел.

8. Найти наименьшее значение выражения $\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-6)^2+(y+2)^2}$.

9. Пусть O - точка пересечения медиан треугольника ABC, M - произвольная точка на окружности с центром в точке O. Доказать, что сумма $AM^2+BM^2+CM^2$ не зависит от выбора точки M на окружности.

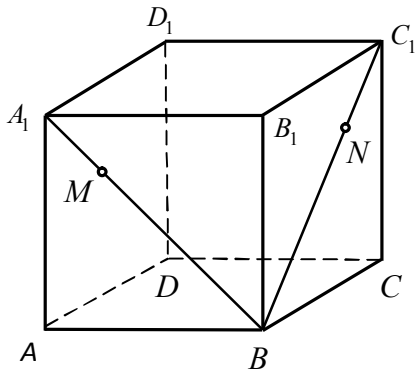
10. Найти сумму:

$$\frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{13}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2-n+1}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2014^2-2014+1}.$$

Задание	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**Итого**
Баллы	8	8	10	10	10	10	10	10	12	12	**100**

ВАРИАНТ 2 (10 класс)

1. Саша, Дима и Коля соревнуются в беге на дистанции AB. Если Саша и Дима одновременно выбегут из пунктов A и B навстречу друг другу, а Коля выбежит с ними одновременно, то Коля успеет пробежать всю дистанцию до момента встречи Саши и Димы. Если Саша и Коля побегут навстречу друг другу, а Дима выбежит с ними одновременно, то Дима успеет пробежать $\frac{3}{5}$ дистанции до момента встречи Саши и Коли. Успеет ли Саша пробежать шестую часть дистанции к моменту встречи Коли и Димы, если они побегут навстречу друг другу?



2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a, на диагонали боковой грани A_1B выбрана точка M так, что $A_1M : MB = 1:3$, а на диагонали BC_1 выбрана точка N так, что $BN : BC_1 = 3:4$. Найти длину кратчайшего пути из M в N по поверхности куба.

3. Определить координаты точки, лежащей на графике функции $y = -3k - kx$, в которой сумма квадрата абсциссы и ординаты принимает наименьшее значение. При каком значении параметра k оно достигается?

4. Решить уравнение $\left|\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right| = \sqrt[4]{-\operatorname{ctg}^2 x + 2\operatorname{ctg} x + 15}$.

5. Углы при основании равнобедренного треугольника ABC с основанием AC равны 75°. В каком отношении, считая от вершины C, высота BH делит высоту CE?

6. Известно, что оба корня квадратичной функции $f_1(x) = -x^2 + mx + n$ больше 1580, а оба корня квадратичной функции $f_2(x) = -2x^2 + px + q$ меньше 1580 ($m, n, p, q \in \mathbb{R}$). Может ли функция $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ иметь два действительных корня, один из которых больше 1580, а другой — меньше?

7. Найти все значения параметра a, при которых система неравенств $\begin{cases} (a-1)\left(2x^2 + ax + 1\right) > 0 \\ x^2 - 2x + a > 0 \end{cases}$ не имеет решений.

8. Найти наибольшее значение выражения $\sqrt{(x+1)^2+(y+3)^2}-\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$.

9. Пусть O - точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, M-произвольная точка на окружности с центром в точке O. Доказать, что сумма $AM^2+BM^2+CM^2+DM^2$ не зависит от выбора точки M на окружности.

10. Найти сумму:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{13}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2014^2+2014+1}.$$

Задание	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**Итого**
Баллы	8	8	10	10	10	10	10	10	12	12	**100**

Критерии оценивания заданий олимпиады 10 класс:

Для заданий 1, 2

+ - 8 баллов - полное обоснованное решение задачи.

$\pm$ - 6 баллов - арифметическая ошибка в конце решения задачи; ошибка при выписывании ответа.

$\frac{1}{2}$ - 4 баллов - получены существенные промежуточные результаты.

$\mp$ - 2 балла - получены некоторые промежуточные результаты; арифметическая ошибка допущена вначале решения, которая, при правильном ходе решения задачи, возможно, привела к неверному ответу.

$-$ - 0 баллов- решение задачи неверно.

«нет» - решение задачи отсутствует.

Аналогично, для заданий 3-8

+ - 10 баллов

$\pm$ - 8 баллов

$\frac{1}{2}$ - 6 баллов

$\mp$ - 2 балла

Аналогично, для заданий 9-10

+ - 12 баллов

$\pm$ - 9 баллов

$\frac{1}{2}$ - 6 баллов

$\mp$ - 3 балла

Решение задач (10 класс)

Задача 1. *I вариант*.

1. Петя, Вася и Толя соревнуются в беге на дистанции AB. Если Петя и Вася одновременно выбегут из пунктов A и B навстречу друг другу, а Толя выбежит с ними одновременно, то Толя успеет пробежать всю дистанцию до момента встречи Пети и Васи. Если Петя и Толя побегут навстречу друг другу, а Вася выбежит с ними одновременно, то Вася успеет пробежать половину дистанции до момента встречи Пети и Толи. Успеет ли Петя пробежать четверть дистанции к моменту встречи Толи и Васи, если они побегут навстречу друг другу?

Решение. Обозначим скорости Васи, Пети и Толи соответственно x, y и z, а всю дистанцию AB примем за S. По условию задачи составим систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{S}{x+y} > \dfrac{S}{z}, \\ \dfrac{S}{y+z} > \dfrac{S}{2x}. \end{cases}$$

Требуется сравнить $\dfrac{S}{x+z} \vee \dfrac{S}{4y}$.

Из системы следует

$$\begin{cases} z > x+y, \\ 2x > y+z \end{cases} \Rightarrow\ 2x+z > x+2y+z \ \Leftrightarrow\ x > 2y \quad (1).$$

Отсюда видно, что $x+y > 3y$. Значит, из первого неравенства системы $z > 3y$ (2).

Из неравенств (1) и (2) видим, что $x+z > 5y > 4y$. Получаем, что $\dfrac{S}{x+z} < \dfrac{S}{4y}$, т.е. Петя не успеет.

Ответ: не успеет.

Задача 1. *II вариант*.

1. Саша, Дима и Коля соревнуются в беге на дистанции AB. Если Саша и Дима одновременно выбегут из пунктов A и B навстречу друг другу, а Коля выбежит с ними одновременно, то Коля успеет пробежать всю дистанцию до момента встречи Саши и Димы. Если Саша и Коля побегут навстречу друг другу, а Дима выбежит с ними одновременно, то Дима успеет пробежать $\frac{3}{5}$ дистанции до момента встречи Саши и Коли. Успеет ли Саша пробежать шестую часть дистанции к моменту встречи Коли и Димы, если они побегут навстречу друг другу?

Решение. Пусть скорости Саши, Димы и Коли равны соответственно x, y и z. По условию

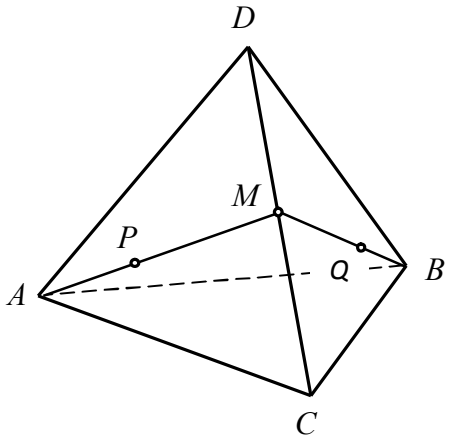
$$\begin{cases} z > x + y, \\ 5y > 3x + 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3z > 3x + 3y, \\ 5y > 3x + 3z \end{cases} \Rightarrow 3x + 5y > 6x + 3y + 3z \Leftrightarrow y > 3x \quad (1).$$

Из первого неравенства системы $z > x + y > 4x$ (2), и, значит, $y + z > 7x > 6x$. Саша не успеет.

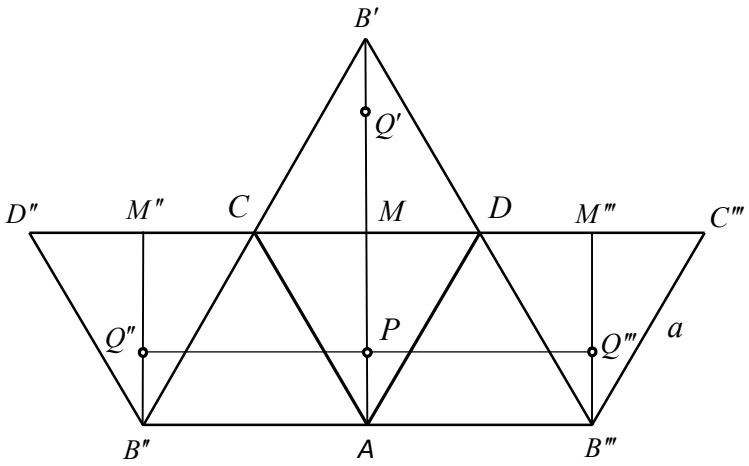
Ответ: не успеет.

Задача 2. *I вариант*.

Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром a. На медиане AM грани ACD взята точка P так, что $2|AP| = |PM|$, а на медиане BM грани BCD точка — Q так, что $2|BQ| = |QM|$. Найти длину кратчайшего пути из P в Q по поверхности тетраэдра.



Решение. Любой путь, идущий по поверхности тетраэдра, можно развернуть на плоскость.



В задаче требуется выбрать наименьший из трех отрезков PQ', PQ'' и PQ'''. Ясно, что

$$\left|PQ'\right| = \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{2}{\sqrt{3}}a,$$

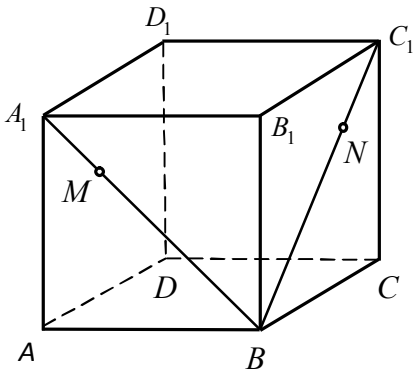
$$\left|PQ''\right| = \left|PQ'''\right| = a.$$

Кратчайший путь имеет длину a.

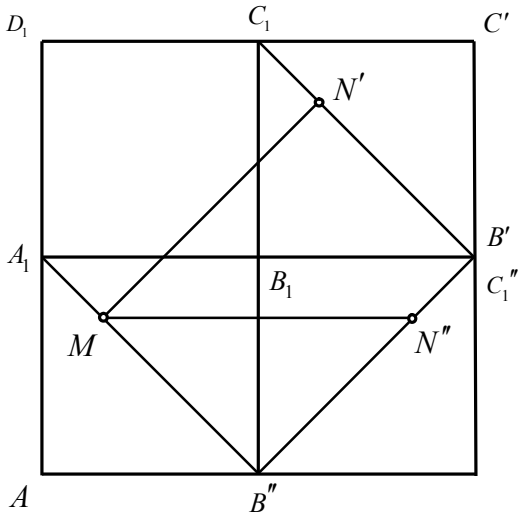
Ответ: a.

Задача 2. *II вариант*.

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a, на диагонали боковой грани A_1B выбрана точка M так, что $A_1M : MB = 1:3$, а на диагонали BC_1 выбрана точка N так, что $BN : BC_1 = 3:4$. Найти длину кратчайшего пути из M в N по поверхности куба.



Решение. Развернём путь по поверхности куба на плоскость.



В задаче требуется выбрать наименьший из двух отрезков MN' и MN''. Легко видеть, что $\left|MN'\right| = \sqrt{2}\,a$, $\left|MN''\right| = \frac{3}{2}a$. Кратчайший путь имеет длину $\sqrt{2}\,a$.

Ответ: $\sqrt{2}\,a$.

Задача 3. *I вариант*.

Определить координаты точки, лежащей на графике функции $y = 4k - kx$, в которой разность квадрата абсциссы и ординаты принимает наименьшее значение. При каком значении параметра k оно достигается?

Решение. $f(x) = x^2 - (4k - kx) = x^2 + kx - 4k = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} - 4k$.

$$\min f(x) = f\left(-\frac{k}{2}\right) = -\frac{k^2}{4} - 4k = -\frac{1}{4}\left(k^2 + 16k\right) = -\frac{1}{4}(k+8)^2 + 16.$$

Видим, что $\min f(x)$ достигает своего наименьшего значения при $k = -8$. При этом $x_0 = -\frac{k}{2} = 4$, $y_0 = 0$.

Ответ: $(4;0)$; $k = -8$.

Задача 3. *II вариант*.

Определить координаты точки, лежащей на графике функции $y = -3k - kx$, в которой наименьшее значение суммы квадрата абсциссы и ординаты является максимальным. При каком значении параметра k оно достигается?

Решение. $f(x) = x^2 + (-3k - kx) = x^2 - kx - 3k = \left(x - \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} - 3k$.

$$\min f(x) = f\left(\frac{k}{2}\right) = -\frac{k^2}{4} - 3k = -\frac{1}{4}\left(k^2 + 12k\right) = -\frac{1}{4}(k+6)^2 + 9.$$

Наибольшее значение $\min f(x)$ принимает при $k = -6$, при этом $x_0 = -3$, $y_0 = 0$.

Ответ: $(-3;0)$; $k = -6$.

Задача 4. *I вариант*.

Решить уравнение $\left|\operatorname{ctg} x\right|+\dfrac{1}{\left|\operatorname{ctg} x\right|}=\sqrt[6]{-\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg} x+63}$.

Решение. Заменой $t=\operatorname{tg} x$ уравнение приводится к виду $\left|t\right|+\dfrac{1}{\left|t\right|}=\sqrt[6]{-t^2-2t+63}$.

Замечаем, что функция $\varphi(t)=\left|t\right|+\dfrac{1}{\left|t\right|}$ ограничена снизу и принимает своё наименьшее значение, равное 2, при $t=\pm 1$. Функция $\psi(t)=\sqrt[6]{-t^2-2t+63}$ ограничена сверху, принимает наибольшее значение 2 при $t=-1$. Отсюда заключаем, что уравнение имеет единственное решение $t=-1$.

Осталось решить уравнение $\operatorname{tg} x=-1$, получаем $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $x\in\left\{-\dfrac{\pi}{4}+\pi n\,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$.

Задача 4. *II вариант*.

Решить уравнение $\left|\operatorname{tg} x+\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right|=\sqrt[4]{-\operatorname{ctg}^2 x+2\operatorname{ctg} x+15}$.

Решение. Пусть $t=\operatorname{ctg} x$. Уравнение принимает вид: $\left|t+\dfrac{1}{t}\right|=\sqrt[4]{-t^2+2t+15}$. Обозначим $\varphi(t)=\left|t+\dfrac{1}{t}\right|$, $\psi(t)=\sqrt[4]{-t^2+2t+15}$.

$\min\varphi(t)=\varphi(\pm 1)=2$, $\max\psi(t)=\psi(1)=2$. Следовательно, $t=1$.

Обратная замена: $\operatorname{ctg} x=1$,

$x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $x\in\left\{\dfrac{\pi}{4}+\pi n\,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$.

Задача 5. *I вариант*.

Известно, что оба корня квадратичной функции $f_1(x)=3x^2+ax+b$ больше 2014, а оба корня квадратичной функции $f_2(x)=2x^2+cx+d$ меньше 2014 ($a,b,c,d\in\mathbb{R}$). Может ли функция $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ иметь два действительных корня, один из которых больше 2014, а другой — меньше?

Решение. Обе функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в точке $x=2014$ имеют положительное значение, значит, положительным является и значение в этой точке их суммы $f(x)$. Ветви параболы $y=f(x)$ направлены вверх. Поэтому корни функции $f(x)$ не могут располагаться по разные стороны от числа 2014.

Ответ: нет.

Задача 5. *II вариант*.

Известно, что оба корня квадратичной функции $f_1(x)=-x^2+mx+n$ больше 1580, а оба корня квадратичной функции $f_2(x)=-2x^2+px+q$ меньше 1580 ($m,n,p,q\in\mathbb{R}$). Может ли функция $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ иметь два действительных корня, один из которых больше 1580, а другой — меньше?

Решение. $f_1(1580)<0$, $f_2(1580)<0 \Rightarrow f(1580)<0$. Поскольку ветви параболы $y=f(x)$ направлены вниз, то корни $f(x)$ не могут располагаться по разные стороны от числа 1580.

Ответ: нет.

Задача 6. *I вариант*.

Найти все значения параметра *a*, при которых решением системы неравенств $\begin{cases} x^2-4x+2a\ge 0 \\ (a-2)\left(x^2-ax+2\right)\ge 0 \end{cases}$ является множество всех действительных чисел.

Решение. Множество всех действительных чисел является решением первого неравенства тогда и только тогда, когда $D = 2 - a \le 0 \Leftrightarrow a \ge 2$.

1) При $a = 2$ решением второго неравенства является множество всех действительных чисел.

2) При $a > 2$ второе неравенство равносильно неравенству $x^2 - ax + 2 \ge 0$, для которого множество всех действительных чисел является решением тогда и только тогда, когда $D = a^2 - 8 \le 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{2} \le a \le 2\sqrt{2}$.

Таким образом, множество всех действительных чисел является решением системы неравенств в случае $a \in \left[2; 2\sqrt{2}\right]$.

Ответ: $a \in \left[2; 2\sqrt{2}\right]$.

Задача 6. *II вариант*.

Найти все значения параметра *a*, при которых система неравенств $\begin{cases} (a-1)\left(2x^2 + ax + 1\right) > 0, \\ x^2 - 2x + a > 0 \end{cases}$ не имеет решений.

Решение. Неравенство (2) всегда имеет в составе решения бесконечный промежуток, определяемый знаком дискриминанта $(1 - a)$.

При $a > 1$ решением (2) является $x \in \mathbb{R}$, неравенство (1) при этом равносильно $2x^2 + ax + 1 < 0$. Решением (1) в этом случае является либо $x \in \varnothing$ при $a^2 - 8 \le 0$, либо $x \in (x_1; x_2)$ при $a^2 - 8 > 0$.

При $a < 1$ решением (2) является совокупность расходящихся лучей, неравенство (1) при этом имеет решением либо совокупность расходящихся лучей, либо $x \in \mathbb{R}$.

При $a = 1$ решением (1) является $\varnothing$.

Таким образом, отсутствию решений исходной системы удовлетворяют условия

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1, \\ a^2 - 8 \le 0; \end{cases} \\ a = 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $a \in \left[1; 2\sqrt{2}\right]$.

Задача 7. *I вариант*.

Длины катетов прямоугольного треугольника равны 3 и 4. На его гипотенузе как на стороне внешним образом построен квадрат. Найти расстояние от вершины прямого угла треугольника до центра квадрата.

Решение.

Способ 1. 1) Пусть в прямоугольном треугольнике ABC $AC = 3$, $BC = 4$, $\angle C = 90°$. Обозначим $\angle CAB = \alpha$, тогда $\sin\alpha = 4/5$, $\cos\alpha = 3/5$.

2) Пусть O — центр квадрата, построенного на гипотенузе AB. Около четырёхугольника $ABCO$ можно описать окружность, окружность с диаметром $2R = AB = 5$.

3) По теореме синусов $\dfrac{CO}{\sin\angle CAO} = 2R$, откуда

$CO = 2R\sin\angle CAO = 5\sin(\alpha + 45°) = 7\sqrt{2}/2$.

Способ 2. 1) Заметим, что точки A, C, B, O лежат на одной окружности с диаметром AB, и, следовательно, $\angle AOC = \angle ABC$.

2) По теореме косинусов для треугольника AOC

$$AC^2 = AO^2 + CO^2 - 2\,AO\cdot CO\cos\angle AOC,$$

$$3^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 + CO^2 - 2\cdot 5\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot CO\cdot\frac{4}{5},$$

$$2\cdot CO^2 - 8\sqrt{2}\cdot CO + 7 = 0,$$

$CO = \dfrac{4\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{2}$. Условию задачи удовлетворяет больший корень.

Ответ: $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$.

Задача 7. *II вариант*.

Углы при основании равнобедренного треугольника ABC с основанием AC равны 75°. В каком отношении, считая от вершины C, высота BD делит высоту CE?

Решение.

Способ 1. 1) Пусть $AH = HC = a$, $\angle A = \alpha = 75°$. Тогда $CE = AC \sin \angle A = 2a \sin \alpha$.

2) Пусть $K = CE \cap BH$. $\angle CAE = \angle CKH$ как углы с взаимно перпендикулярными сторонами,

$$CK = \frac{CH}{\sin \angle CKH} = \frac{a}{\sin \alpha};$$

$$KE = CE - CK = \frac{a\left(2\sin^2 \alpha - 1\right)}{\sin \alpha} = -\frac{a \cos 2\alpha}{\sin \alpha}.$$

3) $\frac{CK}{KE} = -\frac{1}{\cos 2\alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Способ 2. 1) Обозначим $AB = BC = b$.

Тогда $CH = BC \sin \angle CBH = b \sin 15°$,

$$CK = \frac{CH}{\cos \angle HCK} = \frac{CH}{\cos 15°} = \frac{BC \sin 15°}{\cos 15°} = b \operatorname{tg} 15°.$$

2) $BE = BC \cos 30° = b\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) $KE = BE \operatorname{tg} \angle KBE = b\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} 15°$.

4) $\frac{CK}{KE} = \frac{b \operatorname{tg} 15°}{b\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} 15°} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Задача 8. *I вариант*.

Найти наименьшее значение выражения

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-6)^2+(y+2)^2}\,.$$

Решение. Рассмотрим точки $A(3;2)$, $B(6;-2)$, $C(x;y)$. Данное выражение представляет собой сумму расстояний $|AC|+|CB|$. Очевидно, эта сумма принимает наименьшее значение, равное $|AB|=5$, если точка $C\in[AB]$.

Ответ: 5.

Задача 8. *II вариант*.

Найти наибольшее значение выражения

$$\sqrt{(x+1)^2+(y+3)^2}-\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}\,.$$

Решение. Рассмотрим точки $A(-1;-3)$, $B(2;1)$, $C(x;y)$. Данное выражение представляет собой разность расстояний $|AC|-|CB|$. Эта разность принимает наибольшее значение, равное $|AB|=5$, если точка С находится на прямой (AB), так что $B\in[AC]$.

Ответ: 5.

Задача 9 (вар.1)

Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC, M — произвольная точка на окружности с центром в точке O. Доказать, что сумма $AM^2+BM^2+CM^2$ не зависит от выбора точки M на окружности.

Решение.

Заметим, что $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA},\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB},\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}$. $(*)$

Рассмотрим сумму $AM^2+BM^2+CM^2=\left(\overrightarrow{MA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MC}\right)^2$.

Подставим в данное равенство выражения $(*)$ и учтем, что $\left(\overrightarrow{MO}\right)^2 = R^2$ и сумма $\left(\overrightarrow{OA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OC}\right)^2$ не зависит от выбора точки M на окружности. Используя известный факт, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{O}$, приведем оставшиеся слагаемые к виду $\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \vec{O}$.

Утверждение доказано.

Задача 9 (вар.2)

Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, M — произвольная точка на окружности с центром в точке O. Доказать, что сумма $AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2$ не зависит от выбора точки M на окружности.

Решение.

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}.$$

$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD} \, (*)$$

Имеем

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 = \left(\overrightarrow{MA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MD}\right)^2.$$

Подставим в данное равенство выражения $(*)$ и учтем, что $\left(\overrightarrow{MO}\right)^2 = R^2$ и сумма $\left(\overrightarrow{OA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OD}\right)^2$ не зависит от выбора точки M на окружности. Используя известный факт, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{O}$, приведем оставшиеся слагаемые к виду

$$\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \vec{O}$$

.

Утверждение доказано.

Задача 10. *I вариант*.

Найти сумму: $\frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{13}+\ldots+$

$$+\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2-n+1}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2014^2-2014+1}.$$

Решение.

Воспользуемся формулой разности арктангенсов:

$$\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y=\operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy},\ xy>-1.$$

Имеем:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2-n+1}=\operatorname{arctg}\frac{n-(n-1)}{1+n(n-1)}=\operatorname{arctg}n-\operatorname{arctg}(n-1).$$

Тогда искомая сумма принимает вид:

$$(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0)+(\operatorname{arctg}2-\operatorname{arctg}1)+(\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2)+$$

$$+\ldots+(\operatorname{arctg}2014-\operatorname{arctg}2013)=\operatorname{arctg}2014.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}2014$.

Задача 10. *II вариант*.

Найти сумму: $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{13}+\ldots+$

$$+\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2014^2+2014+1}.$$

Решение.

Воспользуемся формулой разности арктангенсов:

$$\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y=\operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy},\ xy>-1.$$

Имеем:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}=\operatorname{arctg}\frac{(n+1)-n}{1+n(n+1)}=\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg}n.$$

Искомая сумма принимает вид:

$$(\operatorname{arctg}2-\operatorname{arctg}1)+(\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2)+(\operatorname{arctg}4-\operatorname{arctg}3)+$$

$$+\ldots+(\operatorname{arctg}2015-\operatorname{arctg}2014)=\operatorname{arctg}2015-\operatorname{arctg}1=$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{2014}{2016}=\operatorname{arctg}\frac{1007}{1008}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}2015-\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}\frac{1007}{1008}$.

ВАРИАНТ 1 (9 класс)

1. Последовательность строится по следующему закону. На первом месте стоит число 7, далее за каждым числом стоит сумма цифр его квадрата, увеличенная на 1. Какое число стоит на 2014 месте?

2. Дан параллелограмм *OACB*. Проведена прямая, отсекающая пятую часть стороны *OA* и четверть стороны *OB*, считая от вершины *O*. Какую часть эта прямая отсекает от диагонали *OC*?

3. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{\frac{(x-\sin^2 48^\circ-\cos^2 48^\circ)\left(x+2\cos 120^\circ\right)}{-x-2\sqrt{2}\cdot\sin 135^\circ}}.$$

4. Вторая машина догоняет первую, которая в начальный момент находится на некотором расстоянии *S*. Время, за которое вторая машина догонит первую на 1,5 часа больше времени, за которое первая машина может пройти путь *S*, и на 2 часа больше времени, за которое вторая машина может пройти этот путь. Найти время, за которое вторая машина догонит первую?

5. График квадратичной функции $y=x^2-2(b+2)x+b^2+3$ с вершиной в точке *A* пересекает ось *OX* в точках *C* и *B*, причем площадь треугольника *ABC* равна 125. Найдите *b*.

6. Найдите натуральное число, квадрат которого равен числу $\underbrace{11\ldots1}_{1580}\underbrace{55\ldots5}_{1580}+1$.

7. Решите уравнение $2\sqrt{x-1}+5x=\sqrt{(x^2+4)\cdot(x+24)}$.

8. Две окружности радиусов 8 и 5 пересекаются в точке *A*. Отрезок, соединяющий центры окружностей, равен 10, и пересекает большую окружность в точке *B*, меньшую окружность - в точке *C*. Найдите длину хорды большей окружности, проходящую через точки *A* и *B*, и длину хорды меньшей окружности, проходящую через точки *A* и *C*.

Задание	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Итого**
Баллы	10	10	10	10	12	16	16	16	**100**

ВАРИАНТ 2 (9 класс)

1. Последовательность строится по следующему закону. На первом месте стоит число 5, далее за каждым числом стоит сумма цифр его квадрата, уменьшенная на 1. Какое число стоит на 2014 месте?

2. Дан параллелограмм *OACB*. Проведена прямая, отсекающая седьмую часть стороны *OA* и треть стороны *OB*, считая от вершины *O*. Какую часть эта прямая отсекает от диагонали *OC*?

3. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{\frac{-\operatorname{tg}135^\circ\cdot x^2+8\sin 150^\circ\cdot x+4\sin^2 36^\circ+4\cos^2 36^\circ}{(x+\sin 90^\circ)}}.$$

4. Второй велосипедист догоняет первого, находящегося от него в начальный момент на некотором расстоянии *S*. Время, за которое второй велосипедист догонит первого на 1 минуту больше, чем время, затрачиваемое вторым на прохождение пути *S*, и на 8 минут меньше, чем время, за которое первый может проехать этот путь. Сколько времени требуется второму на прохождение пути *S*?

5. График квадратичной функции $y=x^2-2(b+3)x+b^2+5$ с вершиной в точке *K* пересекает ось *OX* в точках *M* и *N*, причем площадь треугольника *KMN* равна 64. Найдите *b*.

6. Найдите натуральное число, квадрат которого равен числу $\underbrace{44\ldots4}_{1580}\underbrace{88\ldots8}_{1580}+1$.

7. Решите уравнение $2\sqrt{x-2}+6x=\sqrt{\left(x^2+4\right)\cdot\left(x+34\right)}$.

8. Две окружности радиусов 5 и 3 пересекаются в точке *A*. Отрезок, соединяющий центры окружностей, равен 6, и пересекает большую окружность в точке *B*, меньшую окружность - в точке *C*. Найдите длину хорды большей окружности, проходящую через точки *A* и *B*, и длину хорды меньшей окружности, проходящую через точки *A* и *C*.

Задание	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Итого**
Баллы	10	10	10	10	12	16	16	16	**100**

Критерии оценивания заданий олимпиады 9 класс:

Для заданий 1-4

+ - 10 баллов - полное обоснованное решение задачи.

$\pm$ - 8 баллов - арифметическая ошибка в конце решения задачи; ошибка при выписывании ответа.

$\frac{1}{2}$ - 6 баллов - получены существенные промежуточные результаты.

$\mp$ - 2 балла - получены некоторые промежуточные результаты; арифметическая ошибка допущена вначале решения, которая, при правильном ходе решения задачи, возможно, привела к неверному ответу.

$-$ - 0 баллов- решение задачи неверно.

«нет» - решение задачи отсутствует.

Аналогично, для задания 5

+ - 12 баллов

$\pm$ - 9 баллов

$\frac{1}{2}$ - 6 баллов

$\mp$ - 3 балла

Аналогично, для заданий 6-8

+ - 16 баллов

$\pm$ - 12 баллов

$\frac{1}{2}$ - 8 баллов

$\mp$ - 4 балла

Решение задач (9 класс)

1а. Последовательность строится по следующему закону. На первом месте стоит число 7, далее за каждым числом стоит сумма цифр его квадрата, увеличенная на 1. Какое число стоит на 2014 месте?

Решение. Вычислим несколько первых членов последовательности: 7; 14; 17; 20; 5; 8; 11; 5; … — число 5 повторилось. Значит, у последовательности есть период длины 3: числа 5; 8; 11 далее будут повторяться. На пятом месте — пятерка, тогда для любого $k > 0$ на $(3k + 2)$-м месте также будет пятерка, на 3к+3 или на 3к-м (к>1) месте - будет 8, а на 3к+1-м (k>1) месте будет стоять 11. Так как $2014 = 3 \times 671 + 1$, то 2014-м месте стоит число 11. Ответ: 11.

1б. Последовательность строится по следующему закону. На первом месте стоит число 5, далее за каждым числом стоит сумма цифр его квадрата, уменьшенная на 1. Какое число стоит на 2014 месте?

Решение. Вычислим несколько первых членов последовательности: 5; 6; 8; 9; 8; 9; 8; … — число 8 повторилось. Значит, у последовательности есть период длины 2: числа 8; 9 далее будут повторяться. На третьем месте — восьмерка, тогда для любого $k > 0$ на $(2k + 1)$-м месте также будет восьмерка, на 2к+2 или на 2к - м, (к>1) месте - будет стоять 9. Так как $2014 = 2 \times 1007$, то 2014-м месте стоит число 9.

Ответ: 9.

2а Дан параллелограмм *OACB*. Проведена прямая, отсекающая пятую часть стороны *OA* и четверть стороны *OB*, считая от вершины *O*. Какую часть эта прямая отсекает от диагонали *OC*?

Решение.

Через все точки деления на стороне *OA* и точку *A* проведем пять параллельных прямых, затем разделим сторону *AC* на четыре равные части и проведем еще три прямые. Диагонали *OC* разделится этими прямыми на 9 равных частей. Ответ: 1/9.

2б. Дан параллелограмм *OACB*. Проведена прямая, отсекающая седьмую часть стороны *OA* и треть стороны *OB*, считая от вершины *O*. Какую часть эта прямая отсекает от диагонали *OC*?

Решение.

Через все точки деления на стороне *OA* и точку *A* проведем семь параллельных прямых, затем разделим сторону *AC* на три равные части и проведем еще две прямые. Диагонали *OC* разделится этими прямыми на 10 равных частей. Ответ: 1/10.

3а. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{\frac{(x-\sin^2 48^\circ-\cos^2 48^\circ)\left(x+2\cos 120^\circ\right)}{-x-2\sqrt{2}\cdot\sin 135^\circ}}.$$

Решение. $\frac{(x-\sin^2 48^\circ-\cos^2 48^\circ)\left(x+2\cos 120^\circ\right)}{-x-2\sqrt{2}\cdot\sin 135^\circ}\geq 0\Leftrightarrow\frac{(x-1)^2}{-x-2}\geq 0$

Ответ: $(-\infty;-2)\cup\{1\}$.

3б. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{\frac{-\operatorname{tg}135^\circ\cdot x^2+8\sin 150^\circ\cdot x+4\sin^2 36^\circ+4\cos^2 36^\circ}{(x+\sin 90^\circ)}}.$$

Решение.

$$\frac{-\operatorname{tg}135^\circ\cdot x^2+8\sin 150^\circ\cdot x+4\sin^2 36^\circ+4\cos^2 36^\circ}{(x+\sin 90^\circ)}\geq 0\Leftrightarrow\frac{(x+2)^2}{x+1}\geq 0$$

Ответ: $(-1;+\infty)\cup\{-2\}$

4а. Вторая машина догоняет первую, которая в начальный момент находится на некотором расстоянии S. Время, за которое вторая машина догонит первую на 1,5 часа больше времени, за которое первая машина может пройти путь S, и на 2 часа больше времени, за которое вторая машина может пройти этот путь. Найти время, за которое вторая машина догонит первую?

Решение. x – скор 1 маш; y-скор 2 маш; $\frac{S}{y-x}>\frac{S}{x}$ на 1,5 ч; $\frac{S}{y-x}>\frac{S}{y}$ на 2 ч; $\frac{S}{y-x}=?$

$$\begin{cases}\frac{S}{y-x}-\frac{S}{x}=\frac{3}{2}\\ \frac{S}{y-x}-\frac{S}{y}=2;\end{cases}\quad\begin{cases}\frac{Sx-Sy+Sx}{x(y-x)}=\frac{3}{2}\\ \frac{Sy-Sy+Sx}{y(y-x)}=2;\end{cases}\quad\begin{cases}\frac{(2x-y)S}{x(y-x)}=\frac{3}{2}\\ \frac{Sx}{(y-x)y}=2;\end{cases}\quad\frac{(2x-y)\cdot(y-x)yS}{x(y-x)x}=\frac{3}{4};\ \frac{(2x-y)y}{x^2}=\frac{3}{4};$$

$3x^2-8xy+4y^2=0;\ x=\frac{4y\pm 2y}{3};\ x=\frac{2y}{3}$ или $x=3y-$ не подходит; S = y; $\frac{S}{y-x}=3$

Ответ: 3 ч

4б. Второй велосипедист догоняет первого, находящегося от него в начальный момент на некотором расстоянии S. Время, за которое второй велосипедист догонит первого на 1 минуту больше, чем время, затрачиваемое вторым на прохождение пути S, и на 8 минут меньше, чем

время, за которое первый может проехать этот путь. Сколько времени требуется второму на прохождение пути S?

Решение. x – скор 1-го; y-скор 2-го; $\frac{S}{y-x} > \frac{S}{y}$ на 1 мин; $\frac{S}{y-x} < \frac{S}{x}$ на 8 мин; $\frac{S}{y} = ?$

$$\begin{cases} \frac{S}{y-x} - \frac{S}{y} = 1, \\ \frac{S}{x} - \frac{S}{y-x} = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{Sy-Sy+Sx}{(y-x)y} = 1, \\ \frac{Sy-Sx-Sx}{(y-x)x} = 8; \end{cases} \quad \frac{S(y-2x)\cdot y(y-x)}{x(y-x)Sx} = 8;\ 8x^2 + 2xy - y^2 = 0;\ x = \frac{-y \pm 3y}{8};$$

$x = \frac{y}{4}$; $x = -\frac{y}{2}$ не подходит; $S = 3y$; $\frac{S}{y} = 3$. Ответ: 3 мин

5а. График квадратичной функции $y = x^2 - 2(b+2)x + b^2 + 3$ с вершиной в точке A пересекает ось OX в точках C и B, причем площадь треугольника ABC равна 125. Найдите b.

Решение. Высота треугольника ABC равна $y_в = \frac{-D}{4}$, основание $CB = x_2 - x_1 = \sqrt{D}$. Значит, площадь треугольника ABC равна $S = -\frac{D\sqrt{D}}{8}$.

$D = 4(b+2)^2 - 4(b^2+3) = 16b + 4$. Имеем $\frac{\sqrt{(16b+4)^3}}{8} = 125$, откуда $b = 6$.

Ответ: 6.

5б. График квадратичной функции $y = x^2 - 2(b+3)x + b^2 + 5$ с вершиной в точке K пересекает ось OX в точках M и N, причем площадь треугольника KMN равна 64. Найдите b.

Решение. Высота треугольника ABC равна $y_в = \frac{-D}{4}$, основание $CB = x_2 - x_1 = \sqrt{D}$. Значит, площадь треугольника ABC равна $S = -\frac{D\sqrt{D}}{8}$.

$D = 4(b+3)^2 - 4(b^2+5) = 24b + 16$. Имеем $\frac{\sqrt{(24b+16)^3}}{8} = 64$, откуда $b = 2$. Ответ: 2.

6а. Найдите натуральное число, квадрат которого равен числу $\underbrace{11\ldots1}_{1580}\underbrace{55\ldots5}_{1580} + 1$.

Решение. Выполним несколько преобразований и получим ответ.

$\underbrace{111\ldots1}_{n}\underbrace{55\ldots5}_{n} + 1 = \underbrace{111\ldots1}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{n} + 5\underbrace{11\ldots1}_{n} + 1 =$

$$= \underbrace{111\ldots1}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{n} - \underbrace{111\ldots1}_{n} + 6\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n} + 1 =$$

$$= \underbrace{11\ldots1}_{n}\cdot(10^n - 1) + 6\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n} + 1 = \left(\underbrace{33\ldots3}_{n}\right)^2 + 2\left(\underbrace{33\ldots3}_{n}\right) + 1 =$$

$$= \left(\underbrace{33\ldots3}_{n} + 1\right)^2$$

Ответ: $\underbrace{33\ldots3}_{1579}4$.

6б. Найдите натуральное число, квадрат которого равен числу $\underbrace{44\ldots4}_{1580}\underbrace{88\ldots8}_{1580}+1$.

Решение. Выполним несколько преобразований и получим ответ.

$$\underbrace{444\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n} + 1 = 4\cdot\underbrace{111\ldots1}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{n} + 8\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n} + 1 =$$

$$= 4\cdot\underbrace{111\ldots1}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{n} + 12\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n} - 4\cdot\underbrace{111\ldots1}_{n} + 1 =$$

$$= 4\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n}\cdot(10^n - 1) + 12\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n} + 1 = \left(\underbrace{66\ldots6}_{n}\right)^2 + 2\left(\underbrace{66\ldots6}_{n}\right) + 1 =$$

$$= \left(\underbrace{66\ldots6}_{n} + 1\right)^2$$

Ответ: $\underbrace{66\ldots6}_{1579}7$.

7а. Решите уравнение $2\sqrt{x-1} + 5x = \sqrt{(x^2+4)\cdot(x+24)}$

Решение: Введем векторы:

$\overline{m} = (2; x)$; $\overline{n} = \left(\sqrt{x-1}; 5\right)$,

Тогда $|\overline{m}\cdot\overline{n}| = 2\sqrt{x-1} + 5x \le |\overline{m}|\cdot|\overline{n}| = \sqrt{(x^2+4)(x+24)}$

Так как равенство возможно лишь для коллинеарных векторов, то имеем уравнение

$\frac{\sqrt{x-1}}{2} = \frac{5}{x}$; $x = 5$. Ответ: 5

7б. Решите уравнение $2\sqrt{x-2} + 6x = \sqrt{(x^2+4)\cdot(x+34)}$

Решение: Введем векторы:

$\overline{m} = (2; x)$; $\overline{n} = \left(\sqrt{x-2}; 6\right)$, Тогда $|\overline{m}\cdot\overline{n}| = 2\sqrt{x-2} + 6x \le |\overline{m}|\cdot|\overline{n}| = \sqrt{(x^2+4)(x+34)}$. Так как равенство возможно лишь для коллинеарных векторов, то имеем уравнение

$\frac{\sqrt{x-2}}{2} = \frac{6}{x}$; $x = 6$. Ответ: 6.

8а. Две окружности радиусов 8 и 5 пересекаются в точке A. Отрезок, соединяющий центры окружностей, равен 10, и пересекает большую окружность в точке B, меньшую окружность - в точке C. Найдите длину хорды большей окружности, проходящую через точки A и B, и длину хорды меньшей окружности, проходящую через точки A и C.

Решение. Сначала найдем длину отрезка AC. $O_1C = O_1O_2 - O_2C = 10 - 5 = 5$, следовательно, $BC = 3$, $O_1C = CO_2$ и отрезок AC является медианой треугольника O_1AO_2. По формуле для вычисления медианы $AC = \frac{\sqrt{78}}{2}$.

Треугольник ACO_2 равнобедренный, $AO_2 = O_2C = 5$, найдем $\cos\angle C = \frac{AC}{2 \cdot CO_2} = \frac{\sqrt{78}}{20}$. По теореме косинусов для треугольника ABC найдем $AB = \frac{2\sqrt{105}}{5}$.

Ответ: $AC = \frac{\sqrt{78}}{2}$, $AB = \frac{2\sqrt{105}}{5}$.

8б. Две окружности радиусов 5 и 3 пересекаются в точке A. Отрезок, соединяющий центры окружностей, равен 6, и пересекает большую окружность в точке B, меньшую окружность - в точке C. Найдите длину хорды большей окружности, проходящую через точки A и B, и длину хорды меньшей окружности, проходящую через точки A и C.

Решение аналогично решению 8а. Ответ: $AC = 2\sqrt{2}$, $AB = 2\sqrt{\frac{5}{3}}$.

ВАРИАНТ 1 (8 класс)

1. Найдите три числа, если первое составляет 70% второго, второе относится к третьему, как $0{,}4:\frac{3}{4}$, а сумма первого и третьего на 63 больше второго числа.

2. Шестизначное число начинается слева цифрой 1. Если эту цифру перенести с первого на последнее место, то вновь полученное число будет втрое больше. Какое это число?

3. Упростите выражение $14(15^{80}+15^{79}+...+15^2+16)+1$.

4. На сторонах BC, AC и AB треугольника ABC выбраны соответственно точки A_1, B_1 и C_1 так, что медианы A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 треугольника $A_1B_1C_1$ соответственно параллельны прямым AB, BC и CA. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 27.

5. Найдите натуральное число, квадрат которого равен числу $\underbrace{11...1}_{2014}\underbrace{55...5}_{2014}+1$.

6. Найдите все значения параметра a, при которых площадь фигуры, ограниченной на координатной плоскости прямыми $y=-a^2x+3a^2+2$, $y=-a^2x+2a^2+1$ и осями координат равна 8.

7. Дан равносторонний треугольник ABC. На стороне AB отмечена точка D, на стороне BC отмечена точка K, на стороне AC отмечены точки E и M так, что $AD+AE=KC+CM=AB$, а прямые DM и KE пересекаются вне треугольника ABC. Найдите угол между прямыми DM и KE.

Задание	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**Итого**
Баллы	12	12	12	16	16	16	16	**100**

ВАРИАНТ 2 (8 класс)

1. Три числа относятся между собой, как $\frac{1}{7}:\frac{1}{2}:\frac{1}{5}$, а четвертое число составляет 20% второго. Найдите эти числа, если известно, что второе число на 8 больше суммы трех остальных.

2. Найдите минимальное шестизначное число, которое уменьшится в 3 раза при перенесении последней цифры, равной 1, на первое место.

3. Упростите выражение $14(15^{79}+15^{78}+...+15^2+16)+1$.

4. На сторонах BC, AC и AB треугольника ABC выбраны соответственно точки A_1, B_1 и C_1 так, что медианы A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 треугольника $A_1B_1C_1$ соответственно параллельны прямым AB, BC и CA. Найдите площадь треугольника BA_1C_1, если площадь треугольника ABC равна 18.

5. Найдите натуральное число, квадрат которого равен числу $\underbrace{44...4}_{2014}\underbrace{88...8}_{2014}+1$.

6. Найдите все значения параметра a, при которых площадь фигуры, ограниченной на координатной плоскости прямыми $y=-a^2x+2a^2+3$, $y=-a^2x+a^2+1$ и осями координат равна 12.

7. Дан равносторонний треугольник ABC. На стороне AB отмечена точка D, на стороне BC отмечена точка K, на стороне AC отмечены точки E и M так, что $AD+AE=KC+CM=AB$, а прямые DM и KE пересекаются внутри треугольника ABC. Найдите угол между прямыми DM и KE.

Задание	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**Итого**
Баллы	12	12	12	16	16	16	16	**100**

Критерии оценивания заданий олимпиады 8 класс:

Для заданий 1-3

+ - 12 баллов - полное обоснованное решение задачи.

$\pm$ - 9 баллов - арифметическая ошибка в конце решения задачи; ошибка при выписывании ответа.

$\frac{1}{2}$ - 6 баллов - получены существенные промежуточные результаты.

$\mp$ - 3 балла - получены некоторые промежуточные результаты; арифметическая ошибка допущена вначале решения, которая, при правильном ходе решения задачи, возможно, привела к неверному ответу.

$-$ - 0 баллов- решение задачи неверно.

«нет» - решение задачи отсутствует.

Аналогично, для заданий 4-7

+ - 16 баллов

$\pm$ - 12 баллов

$\frac{1}{2}$ - 8 баллов

$\mp$ - 4 балла

Решение задач

1а. Найти три числа, если первое составляет 70% второго, второе относится к третьему, как 0,4:$\frac{3}{4}$, а сумма первого и третьего на 63 больше второго числа.

$x = 0{,}7y; y: z = 8:15; x + z = y + 63$. Ответ: 28,40,75.

1б. Три числа относятся между собой, как $\frac{1}{7}:\frac{1}{2}:\frac{1}{5}$, а четвертое число составляет 20% второго. Найти эти числа, если известно, что второе число на 8 больше суммы трех остальных.

$y = \frac{10}{35}y + \frac{14}{35}y + +0{,}2y = 8$. Ответ: 20,70,28,14.

2а. Шестизначное число начинается слева цифрой 1. Если эту цифру перенести с первого на последнее место, то вновь полученное число будет втрое больше. Какое это число?

Пусть x – первоначальное число.

Отбросив, первую цифру получим $x - 10^5$

Дописав эту цифру справа, получим $(x - 10^5) \cdot 10 + 1$

Условие задачи можем переписать в виде уравнения

$3x = (x - 10^5) \cdot 10 + 1$ или

$3x = 10x - 10^6 + 1$ или

$7x = 10^6 - 1$ или $x = 142857$

Ответ: 142857.

2б. Найти минимальное шестизначное число, которое уменьшится в 3 раза при перенесении последней цифры, равной 1, на первое место.

Запишем условие задачи в виде уравнения:

$\overline{abcde1} = 3 * \overline{1abcde}$,

Обозначим искомое число переменной $\alpha: \alpha = \overline{abcde}$. Из условия следует, что

$10\alpha + 1 = 3(\alpha + 100000)$, откуда $7\alpha = 299999$ и $\alpha = 42857$

Ответ: 428571.

3а. Упростите выражение $14(15^{80}+15^{79}+...+15^2+16)+1$.

Решение.

$14(15^{80}+15^{79}+...+15^2+16)+1=(15-1)(15^{80}+15^{79}+...+15^2+15+1)+1=$

$15^{81}+15^{80}+...+15^2+15-\left(15^{80}+15^{79}+...+15^2+15+1\right)+1=15^{81}$

Ответ: 15^{81}.

3б. Упростите выражение $14(15^{79}+15^{78}+...+15^2+16)+1$.

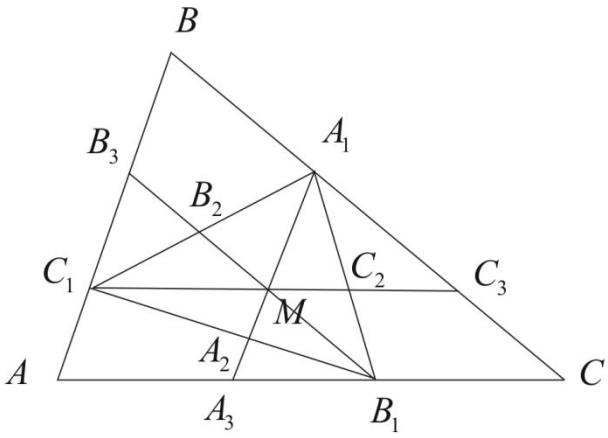
Решение.

$14(15^{79}+15^{78}+...+15^2+16)+1=(15-1)(15^{79}+15^{78}+...+15^2+15+1)+1=$

$15^{80}+15^{79}+...+15^2+15-\left(15^{79}+15^{78}+...+15^2+15+1\right)+1=15^{80}$

Ответ: 15^{80}.

4а. На сторонах BC, AC и AB треугольника ABC выбраны соответственно точки A_1, B_1 и C_1 так, что медианы A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 треугольника $A_1B_1C_1$ соответственно параллельны прямым AB, BC и CA. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 27.



Решение. Пусть M - точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$, и A_3, B_3, C_3 - точки, в которых продолжения медиан пересекают стороны треугольника ABC. Так как медианы B_1B_2, C_1C_2 треугольника $A_1B_1C_1$ соответственно параллельны прямым BC и CA, то MC_3CB_1 - параллелограмм, следовательно, $MC_3=CB_1$. Далее, прямая MC_3 проходит через середину C_2 отрезка A_1B_1 и параллельна AC, значит, MC_3 является средней линией треугольника A_3A_1C, и $MC_3=CB_1=\frac{1}{2}A_3C$. Прямая MA_3 проходит через середину A_2 отрезка C_1B_1, значит, MA_3 - средняя линия треугольника B_3B_1A, то есть A_3 середина отрезка AB_1. Получаем, что точка B_1 делит сторону AC в отношении 2:1, считая от точки A. Аналогично, точка C_1 делит сторону AB в отношении 1:2, считая от точки A, точка A_1 делит сторону BC в отношении 2:1, считая от точки B. (*)

По теореме об отношении площадей треугольников, имеющих общий угол $S_{AB_1C_1}=\frac{AC_1}{AB}\cdot\frac{AB_1}{AC}\cdot S_{ABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}S_{ABC}=S_{A_1BC_1}=S_{A_1B_1C}$.

Отсюда

$$S_{A_1B_1C_1} = S_{ABC} - S_{AB_1C_1} - S_{A_1BC_1} - S_{A_1B_1C} = S_{ABC} - 3S_{AB_1C_1} = S_{ABC} - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} S_{ABC} = 9.$$

Ответ: 9.

4б. На сторонах BC, AC и AB треугольника ABC выбраны соответственно точки A_1, B_1 и C_1 так, что медианы A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 треугольника $A_1B_1C_1$ соответственно параллельны прямым AB, BC и CA. Найдите площадь треугольника BA_1C_1, если площадь треугольника ABC равна 18.

Смотри решение задачи 4а до (*) . По теореме об отношении площадей треугольников, имеющих общий угол $S_{AB_1C_1} = \frac{AC_1}{AB} \cdot \frac{AB_1}{AC} \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} S_{ABC} = 4$.

Ответ: 4.

5а. Найдите натуральное число, квадрат которого равен числу $\underbrace{11\ldots1}_{2014}\underbrace{55\ldots5}_{2014}+1$

Решение. Выполним несколько преобразований и получим ответ.

$$\underbrace{111\ldots1}_{n}\underbrace{55\ldots5}_{n}+1 = \underbrace{111\ldots1}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{n}+5\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n}+1 =$$

$$= \underbrace{111\ldots1}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{n} - \underbrace{111\ldots1}_{n} + 6\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n}+1 =$$

$$= \underbrace{11\ldots1}_{n}\cdot(10^n-1) + 6\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n}+1 = \left(\underbrace{33\ldots3}_{n}\right)^2 + 2\left(\underbrace{33\ldots3}_{n}\right)+1 =$$

$$= \left(\underbrace{33\ldots3}_{n}+1\right)^2$$

Ответ: $\underbrace{33\ldots34}_{2013}$.

5б. Найдите натуральное число, квадрат которого равен числу $\underbrace{44\ldots4}_{2014}\underbrace{88\ldots8}_{2014}+1$.

Решение. Выполним несколько преобразований и получим ответ.

$$\underbrace{444\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n}+1 = 4\cdot\underbrace{111\ldots1}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{n}+8\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n}+1 =$$

$$= 4\cdot\underbrace{111\ldots1}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{n} + 12\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n} - 4\cdot\underbrace{111\ldots1}_{n}+1 =$$

$$= 4\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n}\cdot(10^n-1) + 12\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n}+1 = \left(\underbrace{66\ldots6}_{n}\right)^2 + 2\left(\underbrace{66\ldots6}_{n}\right)+1 =$$

$$= \left(\underbrace{66\ldots6}_{n}+1\right)^2$$

Ответ: $\underbrace{66\ldots67}_{2013}$.

6а. Найдите все значения параметра a, при которых площадь фигуры, ограниченной на координатной плоскости прямыми $y=-a^2x+3a^2+2$, $y=-a^2x+2a^2+1$ и осями координат равна 8.

Решение. Угловые коэффициенты прямых не равны нулю, иначе не будет ограниченной на плоскости фигуры. При любом значении параметра прямые параллельны и имеют отрицательный угловой коэффициент. Так как всегда $3a^2+2>2a^2+1$, то первая прямая расположена выше второй, и заданная фигура является трапецией, расположенной в первой четверти. Найдем площадь трапеции как разность площадей треугольников, образованных осями координат и данными прямыми. Прямые пересекают ось OX в точках, абсциссы которых равны $\frac{3a^2+2}{a^2}$ и $\frac{2a^2+1}{a^2}$, соответственно. Тогда $S=\frac{(3a^2+2)^2}{2a^2}-\frac{(2a^2+1)^2}{2a^2}=8$, откуда $5a^4-8a^2+3=0\Leftrightarrow a=\pm1,\ a=\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$.

Ответ: $a=\pm1,\ a=\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$.

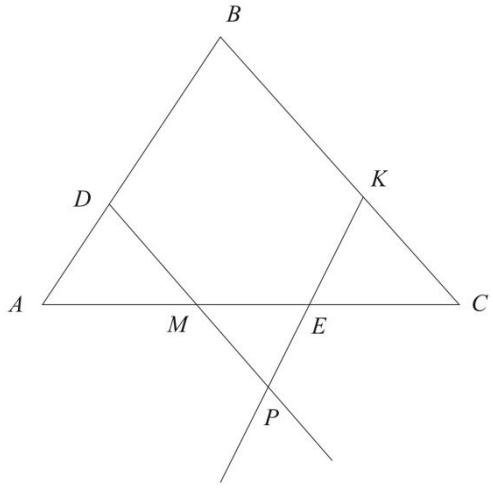
6б. Найдите все значения параметра a, при которых площадь фигуры, ограниченной на координатной плоскости прямыми $y=-a^2x+2a^2+3$, $y=-a^2x+a^2+1$ и осями координат равна 12.

Прямые пересекают ось OX в точках, абсциссы которых равны $\frac{2a^2+3}{a^2}$ и $\frac{a^2+1}{a^2}$, соответственно. Тогда $S=\frac{(2a^2+3)^2}{2a^2}-\frac{(a^2+1)^2}{2a^2}=12$, откуда $3a^4-14a^2+8=0\Leftrightarrow a=\pm2,\ a=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ответ: $a=\pm2,\ a=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

7а. Дан равносторонний треугольник ABC. На стороне AB отмечена точка D, на стороне BC отмечена точка K, на стороне AC отмечены точки E и M так, что $AD+AE=KC+CM=AB$, а прямые DM и KE пересекаются вне треугольника ABC. Найдите угол между прямыми DM и KE.

Решение. По условию, $CE = AC - AE = AD$, аналогично, $CK = AM$. Следовательно, треугольники MAD и KCE равны. Значит, $\angle MPE = 180^\circ - \angle PME - \angle PEM =$
$= 180^\circ - \angle EKC - \angle CEK = \angle C = 60^\circ$.



Ответ: 60°.

Ответ: 60°.

7б. Дан равносторонний треугольник ABC. На стороне AB отмечена точка D, на стороне BC отмечена точка K, на стороне AC отмечены точки E и M так, что $AD + AE = KC + CM = AB$, а прямые DM и KE пересекаются внутри треугольника ABC. Найдите угол между прямыми DM и KE.

Решение совпадает с решением 7а.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА ОЛИМПИАДЫ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА «ШАГ В БУДУЩЕЕ» ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ 8-10 КЛАССОВ 2013-2014 УЧЕБНОГО ГОДА.

Вариант 8 класс, 1 тур 2013-2014 учебного года.

Задача 1. Сравнить числа $\frac{29^{1563}+1}{29^{1564}+1}$ и $\frac{29^{1564}+1}{29^{1565}+1}$.

Задача 2. Сумма положительных чисел $a+b+c=1580$. Вычислите значение суммы $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+b}$, если $\frac{c}{a+b}+\frac{b}{a+c}+\frac{a}{b+c}=76$.

Задача 3. В школе 400 учащихся ежедневно покупают завтрак, стоимость которого 30 рублей. Если столовая поднимет цену на завтрак, то повышение на каждые 5 рублей приведет к тому, что 10 школьников начнут носить завтрак из дома. Если, однако, цена станет выше 100 рублей, то никто из учащихся не будет завтракать в столовой. Когда цена была поднята, столовая получила за день на 3200 рублей больше, чем обычно. Сколько школьников перестали покупать завтрак в столовой?

Задача 4. Решите в целых числах уравнение $x^3 - y - 2013 = yx^2 + x.$

Задача 5. Известно, что прямая *l* проходит через точку с координатами $(2;1)$ и площадь треугольника, ограниченного на плоскости прямой *l*, прямой $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ и осью *OX* равна 4. Найдите уравнение прямой *l*.

Задача 6. На сторонах *AB* и *CB* произвольного треугольника *ABC* построили произвольные параллелограммы *ABQG* и *CBEF* так, что прямые *GQ* и *EF* пересекаются в точке *X*. Докажите, что сумма площадей этих параллелограммов равна площади параллелограмма, одна сторона которого совпадает с отрезком *AC*, а другая параллельна и равна отрезку *BX*.

Вариант 9 класс, 1 тур 2013-2014 учебного года.

Задача 1.Вычислите без помощи калькулятора $\sqrt{2007\cdot 2009\cdot 2011\cdot 2013+16}$**.**

Задача 2.Остаток от деления числа *a* на 6 и 7 равен 2 и 3, соответственно. Найдите остаток от деления числа *a* на 42.

Задача 3. Из пункта по одному шоссе выезжают одновременно 2 автомобиля, а через час вслед за ними выезжает третий. Еще через час расстояние между третьим и первым автомобилем уменьшилось в два раза, а между третьим и вторым - в три раза. Во сколько раз скорость первого автомобиля больше скорости второго? (Известно, что третий автомобиль не обогнал первых двух.)

Задача 4. В треугольник, две из трёх сторон которого равны 9 и 15, вписан параллелограмм так, что одна из его сторон, равная 6, лежит на третьей стороне треугольника, а диагонали параллелограмма параллельны двум данным сторонам треугольника. Найдите другую сторону параллелограмма и третью сторону треугольника.

Задача 5. Известно, что прямая *l* проходит через точку с координатами $(2;1)$, и площадь треугольника, ограниченного прямой *l*, прямой $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ и осью *OX* равна 4. Найдите уравнение прямой *l*.

Задача 6. Действительные числа *x*, *y*, *a* таковы, что $x+y=a+1$ и $xy=a^2-7a+16$. При каком значении параметра *a* сумма x^2+y^2 принимает наибольшее значение?

Вариант 10 класс, 1 тур 2013-2014 учебного года.

Задача 1. Вычислите без помощи калькулятора $\sqrt{2007\cdot 2009\cdot 2011\cdot 2013+16}$

Задача 2. Действительные числа x, y, a таковы, что $x+y=a+1$ и $xy=a^2-7a+16$. При каком значении параметра a сумма x^2+y^2 принимает наибольшее значение?

Задача 3. Даны четыре отрезка с длинами a, b, c, d. При помощи циркуля и линейки постройте отрезок длины $\sqrt{ab+cd}$.

Задача 4. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{p^2+1}+\sqrt{(q-p)^2+1}+\sqrt{(r-q)^2+1}+\sqrt{(s-r)^2+1}+\sqrt{(12-s)^2+1}$$

Задача 5. Пусть x и y удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 2|x|+|y|\geq 12, \\ |x+10|+2|y|\leq 12, \\ 5x+y^2+35\geq 0. \end{cases}$$

Какие значения может принимать выражение $\dfrac{1}{x^2+y^2}$?

Задача 6. Докажите, что любую треугольную призму с достаточно большой высотой можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении её боковой поверхности получился равносторонний треугольник.

Решения и критерии проверки заданий заочного тура олимпиады школьников «Шаг в будущее» МГТУ им. Н. Э. Баумана для 8-10 классов 2013-2014 учебного года

Решения заданий 8-го класса

Задача 1. Сравните числа $\frac{29^{1563}+1}{29^{1564}+1}$ и $\frac{29^{1564}+1}{29^{1565}+1}$.

Решение. $\frac{29^{1563}+1}{29^{1564}+1} > \frac{29^{1564}+1}{29^{1565}+1} \Leftrightarrow 1+29^2 > 2\cdot 29 \Leftrightarrow 28^2 > 0$.

Ответ: первое число больше.

Задача 2. Сумма положительных чисел $a+b+c=1580$. Вычислите значение суммы $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+b}$, если $\frac{c}{a+b}+\frac{b}{a+c}+\frac{a}{b+c}=76$.

Решение. $\left(a+b+c\right)\cdot\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+b}=\frac{c}{a+b}+\frac{b}{a+c}+\frac{a}{b+c}+3$.

Следовательно, $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+b}=\frac{79}{1580}=0{,}05$.

Ответ: 0,05.

Задача 3. В школе 400 учащихся ежедневно покупают завтрак, стоимость которого 30 рублей. Если столовая поднимет цену на завтрак, то повышение на каждые 5 рублей приведет к тому, что 10 школьников начнут носить завтрак из дома. Если, однако, цена станет выше 100 рублей, то никто из учащихся не будет завтракать в столовой. Когда цена была поднята, столовая получила за день на 3200 рублей больше, чем обычно. Сколько школьников перестали покупать завтрак в столовой?

Решение. Пусть стоимость завтрака поднялась на *x* рублей. Тогда перестанут покупать завтрак 2*x* школьников, а новая выручка составит $\left(400-2x\right)\left(x+30\right)$ рублей. Составим и решим уравнение:

$$(400-2x)(x+30)-12000=3200 \Leftrightarrow x^2-170x+1600=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=10 \\ x=160. \end{array}\right.$$

Корень $x=160$ не подходит (завтракать никто не будет), поэтому $x=10$, а число школьников, переставших покупать завтрак, равно 20.

Ответ: 20 школьников.

Задача 4. Решите в целых числах уравнение $x^3-y-2013=yx^2+x.$

Решение.

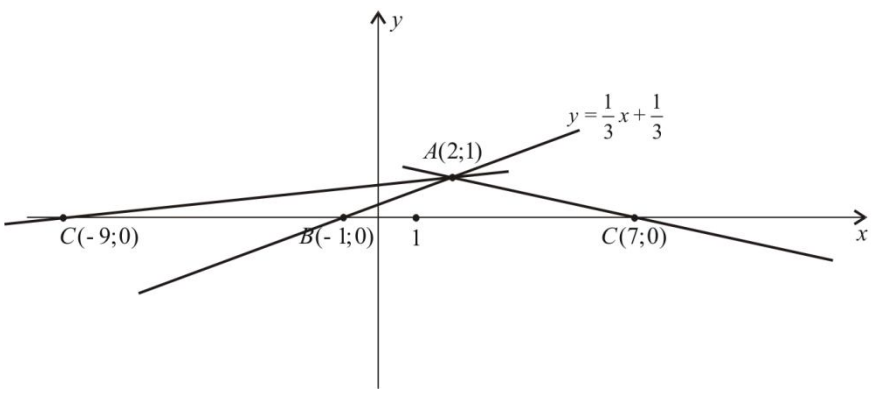
$$x^3+y-2013=yx^2+x \Leftrightarrow x^3+y-yx^2-x=2013 \Leftrightarrow (x-y)(x^2-1)=2013.$$

Делителями числа 2013 являются целые числа $\pm1, \pm3, \pm11, \pm61, \pm671, \pm2013$. Из условия, что x^2-1 является делителем числа 2013 и x - целое, получаем: $x^2-1=-1$ (при этом $x-y=-2013$) или $x^2-1=3$ (при этом $x-y=671$). Таким образом, решениями уравнения являются пары $(0;2013), (2;-669), (-2;-673).$

Ответ: $(0;2013), (2;-669), (-2;-673).$

Задача 5. Известно, что прямая *l* проходит через точку с координатами $(2;1)$ и площадь треугольника, ограниченного на плоскости прямой *l*, прямой $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ и осью *OX* равна 4. Найдите уравнение прямой *l*.

Решение. Пусть *A*(2;1), прямая *l* пересекает ось *OX* в точке *C*(*x*;0).

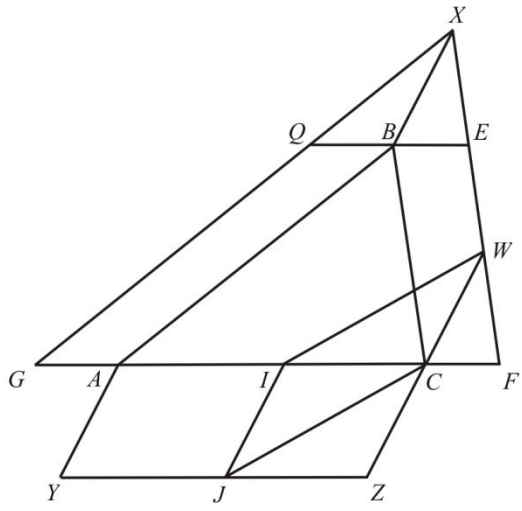


Найдем координаты точки пересечения прямой $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ с осью *OX*: *B*(-1;0).

Тогда треугольником, ограниченным на плоскости прямой *l*, прямой $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ и осью *OX* является треугольник *ABC* с высотой, проведенной к основанию *BC*, равной 1. Значит, $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot BC$, откуда *BC*=8, следовательно, *C*(7;0) или *C*(-9;0). Соответственно, получаем два уравнения прямой *l*: $y=-\frac{1}{5}x+\frac{7}{5}$, $y=\frac{1}{11}x+\frac{9}{11}$.

Ответ: $y=-\frac{1}{5}x+\frac{7}{5}$, $y=\frac{1}{11}x+\frac{9}{11}$.

Задача 6. На сторонах *AB* и *CB* произвольного треугольника *ABC* построили произвольные параллелограммы *ABQG* и *CBEF* так, что прямые *GQ* и *EF* пересекаются в точке *X*. Докажите, что сумма площадей этих параллелограммов равна площади параллелограмма, одна сторона которого совпадает с отрезком *AC*, а другая параллельна и равна отрезку *BX*.



Решение.

1. Построим на стороне *AC* параллелограмм такой, что *AY*=*CZ*=*BX* и *AY*||*CZ*||*BX*.

2. $BX\cap AC=I$, $BX\cap YZ=J$, $CZ\cap XF=W\Rightarrow BXWC$ - параллелограмм.

3. $S_{BXWC}=S_{IJZC}$, $S_{BXWC}=S_{BEFC}$, следовательно, $S_{BEFC}=S_{IJZC}$.

4. Аналогично доказываем, что $S_{ABQG}=S_{AIJY}$.

5. Из п. 3 и п. 4 имеем $S_{BEFC}+S_{ABQG}=S_{AYZC}$, что и требовалось доказать.

Критерии проверки заданий 8-го класса

Задача 1.

Баллы	
15	Обоснованно получен правильный ответ.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 2.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	Получена верная связь трех буквенных выражений, при вычислении допущена арифметическая ошибка.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 3.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	Уравнения составлены верно, решение содержит арифметическую ошибку.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 4.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	Получено две пары целых решений.
5	Получена только одна пара целых решений.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 5.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
15	Получен правильный ответ только в одном из двух возможных случаев.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 6.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	В решении получены существенные промежуточные результаты, необходимые для решения задачи.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Решения заданий 9-го класса

Задача 1. Вычислите без помощи калькулятора $\sqrt{2007\cdot 2009\cdot 2011\cdot 2013+16}$.

Решение. Пусть 2010=*a*, тогда

$\sqrt{2007\cdot 2009\cdot 2011\cdot 2013+16}=$

$\sqrt{(a-3)(a-1)(a+1)(a-3)+16}=\sqrt{(a^2-9)(a^2-1)+16}=\sqrt{a^4-10a^2+25}=$

$\sqrt{(a^2-5)^2}=\left|a^2-5\right|=\left|2010^2-5\right|=4040095.$

Ответ: 4040095.

Задача 2.Остаток от деления числа *a* на 6 и 7 равен 2 и 3, соответственно. Найдите остаток от деления числа *a* на 42.

Решение. Пусть *x* - наименьшее натуральное число такое, что *a*+*x* делится на 6 и на 7. Тогда $\begin{cases} a=6q+2 \\ a=7m+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+x=6q+2+x \\ a+x=7m+3+x \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$

Так как числа 6 и 7 взаимно просты, то *a*+*x* делится на 42, то есть $a+x=42k \Leftrightarrow a=42k-x=42k-4=42k-42+38=42(k-1)+38.$

Получаем, что остаток от деления числа *a* на 42 равен 38.

Ответ: 38.

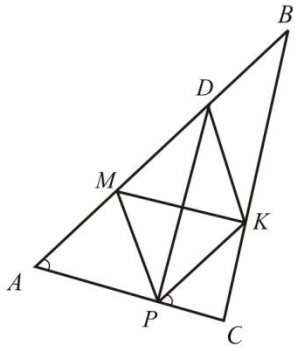
Задача 3.

$$S_{13}(1)=x \quad S_{12}(1)=y \quad S_{13}(2)=2x-z \quad S_{12}(2)=2y-z$$

$S_{13}(1)=2S_{13}(2) \quad S_{12}(1)=3S_{12}(2) \qquad\qquad x=2(2x-z) \quad y=3(2y-z)$

$x=\frac{2}{3}z \quad y=\frac{3}{5}z \quad \frac{x}{y}=\frac{10}{9}$

Задача 4. В треугольник, две из трёх сторон которого равны 9 и 15, вписан параллелограмм так, что одна из его сторон, равная 6, лежит на третьей стороне треугольника, а диагонали параллелограмма параллельны двум данным сторонам треугольника. Найдите другую сторону параллелограмма и третью сторону треугольника.



Решение. Пусть в треугольнике ABC сторона BC=15, сторона AC=9, сторона MD=6 параллелограмма $PMDK$ лежит на стороне AB треугольника, диагональ DP параллелограмма параллельна стороне BC треугольника ABC, а диагональ MK - стороне AC. Тогда MD=PK=6, четырехугольники $AMKP$ и $DBKP$ являются параллелограммами, значит, AM=PK=6 и DB=PK=6. Имеем AB=18.

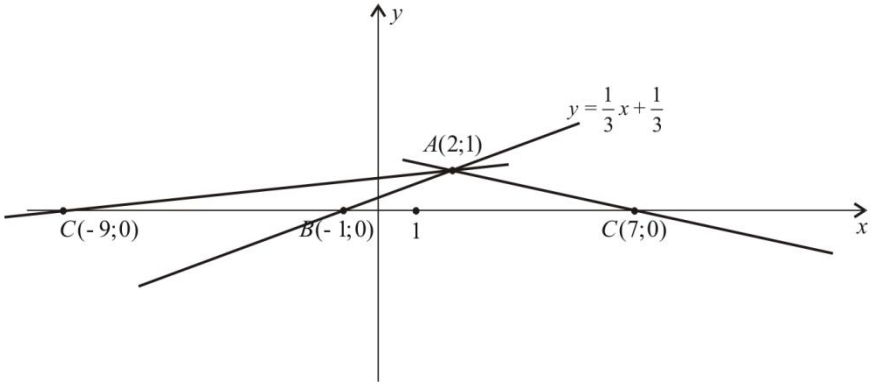
Треугольники CKP и ABC подобны по двум углам (угол C – общий, углы BAC и KPC равны как соответственные углы при параллельных прямых AB, PK и секущей AC). Значит, $\frac{KC}{BC}=\frac{PK}{AB}$, откуда $KC=\frac{PK}{AB}\cdot BC=\frac{6}{18}\cdot 15=5$ и $\frac{PC}{AC}=\frac{PK}{AB}$ откуда $PC=\frac{PK}{AB}\cdot AC=\frac{6}{18}\cdot 9=3$ и AP=AC-PC=9-3=6.

Из треугольника CPK по теореме косинусов имеем $\cos\angle KPC=\frac{PK^2+PC^2-KC^2}{2\cdot PK\cdot PC}=\frac{5}{9}$. Из треугольника PAM по теореме косинусов имеем $MP^2=AP^2+AM^2-2AP\cdot AM\cdot\cos\angle MAP=36+36-2\cdot 6\cdot 6\cdot\frac{5}{9}=32$, значит, $MP=4\sqrt{2}$.

Ответ: 18, $4\sqrt{2}$.

Задача 5. Известно, что прямая *l* проходит через точку с координатами $(2;1)$, и площадь треугольника, ограниченного прямой *l*, прямой $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ и осью *OX* равна 4. Найдите уравнение прямой *l*.

Решение. Пусть *A*(2;1), прямая *l* пересекает ось *OX* в точке *C*(*x*;0). Найдем координаты точки пересечения прямой $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ с осью *OX*: *B*(-1;0). Тогда треугольником, ограниченным на плоскости прямой *l*, прямой $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ и осью *OX* является треугольник *ABC* с высотой, проведенной к основанию *BC*, равной 1. Значит, $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot BC$, откуда *BC*=8, следовательно, *C*(7;0) или *C*(-9;0). Соответственно, получаем два уравнения прямой *l* : $y=-\frac{1}{5}x+\frac{7}{5}$, $y=\frac{1}{11}x+\frac{9}{11}$.



Ответ: $y=-\frac{1}{5}x+\frac{7}{5}$, $y=\frac{1}{11}x+\frac{9}{11}$.

Задача 6. Действительные числа *x*, *y*, *a* таковы, что $x+y=a+1$ и $xy=a^2-7a+16$. При каком значении параметра *a* сумма x^2+y^2 принимает наибольшее значение?

Решение. Выразим x^2+y^2 через $x+y$ и xy:

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(a+1)^2-2\left(a^2-7a+16\right)=$$
$$=-a^2+16a-31=-(a-8)^2+33.$$

Полученное выражение, очевидно, принимает свое наибольшее значение при $a = 8$.

Для ответа на вопрос задачи необходимо ещё учесть условие существования действительных чисел *x* и *y*, удовлетворяющих двум данным в условии уравнениям. Решая систему данных уравнений, например, относительно *x*, приходим к квадратному уравнению $x^2 - (a+1)x + a^2 - 7a + 16 = 0$.

Требование неотрицательности его дискриминанта приводит к ограничениям на значения параметра *a*:

$(a+1)^2 - 4(a^2 - 7a + 16) \geq 0$, или $-3a^2 + 30a - 63 \geq 0$, отсюда $3 \leq a \leq 7$.

На промежутке [3; 7] функция $f(a) = -(a-8)^2 + 33$ возрастает, и поэтому её наибольшее значение достигается при $a = 7$.

Ответ: 7.

Критерии проверки заданий 9-го класса

Задача 1.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	Получен правильный ответ без указания модуля буквенного выражения при извлечении корня из полного квадрата.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 2.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	Правильный ответ недостаточно обоснован, например, получено разложение числа $a/42$ без выделения целой части в явном виде.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 3.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	Соотношения для расстояний составлены верно, решение содержит арифметическую ошибку.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 4.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	Решение содержит арифметическую ошибку или найдено только значение AB.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 5.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
15	Рассмотрен только один из двух возможных случаев.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 6.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	Решение не учитывает условие существования действительных чисел x и y, удовлетворяющих двум данным в условии уравнениям.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Решения заданий 10-го класса

Задача 1. Вычислите без помощи калькулятора $\sqrt{2007\cdot 2009\cdot 2011\cdot 2013+16}$.

Решение. Пусть 2010=*a*, тогда

$$\sqrt{2007\cdot 2009\cdot 2011\cdot 2013+16}=$$
$$\sqrt{(a-3)(a-1)(a+1)(a-3)+16}=\sqrt{(a^2-9)(a^2-1)+16}=\sqrt{a^4-10a^2+25}=$$
$$\sqrt{(a^2-5)^2}=\left|a^2-5\right|=\left|2010^2-5\right|=4040095.$$

Ответ: 4040095.

Задача 2. Действительные числа *x*, *y*, *a* таковы, что $x+y=a+1$ и $xy=a^2-7a+16$. При каком значении параметра *a* сумма x^2+y^2 принимает наибольшее значение?

Решение. Выразим x^2+y^2 через $x+y$ и xy:

$$x^2+y^2=\left(x+y\right)^2-2xy=\left(a+1\right)^2-2\left(a^2-7a+16\right)=$$

$$=-a^2+16a-31=-\left(a-8\right)^2+33.$$

Полученное выражение, очевидно, принимает свое наибольшее значение при $a=8$.

Для ответа на вопрос задачи необходимо ещё учесть условие существования действительных чисел *x* и *y*, удовлетворяющих двум данным в условии уравнениям. Решая систему данных уравнений, например, относительно *x*, приходим к квадратному уравнению $x^2-\left(a+1\right)x+a^2-7a+16=0$.

Требование неотрицательности его дискриминанта приводит к ограничениям на значения параметра *a*:

$\left(a+1\right)^2-4\left(a^2-7a+16\right)\geq 0$, или $-3a^2+30a-63\geq 0$, отсюда $3\leq a\leq 7$.

На промежутке [3; 7] функция $f(a)=-(a-8)^2+33$ возрастает, и поэтому её наибольшее значение достигается при $a=7$.

Ответ: 7.

Задача 3. Даны четыре отрезка с длинами a, b, c, d. При помощи циркуля и линейки постройте отрезок длины $\sqrt{ab+cd}$.

Решение.

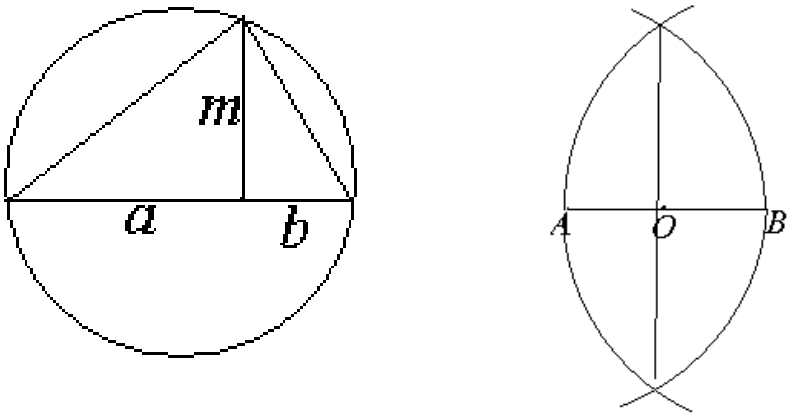


Рис.1

Пользуясь известными приемами построения окружности по ее диаметру и построения прямого угла (см. рис.1), построим отрезок длиной $m=\sqrt{ab}$ и, аналогичным образом, отрезок длиной $n=\sqrt{cd}$. Затем построим прямоугольный треугольник с катетами m, n. Его гипотенуза будет иметь длину $\sqrt{ab+cd}$.

Задача 4. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{p^2+1}+\sqrt{(q-p)^2+1}+\sqrt{(r-q)^2+1}+\sqrt{(s-r)^2+1}+\sqrt{(12-s)^2+1}$$

Решение. Рассмотрим на координатной плоскости точки $O(0;0)$, $P(1;p)$, $Q(2;q)$, $R(3;r)$, $S(4;s)$, $T(5;12)$. Данное выражение геометрически представляет собой сумму расстояний

$|OP|+|PQ|+|QR|+|RS|+|ST|$. Очевидно, значение этой суммы минимально и равно $|OT|=13$, если $P, Q, R, S \in [OT]$.

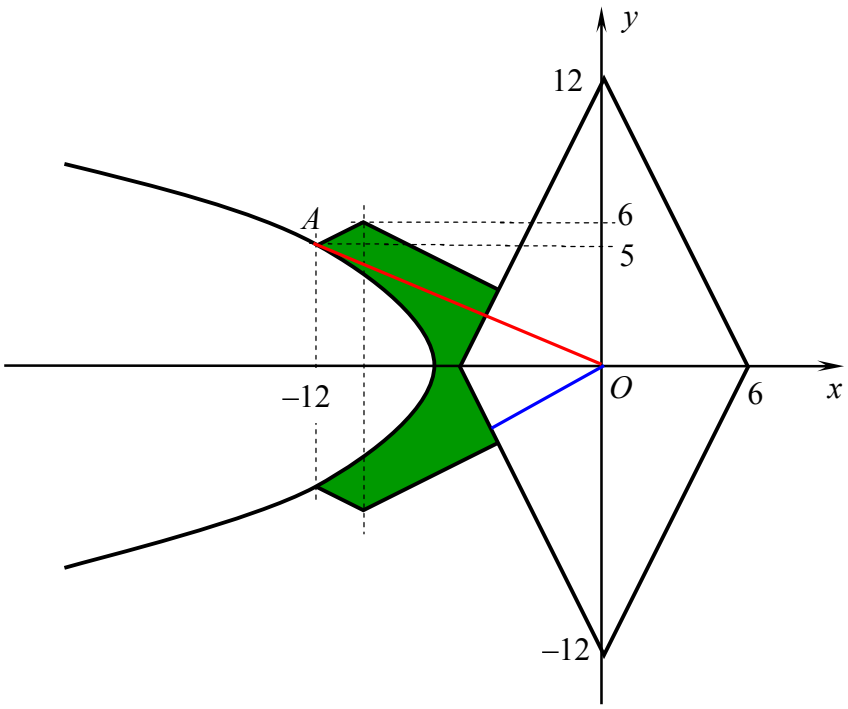
Ответ: 13.

Задача 5. Пусть x и y удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 2|x|+|y| \geq 12, \\ |x+10|+2|y| \leq 12, \\ 5x+y^2+35 \geq 0. \end{cases}$$

Какие значения может принимать выражение $\dfrac{1}{x^2+y^2}$?

Решение. Построим в координатной плоскости область, задаваемую данной системой. Первое неравенство описывает все точки плоскости за исключением внутренних точек ромба с координатами вершин $(-6;0)$, $(0;12)$, $(6;0)$, $(0;-12)$. Второе неравенство — точки плоскости, ограниченные ромбом с координатами вершин $(-22;0)$, $(-10;6)$, $(2;0)$, $(-10;-6)$. Третье неравенство — внешнюю область параболы $x=-\dfrac{1}{5}y^2-7$.



Область пересечения графиков всех трёх неравенств показана на рисунке.

Выражение $\dfrac{1}{x^2+y^2}$ задаёт величину, обратную квадрату расстояния до начала координат. Своё наименьшее значение оно принимает в точках $A(-12;5)$ и $A'(-12;-5)$ — там, где расстояние до начала координат наибольшее. Наибольшее значение данное выражение достигает в точках области, ближайших к началу координат; ими служат основания перпендикуляров, опущенных из начала координат на соответствующие стороны ромба, определяемого первым неравенством.

Ответ: $\left[\dfrac{1}{169};\dfrac{5}{144}\right]$.

Задача 6. Докажите, что любую треугольную призму с достаточно большой высотой можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении её боковой поверхности получился равносторонний треугольник.

Решение.

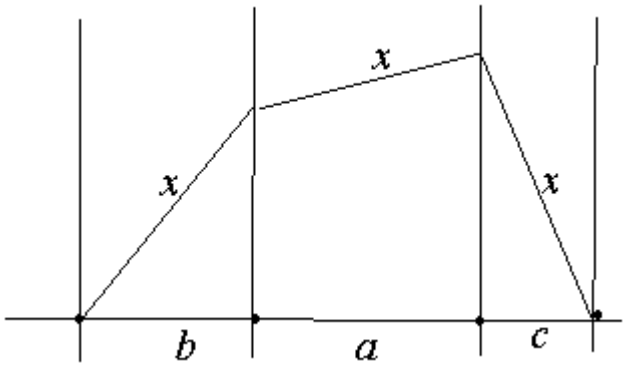


Рис.2

Рассмотрим развертку боковой поверхности призмы. Существование нужного сечения эквивалентно существованию некоторой ломаной с вершинами на четырех параллельных прямых развертки. Все три звена

ломаной должны иметь одинаковую длину, а концы – лежать на прямой, перпендикулярной этим прямым (см.рис.2).

Исходя из геометрии задачи, требуется доказать, что уравнение $\sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{x^2-b^2}=\sqrt{x^2-c^2}$ имеет решение при $a \geq b \geq c > 0$. В правой части уравнения и в левой части стоят возрастающие непрерывные по x функции. Обозначим их соответственно $f(x)$ и $\varphi(x)$. Нетрудно показать, что $f(a) < \varphi(a)$, и $f(a+b) > \varphi(a+b)$, то есть на промежутке $(a; a+b)$ данное уравнение имеет решение.

Критерии проверки заданий 10-го класса

Задача 1.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи. Правильный ответ представлен в любом виде.
10	Получен правильный ответ без указания модуля числа при извлечении корня из полного квадрата.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 2.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
5	Решение не учитывает условие существования действительных чисел x и y, удовлетворяющих двум данным в условии уравнениям.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 3.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	Ни на одном этапе решения не указывается, как при помощи циркуля и линейки построить прямой угол.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 4.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 5.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
15	Верно показаны области решений по каждому неравенству системы, но окончательный вывод неверен.
10	Верно показаны области решений по двум неравенствам системы, неверно найдена область решений третьего неравенства и системы в целом.
5	Верно показана области решений лишь по одному неравенству системы, окончательный вывод неверен.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 6.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	Построена развертка пирамиды, составлено уравнение для нахождения стороны равностороннего треугольника, но не доказано существование решения этого уравнения.
5	Построена развертка призмы. Уравнение для нахождения стороны правильного треугольника не составлено. Ответ «да».
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

ПРОТОКОЛ

утверждения вариантов заданий для проведения

заключительного этапа олимпиады школьников «Шаг в будущее»

по физике и математике

в МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2014 году

Перечень вопросов и структуру вариантов заданий для проведения олимпиады школьников «Шаг в будущее» по физике и математике утвердить.

Председатель Оргкомитета
Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
Ректор МГТУ им. Н. Э. Баумана А.А. Александров

«Утверждаю»
Ректор МГТУ им. Н.Э. Баумана
_____ А.А. АЛЕКСАНДРОВ
«___» _____ 2014г.

ПРАВИЛА
оценивания заданий заключительного этапа олимпиады школьников «Шаг в будущее», 2014 г.

Общеобразовательный предмет «Математика»

Максимальная сумма баллов за 10 задач варианта – 100.

Распределение баллов по задачам следующее:

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Баллы	8	8	8	8	10	10	12	12	12	12

Задачи 1,2,3,4

Степень решенности задачи	1	0,75	0,5	0,25	0
Баллы	8	6	4	2	0

Задачи 5,6

Степень решенности задачи	1	0,75	0,5	0,25	0
Баллы	10	8	5	2	0

Задачи 7, 8, 9, 10

Степень решенности задачи	1	0,75	0,5	0,25	0
Баллы	12	9	6	3	0

Общеобразовательный предмет «Физика», комплекс предметов «Техника и технология» (общеобразовательный предмет «Физика»), академическое соревнование «Профессор Жуковский»

Максимальная сумма баллов за 10 задач варианта – 100.

Распределение баллов по задачам следующее:

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Баллы	8	8	10	10	10	10	10	10	12	12

Задачи 1, 2

Степень решенности задачи	1	0,75	0,5	0,25	0
Баллы	8	6	4	2	0

Задачи 3, 4, 5, 6, 7, 8

Степень решенности задачи	1	0,75	0,5	0,25	0
Баллы	10	8	5	2	0

Задачи 9, 10

Степень решенности задачи	1	0,75	0,5	0,25	0
Баллы	12	9	6	3	0

Общеобразовательный предмет «Физика», комплекс предметов «Техника и технология»

Максимальная сумма баллов за 10 задач варианта – 50.

Распределение баллов по задачам следующее:

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Баллы	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6

Задачи 1, 2

Степень решенности задачи	1	0,75	0,5	0,25	0
Баллы	4	3	2	1	0

Задачи 3, 4, 5, 6, 7, 8

Степень решенности задачи	1	0,75	0,5	0,25	0
Баллы	5	4	3	1	0

Задачи 9, 10

Степень решенности задачи	1	0,75	0,5	0,25	0
Баллы	6	4	3	2	0

Председатель методической комиссии Б.В. Падалкин

Подготовили:
заместитель председателя методической комиссии
_____Ирьянов Н.Я.
члены методической комиссии
_____Паршев Л.П
_____Струков Ю.А.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ОЛИМПИАДАМ ПО МАТЕМАТИКЕ

1. Олимпиада школьников «Шаг в будущее». Демонстрационные варианты и задания для тренировки по физике и математике. Тематический сборник информационно-методических и образовательных материалов/Власова Е.А., Ирьянов Н.Я., Паршев Л.П., Струков Ю.А., Шишкина С.И.; Под ред. Н.Я. Ирьянова.- М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 199 с.
2. Олимпиада школьников «Шаг в будущее». Демонстрационные варианты и задания для тренировки по физике и математике. Тематический сборник информационно-методических и образовательных материалов/Власова Е.А., Ирьянов Н.Я., Паршев Л.П., Струков Ю.А., Шишкина С.И.; Под ред. Н.Я. Ирьянова.- М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012, 141 с.
3. Власова Е.А., Облакова Т.В. Математика. Учебное пособие для поступающих в вузы М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012.-303с.
4. Конкурсные задачи по математике и физике: Пособие для поступающих в МГТУ им. Н.Э.Баумана / Л.П.Паршев, А.Г. Андреев, Н.А. Гладков и Ю.А. Струков; Под ред С.В. Белова.- М.: Машиностроение, 1993.- 192с.
5. Справочное пособие для абитуриентов. Программы и содержание вступительных экзаменов по физике, математике, русскому языку и литературе литература / Сост.: Белов С.В., Камалова Р.А., Паршев Л.П., Струков Ю.А.; Под ред. С.В. Белова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.-144с.
6. Типовые варианты заданий вступительных испытаний в 2003 г. математика, физика, русский язык и литература / Сост. : Камалова Р.А., Паршев Л.П., Струков Ю.А.; Под ред. Н.Я. Ирьянова / МГТУ им. Н.Э. Баумана. – М., 2003.-45с.
7. Власова Е.А. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, ISBN 5-7038-2900-3, 2006.-115с.
8. Краткое изложение стандартных и нестандартных методов решения задач по элементарной математике: Учеб. пособие / И.А. Соловьев, Г.В. Арутюнян, Е.В. Марчевская и др. – М.: ГУЗ, 2005.-216с.
9. Ляпин А.А, Родионов Е.М, Синякова С.Л. Математика. Сборник задач. 4-е изд., перераб. и доп. - М.: Ориентир, 2006. - 392с.
10. Родионов Е.М. Справочник по математике для поступающих в вузы. Решение задач с параметрами. - М.: МЦ "Аспект", 1992. - 144с.
11. Элементарная геометрия. Методы решения задач : учеб. пособие / Г.В. Арутюнян, Е.В. Марчевская, И.К. Марчевский. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2010.-222с.
12. Будак А.Б., Щедрин Б.М. Элементарная математика. Руководство для поступающих в вузы. Изд. 3-е, перераб. и доп. — М. Издат. отдел УНЦ ДО, 2001 -690 с. ISBN 5-88800-132-5
13. Голубев В.И. Решение сложных и нестандартных задач по математике.— М: ИЛЕКСА, 2007. — 252 с: ил.

14. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. — К.: РИА "Текст"; МП "ОКО", 1992. -290 с.
15. Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х. Пособие по математике для поступающих в вузы (Избранные вопросы элементарной математики) - Изд. 5-е, перераб., 1976 - 638с.
16. Козко А.И., Чирский В.Г. Задачи с параметром и другие сложные задачи. - М., МЦНМО, 2007. - 296с.
17. Математика. Сборник задач по базовому курсу (ЕГЭ, олимпиады, экзамены в вуз). Учебно-методическое пособие / Золотарёва Н. Д., Попов Ю. А., Семендяева Н. Л., Федотов М. В. - М.: Фойлис, 2010. - 236 с: ил. Под редакцией М. В. Федотова ISBN 978-5-91860-009-2
18. Мельников И.И., Сергеев И.Н. Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах.- М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. - 304с.
19. Моденов В.П. Математика. Пособие для поступающих в вузы. - М., Новая волна, 2002. - 796 с.
20. Олехник С.Н. , Потапов М.К, Пасиченко П.И. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения: справочник. М.: Изд-во Факториал, 1997. - 219с.
21. Панферов В.С., Сергеев И.Н. Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач; ФИПИ - М.: Интеллект-Центр, 2010. - 80 с. ISBN 978-5-89790-612-3
22. Потапов М. К., Олехник С. Н., Нестеренко Ю. В. Конкурсные задачи по математике: Справочное пособие.— Изд. 3-е, стер. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 416 с.
23. Цыпкин А. Г. Справочное пособие по математике с методами решения задач для поступающих в вузы / А. Г. Цыпкин, А. И. Пинский. — 3-е изд., испр. — М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2007. — 640 с: ил. ISBN 5-94666-341-0(000 «Издательство «Мир и Образование»)
24. Черкасов О. Ю., Якушев А. Г. Математика: интенсивный курс подготовки к экзамену. — 7-е изд. — М.: Айрис-пресс, 2003. — 432 с: ил. — (Домашний репетитор). ISBN 5-8112-0256-3
25. Шарыгин, И. Ф. Математика для поступающих в вузы : учеб. пособие / И. Ф. Шарыгин. — 6-е изд., стереотип. — М. : Дрофа, 2006. — 479, [1] с. : ил. ISBN 5-358-01163-3
26. Алгебра. Базовый курс с решениями и указаниями (ЕГЭ, олимпиады, экзамены в вуз). Учебно-методическое пособие / Золотарёва Н. Д., Попов Ю.А., Семендяева Н.Л., Федотов М. В. - М.: Фойлис, 2010. - 568 с: ил. (Под редакцией М. В. Федотова ISBN 978-5-91860-008-5)
27. Геометрия. Базовый курс с решениями и указаниями. (ЕГЭ, олимпиады, экзамены в вуз).: Учебно-методическое пособие / Золотарёва Н. Д., Семендяева Н. Л., Федотов М. В. - М: Изд-во Фойлис, 2010. - 296 стр. : ил. (Под редакцией М. В. Федотова ISBN 978-5-91860-004-7)
28. Сборник задач по математике для поступающих во втузы (с решениями). В 2-х книгах. Кн. 1. Алгебра. /Егерев В.К., Кордемский Б.А., Зайцев В.В. и

др. Под ред. М.И. Сканави . - 7-е изд., перераб. и доп. - М., Высш.шк., 1994. _ 528 с.
29. Сборник задач по математике для поступающих во втузы (с решениями). В 2-х книгах. Кн. 2. Геометрия /Егерев В.К., Кордемский Б.А., Зайцев В.В. и др. Под ред. М.И. Сканави . - 7-е изд., перераб. и доп. - М., Высш.шк., 1995. _ 368 с
30. Олимпиада «Ломоносов» по математике (2005—2008). — М.: Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2008. — 48 с, илл.
31. Всероссийская олимпиада школьников по математике 1993-2006; Окружной и финальный этапы / Под ред. Н.Х. Агаханова – М.: МЦНМО, 2007. – 472с.

Председатель Оргкомитета Олимпиады,
Ректор МГТУ им. Н.Э. Баумана А.А. Александров

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Предмет «МАТЕМАТИКА»

МАТЕРИАЛЫ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ

2012-2013 УЧЕБНЫЙ ГОД

Олимпиаду школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «математика» проводил Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана при участии региональной площадки Калужского филиала МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Основными целями Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по математике являются:

- выявление и развитие у участников творческих способностей и интереса к научно-исследовательской деятельности в области математики;
- пропаганда и популяризация научных знаний в области математике;
- создание необходимых условий для интеллектуального развития и поддержки творчески одаренной молодежи;
- привлечение талантливых молодых людей к изучению математики, расширение багажа знаний, необходимых для получения и повышения навыков в процессе обучения;
- научное просвещение и целенаправленная профессиональная ориентация учащейся молодежи;
- формирование состава студентов высших учебных заведений из граждан, наиболее подготовленных к освоению программ высшего профессионального образования.

Первый (отборочный) этап академического соревнования проходил в очной форме 18 ноября 2012 года по 20 января 2013 года.

Второй (заключительный) этап академического соревнования организуется в очной форме в виде выполнения заданий по общеобразовательному предмету «математика» и проходил 17 февраля 2013 года и 24 марта 2012 года в городе Москва, а также на региональной площадке Олимпиады школьников «Шаг в будущее» в городе Калуга.

Структура и содержание контрольных измерительных материалов по математике, использованных при проведении Олимпиады школьников «Шаг в будущее»

Конкурсные задания разработаны на основе Федерального компонента государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования. Тексты заданий в целом соответствуют формулировкам, принятым в учебниках и учебных пособиях, включенных в Федеральный перечень.

Каждый вариант олимпиадной работы по математике состоит из 10 заданий: четырех задач первого уровня сложности, двух задач второго уровня сложности и четырех задач третьего уровня сложности.

Все задания требуют от участников развернутого ответа, т.е. должно быть записано полное обоснованное решение задачи. Возможны различные способы решения и записи развернутого ответа. Главное требование – решение должно быть математически грамотным, из него должен быть понятен ход рассуждений автора работы. В остальном (метод, форма записи) решение может быть произвольным. Полнота и обоснованность рассуждений оцениваются независимо от выбранного метода решения.

При решении задачи можно использовать без доказательств и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, допущенных или рекомендованных Министерством образования и науки РФ.

Задачи одного билета охватывают все основные разделы школьного курса математики.

Каждый вариант олимпиадной работы по математике состоит из 10 заданий: четырех заданий первого уровня сложности, двух заданий второго уровня сложности и четырех задач третьего уровня сложности.

Все задания требуют от участников развернутого ответа, т.е. должно быть записано полное обоснованное решение задачи. Задачи одного билета охватывают все основные разделы школьного курса математики.

ЗАДАЧИ ПЕРВОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ требуют знания алгоритмов решения задач из одного или двух разделов математики. Для их решения требуются простые математические преобразования и вычисления. Это могут быть текстовые задачи с практико-ориентированной компонентой: задачи на движение, производительность, на пропорции и процентные отношения, на прогрессии, смеси, сплавы, растворы; тригонометрические уравнения или системы уравнений с выбором корней, примеры на тождественные преобразования тригонометрических выражений; рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические уравнения, и их системы; задачи, связанные со свойствами геометрических фигур, в том числе, задачи по планиметрии и простейшие стереометрические задачи. Однако и при решении задач первого уровня сложности от участников требуется не только показать математическую грамотность, но и продемонстрировать свои аналитические способности и креативность мышления.

ЗАДАЧИ ВТОРОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ содержат рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические неравенства, смешанные неравенства и их системы; задачи, связанные с исследованием функций, проверяющие умение выполнять действия с функциями, строить их графики, использовать основные свойства элементарных

функций, а именно, находить области определения и множества значений, учитывать непрерывность, монотонность.

ЗАДАЧИ ТРЕТЬЕГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ носят творческий характер. К ним относится планиметрическая задача на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей), проверяющая знания основных свойств и соотношений в треугольниках, четырехугольниках, многоугольниках, свойств окружностей и их касательных, умение выполнять геометрические построения. Здесь же предлагается задача на использование производной, которая проверяет умение выполнять действия с функциями, вычислять производные, использовать геометрический смысл производной, составлять уравнения касательных к графикам функций, находить экстремумы функций, наибольшие и наименьшие значения на отрезке и владеть основами аналитической геометрии (выполнять действия с координатами и векторами на плоскости). К этой группе относится и задача, которая требует умения решать алгебраические уравнения, неравенства или системы уравнений с параметрами при наличии ограничений на неизвестные. Решение этой задачи показывает уровень логического мышления участника, его способность находить выход из нестандартной ситуации. Последняя задача это задача по стереометрии. Для ее решения необходимо владеть методикой построения стереометрических чертежей и навыками применения теорем планиметрии и стереометрии для вычисления требуемых элементов. Успешное решение последней задачи показывает уровень пространственного воображения участника, необходимого будущему инженеру.

Ниже предлагается структура типового варианта по математике для 1 и 2 туров.

Структура типового варианта задания

МГТУ им. Н. Э. Баумана 2013 г. Математика

ВАРИАНТ

Задачи первого уровня сложности.

1. Текстовая задача одного из типов: на движение, на работу, на проценты. (8 баллов)

2. Задача, связанная со свойствами арифметической или геометрической прогрессии. (8 баллов)

3. Показательное или логарифмическое уравнение. (8 баллов)

4. Тригонометрическое уравнение или система с ограничениями на корни (выбор корней из отрезка, уравнение, содержащее радикалы, модули…). (8 баллов)

Задачи второго уровня сложности.

5. Рациональное или иррациональное неравенство. (10 баллов)

6. Неравенство (рациональное, иррациональное, показательное, логарифмическое, смешанного типа), система неравенств или неравенства, возникающие при нахождении области определения или множества значений функции. (10 баллов)

Задачи третьего уровня сложности.

7. Задача по планиметрии. (12 баллов)

8. Задача, связанные с исследованием функций: нахождение области определения, множества значений функции, экстремумов функций, наибольших и наименьших значений на отрезке, составление уравнений касательных к графику функции, использование метода координат. (12 баллов)

9. Уравнение, неравенство или система уравнений, неравенств с параметрами. (12 баллов)

10. Стереометрическая задача. (12 баллов)

На сайте Центра довузовской подготовки в разделах «Каталог видео» и «Демонстрационные варианты и задания олимпиады» размещены видеоматериалы по разбору олимпиадных заданий по общеобразовательному предмету «математика» отборочного тура: http://cendop.bmstu.ru/video/#2012.12.9, а также опубликована презентация «Разбор заданий»: http://cendop.bmstu.ru/userfiles/docs/Razbor_zadach_math_2012.ppt
Варианты заданий с решениями заключительного этапа опубликован в разделе «Демонстрационные материалы»:

- Типовой вариант задания с решениями: http://cendop.bmstu.ru/userfiles/materials/2013_typical_variant_solution_math.pdf
- Вариант 14 http://cendop.bmstu.ru/userfiles/materials/2013_variant14_math.pdf с решениями 1-9 задач http://cendop.bmstu.ru/userfiles/materials/2013_variant14_math_solution.pdf
- Вариант 15 http://cendop.bmstu.ru/userfiles/materials/2013_variant15_math.pdf с решениями 1-9 задач http://cendop.bmstu.ru/userfiles/materials/2013_variant15_math_solution.pdf
- Решение 10 задачи во всех вариантах заключительного этапа http://cendop.bmstu.ru/userfiles/materials/2013_variant14,15_math_solution_10.pdf
- Варианты заданий 8-10 классов с решениями http://cendop.bmstu.ru/userfiles/materials/2013_math_8-10classes_2tour_solutions.pdf
- Рекомендуемая литература http://cendop.bmstu.ru/userfiles/materials/2013_literature_math.pdf

"УТВЕРЖДАЮ"

Ректор МГТУ им. Н.Э. Баумана

_____ А.А. Александров

"11" _____ 2013 г.

Заключительный этап академического соревнования Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика»

Типовой вариант задания

1. Один автомобиль проходит в минуту на 240 м больше, чем другой, поэтому затрачивает на прохождение одного километра на 12,5 секунды меньше. На сколько метров первый автомобиль увеличивает расстояние от второго за время, пока второй проходит 1 км? (8 баллов)

2. Сколько членов содержится в возрастающей арифметической прогрессии с положительными членами, у которой сумма членов с нечетными номерами составляет 52% суммы членов всей прогрессии? (8 баллов)

3. Решите уравнение $2^x \cdot 9^{\frac{x}{x-1}} = \frac{3}{2}$. (8 баллов)

4. Решите уравнение $tg\,2x - \sqrt{\frac{\sin x \cos x}{1-\sin x \cos x}} = 0$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\frac{(3-\cos 2\pi x - 4\sin \pi x)(\log_2(x^2-x)-1)}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x+4}} \geq 0.$ (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x) = \log_9\left(3 - \left|2^{1-x^2+2x} - 2\right|\right)$. (10 баллов)

7. Площадь равнобокой трапеции равна 450. Окружность, построенная на боковой стороне трапеции как на диаметре, касается прямой, содержащей другую боковую сторону, и делит большее основание трапеции в отношении $24:25$. Найдите стороны трапеции. (12 баллов)

8. Какую наибольшую площадь может иметь плоский треугольник, ограниченный осью Ox прямой $x = \frac{3}{2}$ и касательной к графику функции $y = 2x^2$ в точке с абсциссой x_0, если $0 < x_0 < 3$? (12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$$(x-a)^2 = x - y - a + 30, \quad \frac{1-\log_{30} y}{1-\log_{30} x} = 1$$

имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (12 баллов)

10. В сферу радиуса R вписана пирамида $TABC$, основанием которой служит треугольник ABC с прямым углом C и углом A, равным $60°$. Боковое ребро TA совпадает с высотой пирамиды, а угол между боковым ребром TB и биссектрисой основания AD равен $60°$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через биссектрису AD и пересекающей ребро TB? (12 баллов)

Заключительный этап академического соревнования Олимпиады школьников

«Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика»

Типовой вариант задания

1. Один автомобиль проходит в минуту на 240 м больше, чем другой, поэтому затрачивает на прохождение одного километра на 12,5 секунды меньше. На сколько метров первый автомобиль увеличивает расстояние от второго за время, пока второй проходит 1 км? (8 баллов)

2. Сколько членов содержится в возрастающей арифметической прогрессии с положительными членами, у которой сумма членов с нечетными номерами составляет 52% суммы членов всей прогрессии? (8 баллов)

3. Решите уравнение $2^x \cdot 9^{\frac{x}{x-1}} = \frac{3}{2}$. (8 баллов)

4. Решите уравнение $tg\,2x - \sqrt{\frac{\sin x \cos x}{1 - \sin x \cos x}} = 0$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\frac{(3 - \cos 2\pi x - 4\sin \pi x)(\log_2 (x^2 - x) - 1)}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x+4}} \geq 0.$ (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x) = \log_9 \left(3 - \left| 2^{1-x^2+2x} - 2 \right| \right)$. (10 баллов)

7. Площадь равнобокой трапеции равна 450. Окружность, построенная на боковой стороне трапеции как на диаметре, касается прямой, содержащей другую боковую сторону, и делит большее основание трапеции в отношении $24:25$. Найдите стороны трапеции. (12 баллов)

8. Какую наибольшую площадь может иметь плоский треугольник, ограниченный осью Ox прямой $x = \frac{3}{2}$ и касательной к графику функции $y = 2x^2$ в точке с абсциссой x_0, если $0 < x_0 < 3$? (12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$$(x-a)^2 = x - y - a + 30, \quad \frac{1 - \log_{30} y}{1 - \log_{30} x} = 1$$

имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (12 баллов)

10. В сферу радиуса R вписана пирамида $TABC$, основанием которой служит треугольник ABC с прямым углом C и углом A, равным $60°$. Боковое ребро TA совпадает с высотой пирамиды, а угол между боковым ребром TB и биссектрисой основания AD равен $60°$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через биссектрису AD и пересекающей ребро TB? (12 баллов)

1. Пусть V м/сек – скорость первого автомобиля, тогда $V-4$ – скорость второго. Тогда

$\frac{1000}{V-4}=\frac{1000}{V}+12{,}5;\ \frac{80}{V-4}=\frac{80}{V}+1;\ V^2-4V-320=0,\ V=2\pm 18;\ V_1=20,\ V_2=20-4=16.$

$\Delta l=\frac{1000\cdot 20}{16}-1000=250.$ **Ответ**: 250 м.

2. Так как каждый последующий член возрастающей арифметической прогрессии больше предыдущего, число членов прогрессии не может быть четным, иначе сумма членов с нечетными номерами будет меньше суммы членов с четными номерами. Пусть число членов прогрессии n. Тогда $S_{even}=a_1+a_3+...+a_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot\frac{n+1}{2}$.

$S=a_1+...+a_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n.\ \frac{S_{even}}{S}=\frac{n+1}{2\cdot n}=\frac{52}{100}=\frac{13}{25}$, отсюда $25n+25=26n,\quad n=25.$

Ответ: $n=25$.

3. Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 3: $\log_3\left(2^x\cdot 9^{\frac{x}{x-1}}\right)=\log_3\frac{3}{2};$

$x\log_3 2+\frac{2x}{x-1}=1-\log_3 2;\ (x+1)\log_3 2+\frac{x+1}{x-1}=0;\ (x+1)(\log_3 2+\frac{1}{x-1})=0.$

1) $x=-1$, 2) $x=1-\log_2 3$. **Ответ:** $\{-1;\,1-\log_2 3\}$.

4. $tg\,2x=\sqrt{\frac{2\sin x\cos x}{2-2\sin x\cos x}}$. При условии $tg\,2x\ge 0$ возводим в квадрат обе части уравнения: $tg^2 2x=\frac{\sin 2x}{2-\sin 2x}\ \Leftrightarrow\ \frac{\sin^2 2x}{1-\sin^2 2x}=\frac{\sin 2x}{2-\sin 2x}\ \Leftrightarrow$ 1) $\sin 2x=0\ \ x=\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$ или

2) $\frac{\sin 2x}{1-\sin^2 2x}=\frac{1}{2-\sin 2x}\ \Leftrightarrow\ \sin 2x\ne\pm 1,\quad \sin 2x(2-\sin 2x)=1-\sin^2 2x\Leftrightarrow\ \sin 2x=\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow$

$2x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \ n\in Z$. С учетом условия $tg\,2x\ge 0$ окончательно имеем $x=\frac{\pi n}{2}$,

$x=\frac{\pi}{12}+\pi n,\ \ n\in Z.$ **Ответ:** $x=\frac{\pi n}{2},\ x=\frac{\pi}{12}+\pi n,\ \ n\in Z.$

5. $\frac{(3-\cos 2\pi x-4\sin\pi x)(\log_2(x^2-x)-1)}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x+4}}\ge 0.$ ОДЗ: $2x+1\ge 0,\quad x(x-1)>0\ \Rightarrow$

$x\in[-0{,}5;\,0)\cup(1;+\infty)$. Так как $\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x+4}<0$, то на ОДЗ исходное неравенство эквивалентно следующему

$(2\sin^2\pi x-4\sin\pi x+2)(x^2-x-2)\le 0 \;\Leftrightarrow\; (\sin\pi x-1)^2(x+1)(x-2)\le 0 \;\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\pi x=1,\\ x\in[-1;\,2]\end{array}\right.$

С учетом ОДЗ имеем $x\in[-0{,}5;\,0)\cup(1;\,2]\cup\left\{\frac{1}{2}+2n,\,n\in N\right\}$

Ответ: $x\in[-0{,}5;\,0)\cup(1;\,2]\cup\left\{\frac{1}{2}+2n,\,n\in N\right\}$.

6. $f(x)=\log_9\left(3-\left|2^{1-x^2+2x}-2\right|\right)$ Функция $t=1-x^2+2x$ или $t=2-(x-1)^2$ принимает значения $t\in(-\infty;\,2]$. Функция $z=2^t$, где $t\in(-\infty;\,2]$ принимает значения $z\in(0;\,4]$. Рассмотрим функцию $y=\log_9(3-|z-2|)$, определенную на полуинтервале $(0;\,4]$. Если $z\in(0;\,2]$, то $y=\log_9(1+z)$, и функция возрастает и принимает все значения из промежутка $(0;\,0{,}5]$. Если $z\in(2;\,4]$, то $y=\log_9(5-z)$, и функция убывает и принимает все значения из промежутка $[0;\,0{,}5)$. Объединяя полученные множества значений, получаем $E_f=[0;\,0{,}5]$.

Ответ: $E_f=[0;\,0{,}5]$.

7. ABCD - равнобокая трапеция, $AB=CD$, $\angle A$ - острый, AB - диаметр окружности, M - центр окружности, P - точка касания окружности боковой стороны CD. Обозначим радиус окружности x. Тогда $AM=MB=MP=x$. Пусть N - середина стороны CD, тогда треугольник MPN прямоугольный, $\angle P=90°$, $\angle MNP=\angle A=\alpha$, $MN=\frac{x}{\sin\alpha}$. Пусть K - точка пересечения окружности с основанием AD $(K\ne A)$. Треугольник ABK - прямоугольный, $\angle K=90°$, BK - высота трапеции, $BK=AB\sin\alpha=2x\sin\alpha$.

$S_{ABCD}=MN\cdot BK=2x^2=450 \;\Rightarrow\; x=15$,

$AB=CD=2x=30$.

$AK=AB\cos\alpha=2x\cos\alpha$, $KMND$ - параллелограмм, $KD=MN=\frac{x}{\sin\alpha}$.

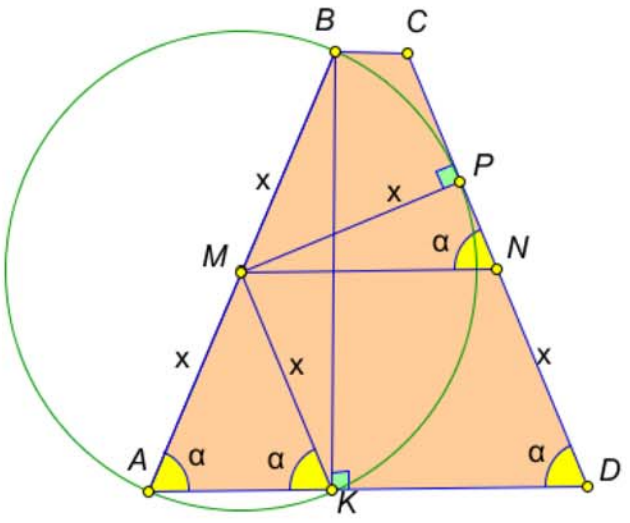
$\frac{AK}{KD}=\frac{24}{25} \;\Rightarrow\; 2\cos\alpha\sin\alpha=\frac{24}{25} \;\Rightarrow$

$\sin 2\alpha=\frac{24}{25} \;\Rightarrow\; \cos 2\alpha=\pm\frac{7}{25} \;\Rightarrow$

1) $\sin\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}=\frac{3}{5}$,

$\cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}=\frac{4}{5}$ или

2) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$.

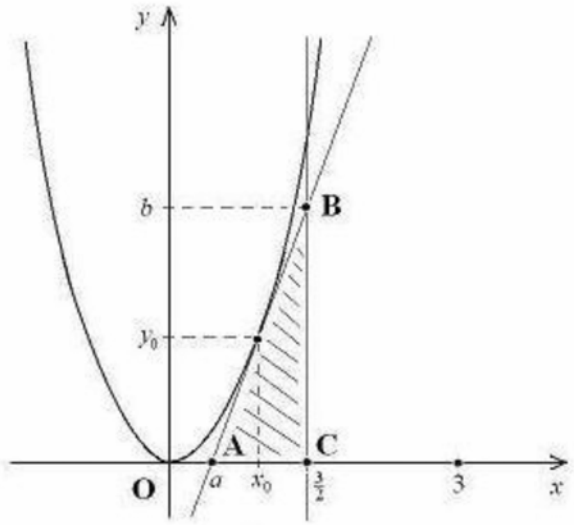


Для первого случая имеем: $AK = 2x\cos\alpha = 24$, $KD = \dfrac{x}{\sin\alpha} = 25$, $AD = AK + KD = 49$, $BC = 2MN - AD = 1$.

Для второго случая имеем: $AK = 2x\cos\alpha = 18$, $KD = \dfrac{x}{\sin\alpha} = \dfrac{75}{4}$, $AD = AK + KD = \dfrac{147}{4}$, $BC = 2MN - AD = \dfrac{3}{4}$.

Ответ: 1, 49, 30, 30 или $\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{147}{4}$, 30, 30.

8. Составим уравнение касательной к графику функции $y = 2x^2$ в точке с абсциссой x_0: $y_{кас} = 4x_0(x - x_0) + 2x_0^2$. Пусть точки $A(a;0)$ и $B(\dfrac{3}{2}; b)$ - точки пересечения касательной с осью Ox и прямой $x = \dfrac{3}{2}$, соответственно.



Подставим координаты этих точек в уравнение касательной и выразим a и b через x_0:

$b = 4x_0(1{,}5 - x_0) + 2x_0^2 = 6x_0 - 2x_0^2$ =

Отметим, что из условия $0 < x_0 < 3$ следует $0 < a < \dfrac{3}{2}$, и потому точка $A(a;0)$ находится на оси абсцисс слева от точки $C(\dfrac{3}{2}; 0)$. Тогда площадь треугольника ABC равна $S = \dfrac{(1{,}5 - a)b}{2} = \dfrac{x_0(3 - x_0)^2}{2}$.

Находим экстремумы полученной функции $S = S(x_0)$ в интервале $(0;3)$. Функция S в каждой точке этого интервала имеет производную. Определим нули ее производной: $S' = \dfrac{(3 - x_0)^2 - 2x_0(3 - x_0)}{2} = \dfrac{3(x_0 - 3)(x_0 - 1)}{2} = 0$, $x_0 = 1$. Так как в интервале $(0;1)$ верно неравенство $S'(x_0) > 0$, а в интервале $(1;3)$ верно неравенство $S'(x_0) < 0$, то $x_0 = 1$ - единственная точка максимума в интервале $(0;3)$. Следовательно, $S_{\max} = S(1) = 2$. Наибольшая площадь треугольника равна 2. **Ответ:** 2.

9. $(x-a)^2 = x-y-a+30, \quad \dfrac{1-\log_{30} y}{1-\log_{30} x} = 1$. Второе уравнение равносильно системе:

$x>0,\ x\neq 30,\ y=x$. Подставляя $y=x$ в первое уравнение, получаем; $(x-a)^2 = 30-a$, или $x^2-2ax+a^2+a-30=0$ (*), у которого $D/4 = a^2-a^2-a+30 = 30-a$. Количество решений заданной системы уравнений зависит от числа корней этого квадратного уравнения.

Корень $x=30$ квадратного уравнения может получиться, когда $(30-a)^2 = 30-a$, т.е. если

1) $a=30$, уравнение имеет вид $(x-30)^2=0$, тогда этот корень единственный и заданная система решений не имеет, или 2) $(30-a)=1$, т.е. $a=29$, тогда для *x* получаем уравнение $(x-29)^2=1,\ x=29\pm 1$, у которого, кроме постороннего корня $x_1=30$, есть еще один корень $x_2=28$, удовлетворяющий условиям, и заданная система имеет единственное решение $(28;28)$.

Рассмотрим все случаи, когда система может иметь единственное решение.

1. $\begin{cases} D/4 = 30-a = 0, \\ a>0, \quad a\neq 30. \end{cases}$ Система решений не имеет.

2. $a^2+a-30<0$, т.е. при $-6<a<5 \quad x=a+\sqrt{30-a}$.

3. $a^2+a-30=0$, отсюда $a=5$, $x^2-10x=0$, $x_1=0$ –посторонний корень, $x_2=10$ удовлетворяет условиям, или $a=-6$, $x^2+12x=0$, $x_1=0,\ x_2=-12$ –посторонние корни.

Рассмотрим случаи, когда система будет иметь два различных решения. Квадратное уравнение (*) будет иметь два различных положительных корня $x_{1,2}=a\pm\sqrt{30-a}$, если

$$\begin{cases} 30-a>0, \\ a>0, \\ a^2+a-30>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a<30, \\ \left[\begin{array}{l} a<-6, \\ a>5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 5<a<30.$$

Из этого множества надо убрать рассмотренную ранее точку $a=29$.

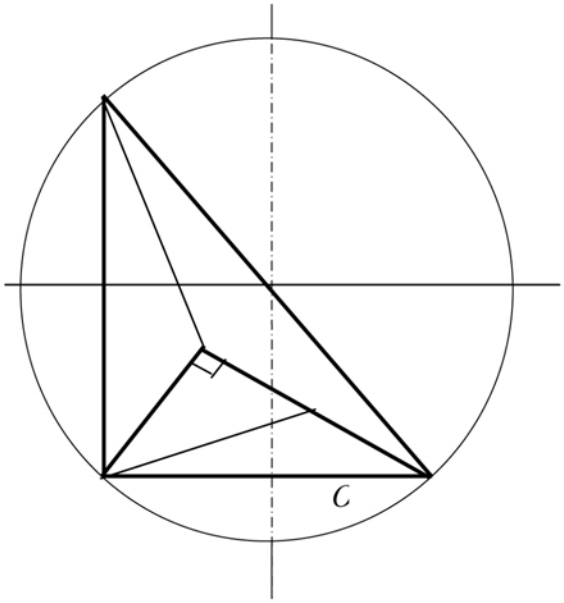
Объединяя найденные значения a, получим ответ.

Ответ: $a\in(-6;5],\ x=y=a+\sqrt{30-a}$;

$a\in(5;29)\cup(29;30),\ x_{1,2}=y_{1,2}=a\pm\sqrt{30-a}$;

$a=29,\ x=y=28$.

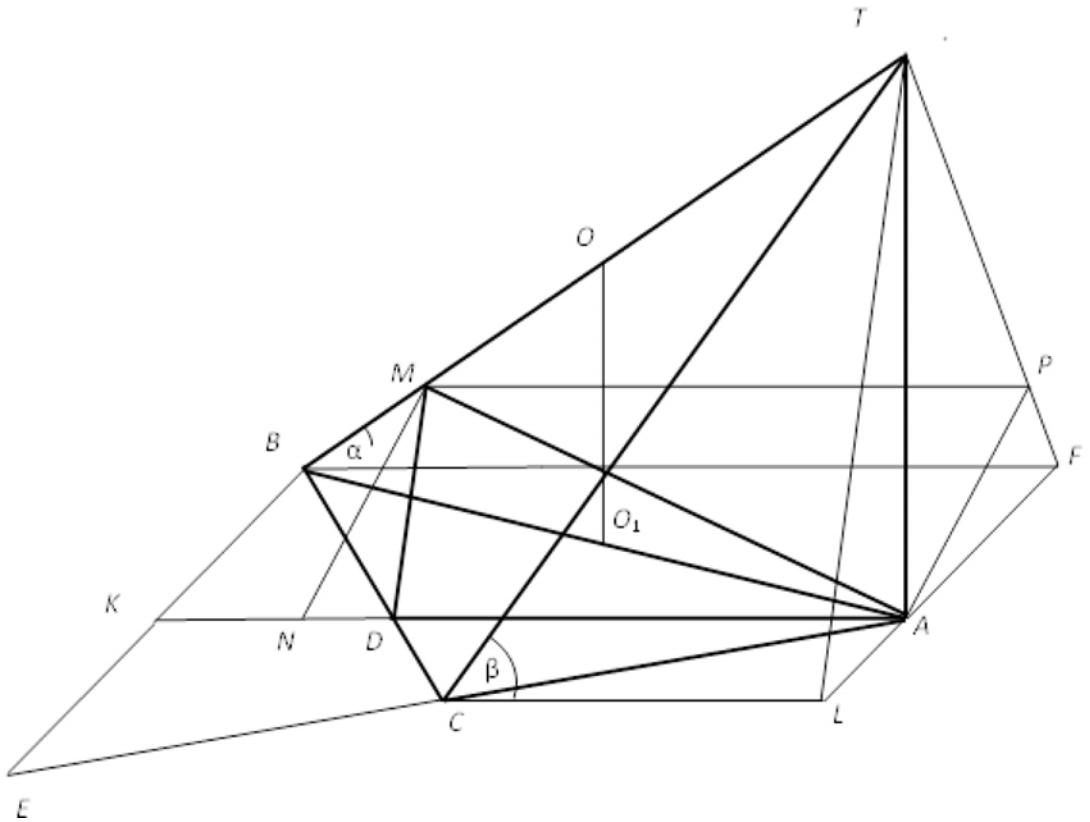
$a\in(1/4;1/2)\cup(1/2;+\infty),\ x_1=0,\ y_1=1-1/4a;\ x_2=1,\ y_2=1;\ x_3=(4a-1)^2,\ y_3=4a-1$.



10. Так как ΔABC прямоугольный, центр описанной окружности O_1 лежит на середине гипотенузы AB, а центр сферы лежит на перпендикуляре к плоскости ABC, проходящем через O_1. Так как ΔABT прямоугольный и перпендикулярен плоскости основания, то OO_1 лежит в нем и середина гипотенузы BT – центр описанной сферы O. следовательно $BT = 2R$. Для наглядности достроим ΔABC до равностороннего ΔABE, тогда D – точка пересечения его биссектрис и медиан.

Проведем $BF \| AD$ и $AF \perp AD$, тогда $\angle TBF = \alpha$ – заданный в условиях угол между боковым ребром TB и биссектрисой основания AD.

Проведем $CL \| AD$ и $AL \perp AD$, тогда $\angle TCL = \beta$ – заданный в условиях угол между боковым ребром TC и биссектрисой основания AD.



Проведем $AP \perp TF$, $PM \| FB$ и $MN \perp AK$; MN – общий перпендикуляр к AD и TB, причем $MN = AP$. Очевидно, MN – высота треугольника AMD, при которой сечение пирамиды плоскостью, проходящей через биссектрису AD и пересекающей ребро будет иметь наименьшую площадь $S_{\Delta AMD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot MN$.

По условию $\alpha = 60°$. Пусть $AB = a$. Тогда $BF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $TF = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2}a$, $AF = \frac{a}{2}$,

$AT = \sqrt{TF^2 - AF^2} = \sqrt{\frac{9}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2} = a\sqrt{2}$. $AP = \frac{AT \cdot AF}{TF} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a \cdot 2}{2 \cdot 3a} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. $AD = \frac{2}{3} \cdot BF = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

$2R = BT = \frac{BF}{\cos\alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{2\cos 60°} = a\sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.

$S_{\Delta AMD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AP = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}a^2 = \frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}R^2$. **Ответ:** $\frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}R^2$

Заключительный этап академического соревнования олимпиады школьников «ШАГ В БУДУЩЕЕ» по общеобразовательному предмету «МАТЕМАТИКА»

Вариант № 14

1. Имеется 3-литровая банка, полностью наполненная молоком 2% жирности, и 4-литровый бидон с 3 литрами обезжиренного молока. Назовем «обменом» такую операцию: сначала 4-литровый бидон доливают до краев содержимым 3-литровой банки, затем делают наоборот. Какое минимальное количество «обменов» нужно совершить, чтобы концентрация жира в банках различалась менее чем на 0,01%? (8 баллов)

2. Решите неравенство $\log_x(64-112x+49x^2)<0$. (8 баллов)

3. Сумма первых четырех членов геометрической прогрессии, равная 80, относится к первому члену прогрессии как 40:27. Найдите первый член и знаменатель прогрессии и определите, в каких пределах может изменяться сумма n членов прогрессии S_n. (8 баллов)

4. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} 2\sin\dfrac{\pi y}{6}=\sqrt{3+4\sin^2\dfrac{\pi y}{6}\cos\dfrac{\pi x}{3}-3\cos\dfrac{\pi x}{3}}, \\ x^2+y^2\le 16,\ x\ge y. \end{cases}$$ (8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{8\cdot 6^x-54\cdot 2^{x+2}-3^x+27}{(\log_2(x^2+4)-\log_4 x^2-2)(\log_3(x+5)-1)}\le 0$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x)=g(g^2(x)-4g(x))$, где $g(x)=x^3-48x$. (10 баллов)

7. В треугольнике ABC со сторонами $AB=4$ и $BC=3$ проведены биссектрисы AE и CF, которые пересекаются в точке O. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если $OE=OF$. (12 баллов)

8. Какую наименьшую площадь может иметь фигура на плоскости xy, расположенная между прямыми $x=-2$ и $x=4$ и ограниченная снизу осью x, а сверху – касательной к графику функции $y=256-x^4$ с абсциссой x_0 точки касания, лежащей в промежутке $-2\le x_0\le 4$? (12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых уравнение

$$\frac{1-\log_3\left(3+x-a-2\left(x-a\right)^2\right)}{1-\log_3 x}=1$$

имеет хотя бы один корень, и решите его при каждом a. (12 баллов)

10. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида $TABC$, у которой высота равна половине радиуса сферы. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину пирамиды T, точку M, лежащую на стороне основания BC, и точку K, лежащую на стороне основания AB, если $BK:KA=2:1$? (12 баллов)

Вариант № 14 Условия и решения.

1. Имеется 3-литровая банка, полностью наполненная молоком 2% жирности, и 4-литровый бидон с 3 литрами обезжиренного молока. Назовем «обменом» такую операцию: сначала 4-литровый бидон доливают до краев содержимым 3-литровой банки, затем делают наоборот. Какое минимальное количество «обменов» нужно совершить, чтобы концентрация жира в банках различалась менее чем на 0,01%? (8 баллов)

Решение. Обозначим через c_k и C_k концентрации жира (в %) в меньшей и в большей банке после k «обменов». В начале $c_0 = 2$, $C_0 = 0$. Если в четырехлитровый бидон с 3 л молока с процентным содержанием жира, равным C_k, доливают 1 л молока с процентным содержанием жира, равным c_k, то жирность молока в четырехлитровом бидоне становится равной $C_{k+1} = \dfrac{3C_k + c_k}{4}$. В результате обратного переливания 1 л молока концентрации C_{k+1} в трехлитровую банку, концентрация жира в ней становится равной $c_{k+1} = \dfrac{1}{3}\left(2c_k + \dfrac{3C_k + c_k}{4}\right) = \dfrac{3c_k + C_k}{4}$. В итоге имеем $c_{k+1} - C_{k+1} = \dfrac{3c_k + C_k}{4} - \dfrac{3C_k + c_k}{4} = \dfrac{c_k - C_k}{2}$.

Следовательно, $c_k - C_k = 2^{-k}(c_0 - C_0) = 2 \cdot 2^{-k}$. Решаем неравенство $c_k - C_k = 2 \cdot 2^{-k} < 0{,}01$ $\Leftrightarrow 200 < 2^k \Leftrightarrow \log_2 200 < k$. Так как $7 = \log_2 128 < \log_2 200 < \log_2 256 = 8$, то минимальное число обменов $k = 8$. Ответ: 8 раз.

2. Решите неравенство $\log_x(64 - 112x + 49x^2) < 0$. (8 баллов)

Решение. ОДЗ: $x > 0, \quad x \neq 1, \quad x \neq 8/7$.

1) $0 < x < 1; \quad 64 - 112x + 49x^2 > 1 \Leftrightarrow 7x^2 - 16x + 9 > 0; \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < 1, \\ x > 9/7 \end{array}\right. \Leftrightarrow 0 < x < 1; \\ 0 < x < 1 \end{cases}$

2) $x > 1, \quad x \neq 8/7; \; 64 - 112x + 49x^2 < 1 \Leftrightarrow 7x^2 - 16x + 9 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 9/7, \; x \neq 8/7$.

Ответ: $x \in (0;1) \cup (1;8/7) \cup (8/7;9/7)$.

3. Сумма первых четырех членов геометрической прогрессии, равная 80, относится к первому члену прогрессии как 40:27. Найдите первый член и знаменатель прогрессии и определите, в каких пределах может изменяться сумма n членов прогрессии S_n.

Решение. $\dfrac{S_4}{a} = \dfrac{a\left(1 + q + q^2 + q^3\right)}{a} = 1 + q + q^2 + q^3 = \dfrac{40}{27}$.

$q^3 + q^2 + q = \dfrac{13}{27}$. Это уравнение легко решить подбором, если учесть следующее.

1. Функция $f(q) = q^3 + q^2 + q$ – возрастающая, так как $f'(q) = 3q^2 + 2q + 1 = 2q^2 + (q+1)^2 > 0$, следовательно, уравнение имеет единственный корень, очевидно, положительный, так как $f(0) = 0$.

2. Выполнив замену $q = \dfrac{m}{3}$, получим уравнение $m^3 + 3m^2 + 9m = 13$, для которого достаточно проверить значение $m = 1$.

Итак $q = \dfrac{1}{3}$. Из условия $a\left(1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27}\right) = \dfrac{40}{27}a = 80 \Rightarrow a = 54$.

Ответ: $a = 54, \; q = \dfrac{1}{3}, \; S_n = 54\dfrac{1 - (1/3)^n}{1 - 1/3} = 81\left(1 - (1/3)^n\right); \; 54 \le S_n < 81$.

Вариант № 14 Условия и решения.

4. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} 2\sin\dfrac{\pi y}{6} = \sqrt{3+4\sin^2\dfrac{\pi y}{6}\cos\dfrac{\pi x}{3}-3\cos\dfrac{\pi x}{3}}, \\ x^2+y^2\le 16, \quad x\ge y. \end{cases}$$ (8 баллов)

Решение. Рассмотрим уравнение системы $2\sin\dfrac{\pi y}{6} = \sqrt{3+4\sin^2\dfrac{\pi y}{6}\cos\dfrac{\pi x}{3}-3\cos\dfrac{\pi x}{3}}$.

При условии $\sin\dfrac{\pi y}{6}\ge 0$, т.е. при $12k\le y\le 6+12k$, $k\in Z$, имеем

$4\sin^2\dfrac{\pi y}{6}-3-4\sin^2\dfrac{\pi y}{6}\cos\dfrac{\pi x}{3}+3\cos\dfrac{\pi x}{3}=0 \Leftrightarrow (4\sin^2\dfrac{\pi y}{6}-3)(1-\cos\dfrac{\pi x}{3})=0 \Leftrightarrow 2\sin\dfrac{\pi y}{6}=\sqrt{3}$

или $\cos\dfrac{\pi x}{3}=1 \Leftrightarrow y=2+12k,\ y=4+12k,\ k\in Z$, или $x=6n,\ n\in Z$. Целочисленными решениями системы будут точки $(l;\ 2+12k)$, $(l;\ 4+12k)$, $(6n;\ m)$, $l,k,n,m\in Z$, $12s\le m\le 6+12s$, $s\in Z$, лежащие в круге с центром в начале координат и радиусом 4 и в полуплоскости $x\ge y$. Такими точками будут $(0;\ 0)$, $(2;\ 2)$, $(3;\ 2)$.

Ответ: $(0;\ 0)$, $(2;\ 2)$, $(3;\ 2)$.

5. Решите неравенство $\dfrac{8\cdot 6^x-54\cdot 2^{x+2}-3^x+27}{(\log_2(x^2+4)-\log_4 x^2-2)(\log_3(x+5)-1)}\le 0$. (10 баллов)

Решение. ОДЗ числителя и знаменателя: $x\in(-5;+\infty)$, $x\ne 0$.

Разложим числитель на множители:

$8\cdot 6^x-54\cdot 2^{x+2}-3^x+27=2^{x+3}(3^x-27)-(3^x-27)=(2^{x+3}-1)(3^x-3^3)$.

Имеем: $\dfrac{(2^{x+3}-1)(3^x-3^3)}{(\log_2(x^2+4)-\log_2 4|x|)(\log_3(x+5)-\log_3 3)}\le 0 \Leftrightarrow$ (на ОДЗ)

$\dfrac{(x+3)(x-3)}{(x^2+4-4|x|)(x+5-3)}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+3)(x-3)}{(|x|-2)^2(x+2)}\le 0$.

Решая методом интервалов, получаем $x\in(-\infty;-3]\cup(-2;\ 2)\cup(2;\ 3]$.

С учетом ОДЗ имеем $x\in(-5;-3]\cup(-2;\ 0)\cup(0;\ 2)\cup(2;\ 3]$.

Ответ: $x\in(-5;-3]\cup(-2;\ 0)\cup(0;\ 2)\cup(2;\ 3]$.

6. Найдите множество значений функции $f(x)=g(g^2(x)-4g(x))$, где $g(x)=x^3-48x$. (10 баллов)

Решение. Функция $g(x)=x^3-48x$ определена на всей числовой оси и принимает все значения из промежутка $(-\infty;+\infty)$. Найдем промежутки монотонности и экстремумы функции $g(x)$. Вычислим производную $g'(x)=3x^2-48=3(x-4)(x+4)$. Имеем $g'(x)>0$, если $x\in(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$, и $g'(x)<0$, если $x\in(-4;\ 4)$. Таким образом, на промежутках $(-\infty;-4)$ и $(4;+\infty)$ функция $g(x)$ возрастает, а на промежутке $(-4;\ 4)$ убывает. Точка $x=-4$ является точкой максимума функции $g(x)$, $g_{\max}=g(-4)=128$, точка $x=4$ является точкой минимума функции $g(x)$, $g_{\min}=g(4)=-128$.

Так как $f(x)=g(g^2(x)-4g(x))=g((g(x)-2)^2-4)$, а функция $(g(x)-2)^2-4$ принимает все значения из промежутка $[-4;+\infty)$, то для нахождения множества значений функции $f(x)$ достаточно найти множество значений функции $g(x)$ на промежутке $[-4;+\infty)$. На указанном промежутке $g(x)$ принимает все значения из множества $[-128;+\infty)$.

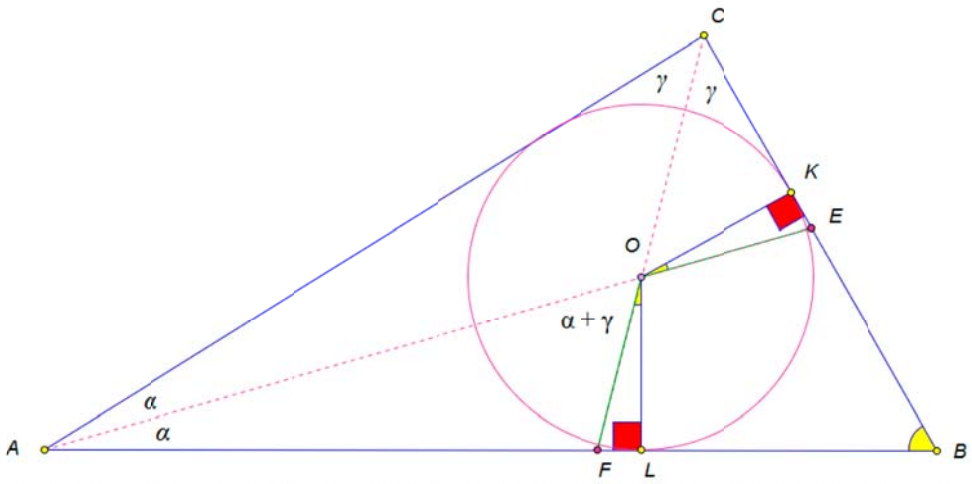
Ответ: $E_f=[-128;+\infty)$.

7. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$ проведены биссектрисы AE и CF, которые пересекаются в точке O. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если $OE = OF$.

Решение:

1. Обозначив $\angle A = 2\alpha$, $\angle C = 2\gamma$, вычислим величину углов $\angle AOF = \angle COE$. Эти углы являются внешними для треугольника AOC. И значит, $\angle AOF = \angle COE = \alpha + \gamma$.

2. Из точки O опустим высоты OL и OK на основания AB и BC, соответственно. При этом $OL = OK$ (радиус вписанной окружности) и $OF = OE$ (по условию). Отсюда следует, что $\angle FOL = \angle KOE$.



3. Заметим, что основание K высоты OK может оказаться как по одну, так и по другую сторону от точки E. Точно также, возможны два варианта расположения точки L по отношению к точке F. Всего получается четыре различных возможных случая. Вычислим и приравняем величины углов $\angle FOL$ и $\angle KOE$ для всех этих четырех случаев.

4. Из прямоугольного треугольника AOL имеем: $\angle FOL = \angle AOL - \angle AOF = (\pi/2 - \alpha) - (\alpha + \gamma) = \pi/2 - 2\alpha - \gamma$, если L находится справа от F; $\angle FOL = \angle AOF - \angle AOL = (\alpha + \gamma) - (\pi/2 - \alpha) = -\pi/2 + 2\alpha + \gamma$, если L находится слева F. Аналогично, из прямоугольного треугольника KOE имеем: $\angle KOE = \angle COE - \angle COK = (\alpha + \gamma) - (\pi/2 - \gamma) = -\pi/2 + \alpha + 2\gamma$, если точка K находится выше точки E; и $\angle KOE = \angle COK - \angle COE = (\pi/2 - \gamma) - (\alpha + \gamma) = \pi/2 - \alpha - 2\gamma$, если точка K находится ниже точки E.

5. Приравниваем величины углов $\angle FOL$ и $\angle KOE$ для этих четырех случаев:

а) $\pi/2 - 2\alpha - \gamma = \pi/2 - \alpha - 2\gamma \Rightarrow \alpha = \gamma \Rightarrow \angle A = \angle C$ (равнобедренный треугольник);

б) $\pi/2 - 2\alpha - \gamma = -\pi/2 + \alpha + 2\gamma \Rightarrow \alpha + \gamma = \pi/3 = 60° \Rightarrow \angle B = \pi - 2(\alpha + \gamma) = \pi/3 = 60°$;

в) $-\pi/2 + 2\alpha + \gamma = -\pi/2 + \alpha + 2\gamma \Rightarrow \alpha = \gamma \Rightarrow \angle A = \angle C$ (равнобедренный треугольник);

г) $-\pi/2 + 2\alpha + \gamma = \pi/2 - \alpha - 2\gamma \Rightarrow \alpha + \gamma = \pi/3 = 60° \Rightarrow \angle B = \pi - 2(\alpha + \gamma) = \pi/3 = 60°$;

6. Учитывая, что треугольник ABC по условию не является равнобедренным, получаем $\angle B = 60°$.

7. По теореме косинусов находим AC: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos\angle B$, $AC = \sqrt{13}$.

8. $R_{on\,ABC} = \dfrac{AC}{2\sin\angle B} = \dfrac{\sqrt{39}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{39}}{3}$.

Вариант № 14 Условия и решения.

8. Какую наименьшую площадь может иметь фигура на плоскссти xy, расположенная между прямыми $x=-2$ и $x=4$ и ограниченная снизу осью x, а сверху – касательной к графику функции $y=256-x^4$ с абсциссой x_0 точки касания, лежащей в промежутке $-2\le x_0\le 4$?

Решение. $y=256-x^4,\quad x_1=-2,\quad x_2=4.$ (12 баллов)

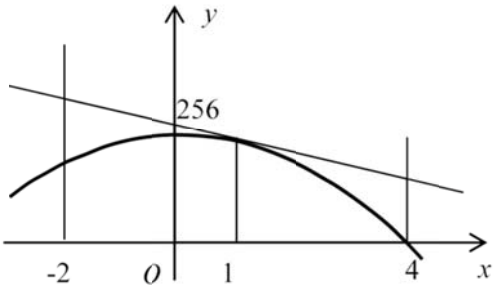
Уравнение касательной:

$y_к=256-x_0^4-4x_0^3(x-x_0),\ -2\le x_0\le 4,$

или $y_к=256+3x_0^4-4x_0^3x.$

$y_1=y_к(-2)=256+3x_0^4+8x_0^3;$

$y_2=y_к(4)=256+3x_0^4-16x_0^3.$



Полученная фигура – трапеция, площадь которой равна

$S(x_0)=0,5(y_1+y_2)(x_2-x_1)=(256+3x_0^4-4x_0^3)6.$

$S'(x_0)=6(12x_0^3-12x_0^2)=72x_0^2(x_0-1).\ S'(x_0)=0$ при $x_0=0$ и $x_0=1.$

$\min S(x_0)=S(1)=6(256+3-4)=6\cdot 255=1530.$

Ответ: 1530 кв. ед.

9. Укажите все значения a, при которых уравнение $\dfrac{1-\log_3\left(3+x-a-2(x-a)^2\right)}{1-\log_3 x}=1$ имеет хотя бы один корень, и решите его при каждом a.

Решение. При $x>0,\ x\ne 3$ уравнение равносильно квадратному уравнению $2(x-a)^2=3-a$, или $2x^2-4ax+2a^2+a-3=0$ (*), у которого $D/4=4a^2-4a^2-2a+6=6-2a.$

Корень $x=3$ квадратного уравнения может получиться, когда $2(3-a)^2=3-a$, т.е. если 1) $a=3$, уравнение имеет вид $(x-3)^2=0$, тогда этот корень единственный и заданное уравнение корней не имеет, или 2) $2(3-a)=1$, т.е. $a=5/2$, тогда для x получаем уравнение $2(x-5/2)^2=3-5/2,\ x=5/2\pm 1/2$, у которого, кроме постороннего корня $x_1=3$, есть еще один корень $x_2=2$, удовлетворяющий заданному уравнению.

Рассмотрим остальные случаи, когда корень уравнения может быть единственным.

1. $\begin{cases} D/4=6-2a=0, \\ a>0,\quad a\ne 3. \end{cases}$ Заданное уравнение корней не имеет.

2. $2a^2+a-3<0$, т.е. при $-3/2<a<1\ \ x=\left(2a+\sqrt{6-2a}\right)\Big/2.$

3. $2a^2+a-3=0$, отсюда $a=1,\ 2x^2-4x=0,\ x_1=0$–посторонний корень, $x_2=2$ удовлетворяет условиям, или $a=-3/2,\ 2x^2+6x=0,\ x_1=0,\ x_2=-3$–посторонние корни.

Рассмотрим случаи, когда заданное уравнение будет иметь два различных корня. Квадратное уравнение (*) будет иметь два различных положительных корня

$x_{1,2}=\left(2a\pm\sqrt{6-2a}\right)\Big/2$, если $\begin{cases} 6-2a>0, \\ a>0, \\ 2a^2+a-3>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 0<a<3, \\ \left[\begin{array}{l} a<-3/2, \\ a>1 \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow 1<a<3$. Из этого множества надо убрать рассмотренную ранее точку $a=5/2$. Объединяя найденные значения a, получим ответ.

Ответ: $a\in(-3/2;1],\ x=\left(2a+\sqrt{6-2a}\right)\Big/2;\ a\in(1;5/2)\cup(5/2;3),\ x_{1,2}=\left(2a\pm\sqrt{6-2a}\right)\Big/2;$

$a=5/2,\ x=2.$

Вариант № 15

1. Имеется 3-литровая банка, полностью наполненная молоком 3% жирности, и 4-литровый бидон с 3 литрами молока 1% жирности. Назовем «обменом» такую операцию: сначала 4-литровый бидон доливают до краев содержимым 3-литровой банки, затем делают наоборот. Какое минимальное количество «обменов» нужно совершить, чтобы концентрация жира в банках различалась менее чем на 0,01%? (8 баллов)

2. Решите неравенство $\log_x(16-24x+9x^2)<0$. (8 баллов)

3. Сумма первых четырех членов геометрической прогрессии, равная 255, относится к первому члену прогрессии как 85:64. Найдите первый член и знаменатель прогрессии и определите, в каких пределах может изменяться сумма n членов прогрессии S_n. (8 баллов)

4. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} 2\sin\dfrac{\pi y}{12}=\sqrt{1+4\sin^2\dfrac{\pi y}{12}\cos\dfrac{\pi x}{3}-\cos\dfrac{\pi x}{3}}, \\ x^2+y^2\le 25,\ x\ge y. \end{cases}$$ (8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{16\cdot 6^x-3^x-54\cdot 2^{x+3}+27}{(\log_4(x^2+4)-\log_{16}x^2-1)(\log_2(x+6)-2)}\le 0$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x)=g(g^2(x)-2g(x))$, где $g(x)=6x-2x^3$. (10 баллов)

7. В треугольнике ABC со сторонами $AB=5$ и $BC=3$ проведены биссектрисы AE и CF, которые пересекаются в точке O. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если $OE=OF$. (12 баллов)

8. Какую наименьшую площадь может иметь фигура на плоскости xy, расположенная между прямыми $x=-3,5$ и $x=1,5$ и ограниченная снизу осью x, а сверху – касательной к графику функции $y=156-x^4$ с абсциссой x_0 точки касания, лежащей в промежутке $-3,5\le x_0\le 1,5$? (12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых уравнение

$$\frac{1-\lg\left(10+x-a-2\left(x-a\right)^2\right)}{1-\lg x}=1$$

имеет хотя бы один корень, и решите его при каждом a. (12 баллов)

10. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида $TABC$, у которой боковое ребро равно радиусу сферы. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину пирамиды T, точку M, лежащую на стороне основания BC, и точку K, лежащую на стороне основания AB, если $BK=BT$? (12 баллов)

Вариант № 15 Условия и решения.

1. Имеется 3-литровая банка, полностью наполненная молоком 3% жирности, и 4-литровый бидон с 3 литрами молока 1% жирности. Назовем «обменом» такую операцию: сначала 4-литровый бидон доливают до краев содержимым 3-литровой банки, затем делают наоборот. Какое минимальное количество «обменов» нужно совершить, чтобы концентрация жира в банках различалась менее чем на 0,01%? (8 баллов)

Решение. Обозначим через c_k и C_k концентрации жира (в %) в меньшей и в большей банке после k «обменов». В начале $c_0 = 3$, $C_0 = 1$. Если в четырехлитровый бидон с 3 л молока с процентным содержанием жира, равным C_1, доливают 1 л молока с процентным содержанием жира, равным c_k, то жирность молока в четырехлитровом бидоне становится равной $C_{k+1} = \dfrac{3C_k + c_k}{4}$. В результате обратного переливания 1 л молока концентрации C_{k+1} в трехлитровую банку, концентрация жира в ней становится равной $c_{k+1} = \dfrac{1}{3}\left(2c_k + \dfrac{3C_k + c_k}{4}\right) = \dfrac{3c_k + C_k}{4}$. В итоге имеем $c_{k+1} - C_{k+1} = \dfrac{3c_k + C_k}{4} - \dfrac{3C_k + c_k}{4} = \dfrac{c_k - C_k}{2}$.

Следовательно, $c_k - C_k = 2^{-k}(c_0 - C_0) = 2 \cdot 2^{-k}$. Решаем неравенство $c_k - C_k = 2 \cdot 2^{-k} < 0{,}01$ $\Leftrightarrow 200 < 2^k \Leftrightarrow \log_2 200 < k$. Так как $7 = \log_2 128 < \log_2 200 < \log_2 256 = 8$, то минимальное число обменов $k = 8$. Ответ: 8 раз.

2. Решите неравенство $\log_x(16 - 24x + 9x^2) < 0$. (8 баллов)

Решение. ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq 4/3$.

$$1)\ 0 < x < 1;\quad 16 - 24x + 9x^2 > 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 5 > 0;\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < 1, \\ x > 5/3 \end{array}\right. \Leftrightarrow 0 < x < 1; \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$2)\ x > 1,\quad x \neq 4/3;\ 16 - 24x + 9x^2 < 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 5 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 5/3,\ x \neq 4/3.$$

Ответ: $x \in (0;1) \cup (1;4/3) \cup (4/3;5/3)$.

3. Сумма первых четырех членов геометрической прогрессии, равная 255, относится к первому члену прогрессии как 85:64. Найдите первый член и знаменатель прогрессии и определите, в каких пределах может изменяться сумма n членов прогрессии S_n.

Решение. $\dfrac{S_4}{a} = \dfrac{a\left(1 + q + q^2 + q^3\right)}{a} = 1 + q + q^2 + q^3 = \dfrac{85}{64}$.

$q^3 + q^2 + q = \dfrac{21}{64}$. Это уравнение легко решить подбором, если учесть следующее.

1. Функция $f(q) = q^3 + q^2 + q$ – возрастающая, так как $f'(q) = 3q^2 + 2q + 1 = 2q^2 + (q+1)^2 > 0$, следовательно, уравнение имеет единственный корень, очевидно, положительный, так как $f(0) = 0$.

2. Выполнив замену $q = \dfrac{m}{4}$, получим уравнение $m^3 + 4m^2 + 16m = 21$, для которого достаточно проверить значение $m = 1$.

Итак $q = \dfrac{1}{4}$. Из условия $a\left(1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{64}\right) = \dfrac{85}{64}a = 255 \Rightarrow a = 192$.

Ответ: $a = 192$, $q = \dfrac{1}{4}$, $S_n = 192\dfrac{1 - (1/4)^n}{1 - 1/4} = 256\left(1 - (1/4)^n\right)$; $192 \le S_n < 256$.

Вариант № 15 Условия и решения.

4. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} 2\sin\dfrac{\pi y}{12} = \sqrt{1+4\sin^2\dfrac{\pi y}{12}\cos\dfrac{\pi x}{3}-\cos\dfrac{\pi x}{3}}, \\ x^2+y^2\le 25, \quad x\ge y. \end{cases}$$ (8 баллов)

Решение. Рассмотрим уравнение системы $2\sin\dfrac{\pi y}{12} = \sqrt{1+4\sin^2\dfrac{\pi y}{12}\cos\dfrac{\pi x}{3}-\cos\dfrac{\pi x}{3}}$.

При условии $\sin\dfrac{\pi y}{12}\ge 0$, т.е. при $24k\le y\le 12+24k$, $k\in Z$, имеем

$4\sin^2\dfrac{\pi y}{12}-1-4\sin^2\dfrac{\pi y}{12}\cos\dfrac{\pi x}{3}+\cos\dfrac{\pi x}{3}=0 \Leftrightarrow (4\sin^2\dfrac{\pi y}{12}-1)(1-\cos\dfrac{\pi x}{3})=0 \Leftrightarrow 2\sin\dfrac{\pi y}{12}=1$ или $\cos\dfrac{\pi x}{3}=1 \Leftrightarrow y=2+24k,\ y=10+24k,\ k\in Z,$ или $x=6n,\ n\in Z$. Целочисленными решениями системы будут точки $(l;\,2+24k)$, $(l;\,10+24k)$, $(6n;\,m)$, $l,k,n,m\in Z$, $24s\le m\le 12+24s$, $s\in Z$, лежащие в круге с центром в начале координат и радиусом 5 и в полуплоскости $x\ge y$. Такими точками будут $(0;\,0)$, $(2;\,2)$, $(3;\,2)$, $(4;\,2)$.

Ответ: $(0;\,0)$, $(2;\,2)$, $(3;\,2)$, $(4;\,2)$.

5. Решите неравенство $\dfrac{16\cdot 6^x-3^x-54\cdot 2^{x+3}+27}{(\log_4(x^2+4)-\log_{16}x^2-1)(\log_2(x+6)-2)}\le 0$. (10 баллов)

Решение. ОДЗ числителя и знаменателя: $x\in(-6;+\infty)$, $x\ne 0$.

Разложим числитель на множители:

$16\cdot 6^x-54\cdot 2^{x+3}-3^x+27=2^{x+4}(3^x-27)-(3^x-27)=(2^{x+4}-1)(3^x-3^3)$.

Имеем: $\dfrac{(2^{x+4}-1)(3^x-3^3)}{(\log_4(x^2+4)-\log_4 4|x|)(\log_2(x+6)-\log_2 4)}\le 0 \Leftrightarrow$ (на ОДЗ)

$\dfrac{(x+4)(x-3)}{(x^2+4-4|x|)(x+6-4)}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+4)(x-3)}{(|x|-2)^2(x+2)}\le 0$.

Решая методом интервалов, получаем $x\in(-\infty;-4]\cup(-2;2)\cup(2;3]$.

С учетом ОДЗ имеем $x\in(-6;-4]\cup(-2;0)\cup(0;2)\cup(2;3]$.

Ответ: $x\in(-6;-4]\cup(-2;0)\cup(0;2)\cup(2;3]$.

6. Найдите множество значений функции $f(x)=g(g^2(x)-2g(x))$, где $g(x)=6x-2x^3$. (10 баллов)

Решение. Функция $g(x)=6x-2x^3$ определена на всей числовой оси и принимает все значения из промежутка $(-\infty;+\infty)$. Найдем промежутки монотонности и экстремумы функции $g(x)$. Вычислим производную $g'(x)=6-6x^2=-6(x-1)(x+1)$. Имеем $g'(x)<0$, если $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$, и $g'(x)>0$, если $x\in(-1;1)$. Таким образом, на промежутках $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$ функция $g(x)$ убывает, а на промежутке $(-1;1)$ возрастает. Точка $x=1$ является точкой максимума функции $g(x)$, $g_{\max}=g(1)=4$, точка $x=-1$ является точкой минимума функции $g(x)$, $g_{\min}=g(-1)=-4$.

Так как $f(x)=g(g^2(x)-2g(x))=g((g(x)-1)^2-1)$, а функция $(g(x)-1)^2-1$ принимает все значения из промежутка $[-1;+\infty)$, то для нахождения множества значений функции $f(x)$ достаточно найти множество значений функции $g(x)$ на промежутке $[-1;+\infty)$. На указанном промежутке $g(x)$ принимает все значения из множества $(-\infty;4]$.

Ответ: $E_f=(-\infty;4]$.

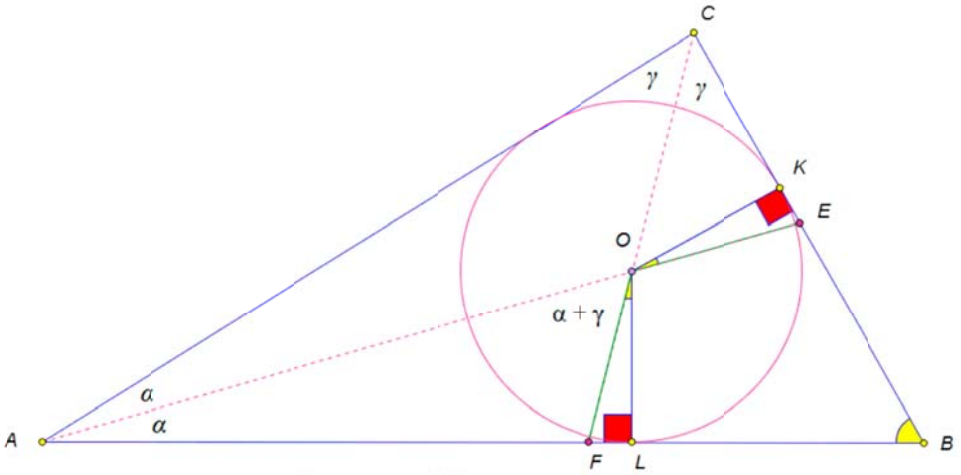
Вариант № 15 Условия и решения.

7. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 5$ и $BC = 3$ проведены биссектрисы AE и CF, которые пересекаются в точке O. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если $OE = OF$.

Решение:

1. Обозначив $\angle A = 2\alpha$, $\angle C = 2\gamma$, вычислим величину углов $\angle AOF = \angle COE$. Эти углы являются внешними для треугольника AOC. И значит, $\angle AOF = \angle COE = \alpha + \gamma$.

2. Из точки O опустим высоты OL и OK на основания AB и BC, соответственно. При этом $OL = OK$ (радиус вписанной окружности) и $OF = OE$ (по условию). Отсюда следует, что $\angle FOL = \angle KOE$.



3. Заметим, что основание K высоты OK может оказаться как по одну, так и по другую сторону от точки E. Точно также, возможны два варианта расположения точки L по отношению к точке F. Всего получается четыре различных возможных случая. Вычислим и приравняем величины углов $\angle FOL$ и $\angle KOE$ для всех этих четырех случаев.

4. Из прямоугольного треугольника AOL имеем: $\angle FOL = \angle AOL - \angle AOF = (\pi/2 - \alpha) - (\alpha + \gamma) = \pi/2 - 2\alpha - \gamma$, если L находится справа от F; $\angle FOL = \angle AOF - \angle AOL = (\alpha + \gamma) - (\pi/2 - \alpha) = -\pi/2 + 2\alpha + \gamma$, если L находится слева F. Аналогично, из прямоугольного треугольника KOE имеем: $\angle KOE = \angle COE - \angle COK = (\alpha + \gamma) - (\pi/2 - \gamma) = -\pi/2 + \alpha + 2\gamma$, если точка K находится выше точки E; и $\angle KOE = \angle COK - \angle COE = (\pi/2 - \gamma) - (\alpha + \gamma) = \pi/2 - \alpha - 2\gamma$, если точка K находится ниже точки E.

5. Приравниваем величины углов $\angle FOL$ и $\angle KOE$ для этих четырех случаев:

а) $\pi/2 - 2\alpha - \gamma = \pi/2 - \alpha - 2\gamma \Rightarrow \alpha = \gamma \Rightarrow \angle A = \angle C$ (равнобедренный треугольник);

б) $\pi/2 - 2\alpha - \gamma = -\pi/2 + \alpha + 2\gamma \Rightarrow \alpha + \gamma = \pi/3 = 60° \Rightarrow \angle B = \pi - 2(\alpha + \gamma) = \pi/3 = 60°$;

в) $-\pi/2 + 2\alpha + \gamma = -\pi/2 + \alpha + 2\gamma \Rightarrow \alpha = \gamma \Rightarrow \angle A = \angle C$ (равнобедренный треугольник);

г) $-\pi/2 + 2\alpha + \gamma = \pi/2 - \alpha - 2\gamma \Rightarrow \alpha + \gamma = \pi/3 = 60° \Rightarrow \angle B = \pi - 2(\alpha + \gamma) = \pi/3 = 60°$;

6. Учитывая, что треугольник ABC по условию не является равнобедренным, получаем $\angle B = 60°$.

7. По теореме косинусов находим AC: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos\angle B$, $AC = \sqrt{19}$.

8. $R_{\text{оп } ABC} = \dfrac{AC}{2\sin\angle B} = \dfrac{\sqrt{57}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{57}}{3}$.

Вариант № 15 Условия и решения.

8. Какую наименьшую площадь может иметь фигура на плоскости xy, расположенная между прямыми $x=-3,5$ и $x=1,5$ и ограниченная снизу осью x, а сверху – касательной к графику функции $y=156-x^4$ с абсциссой x_0 точки касания, лежащей в промежутке $-3,5\le x_0\le 1,5$? (12 баллов)

Решение. $y=156-x^4,\quad x_1=-3,5,\quad x_2=1,5$.

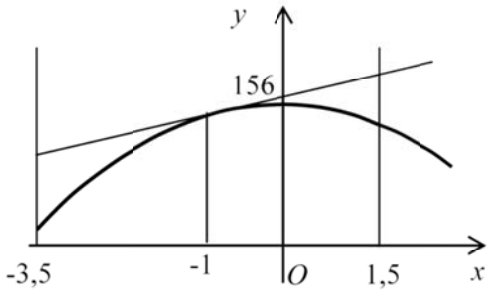
Уравнение касательной:

$y_к=156-x_0^4-4x_0^3(x-x_0),\ -3,5\le x_0\le 1,5,$

или $y_к=156+3x_0^4-4x_0^3x$.

$y_1=y_к(-3,5)=156+3x_0^4+14x_0^3;$

$y_2=y_к(1,5)=156+3x_0^4-6x_0^3.$



Полученная фигура – трапеция, площадь которой равна

$S(x_0)=0,5(y_1+y_2)(x_2-x_1)=(156+3x_0^4+4x_0^3)5.$

$S'(x_0)=5(12x_0^3+12x_0^2)=60x_0^2(x_0+1).\ S'(x_0)=0$ при $x_0=-1$ и $x_0=0$.

$\min S(x_0)=S(-1)=5(156+3-4)=5\cdot 155=775.$ Ответ: 775 кв. ед.

9. Укажите все значения a, при которых уравнение $\dfrac{1-\lg\left(10+x-a-2(x-a)^2\right)}{1-\lg x}=1$ имеет хотя бы один корень, и решите его при каждом a.

Решение. При $x>0,\ x\ne 10$ уравнение равносильно квадратному уравнению $2(x-a)^2=10-a$, или $2x^2-4ax+2a^2+a-10=0$ (*), у которого $D/4=4a^2-4a^2-2a+20=20-2a$.

Корень $x=10$ квадратного уравнения может получиться, когда $2(10-a)^2=10-a$, т.е. если 1) $a=10$, уравнение имеет вид $(x-10)^2=0$, тогда этот корень единственный и заданное уравнение корней не имеет, или 2) $2(10-a)=1$, т.е. $a=19/2$, тогда для x получаем уравнение $2(x-19/2)^2=10-19/2,\ x=19/2\pm 1/2$, у которого, кроме постороннего корня $x_1=10$, есть еще один корень $x_2=9$, удовлетворяющий заданному уравнению.

Рассмотрим остальные случаи, когда корень уравнения может быть единственным.

1. $\begin{cases} D/4=20-2a=0, \\ a>0,\quad a\ne 10. \end{cases}$ Заданное уравнение корней не имеет.

2. $2a^2+a-10<0$, т.е. при $-5/2<a<2\ \ x=\left(2a+\sqrt{20-2a}\right)/2.$

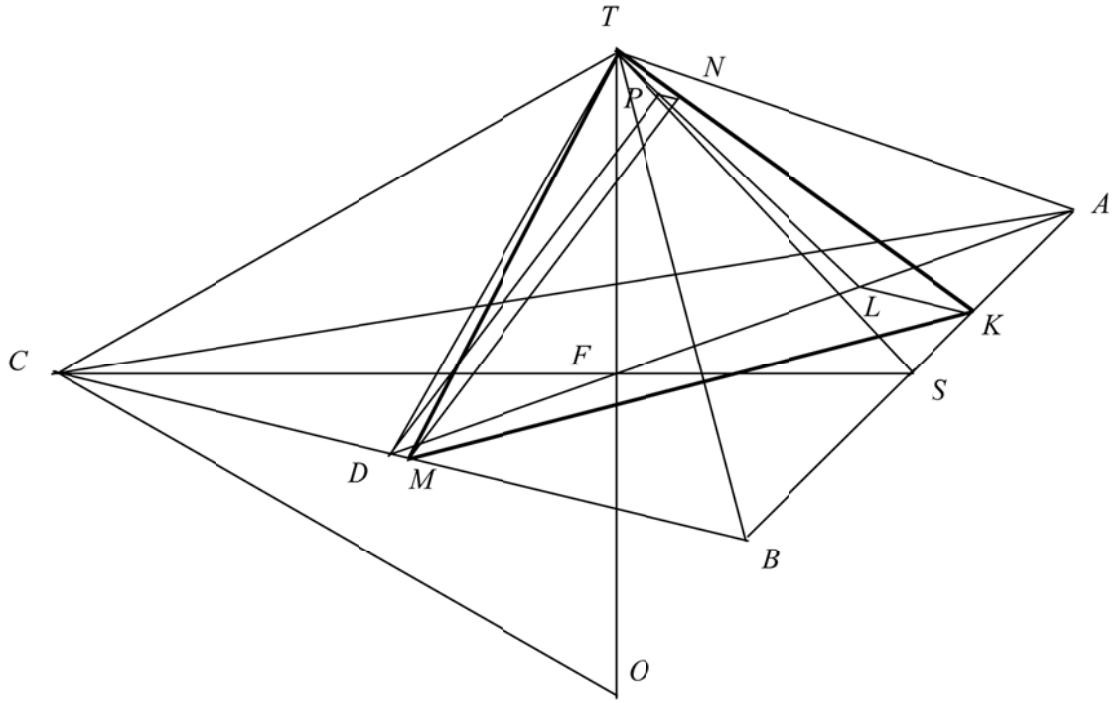
3. $2a^2+a-10=0$, отсюда $a=2,\ 2x^2-8x=0,\ x_1=0$ –посторонний корень, $x_2=4$ удовлетворяет условиям, или $a=-5/2,\ 2x^2+10x=0,\ x_1=0,\ x_2=-10$ –посторонние корни.

Рассмотрим случаи, когда заданное уравнение будет иметь два различных корня. Квадратное уравнение (*) будет иметь два различных положительных корня

$x_{1,2}=\left(2a\pm\sqrt{20-2a}\right)/2$, если $\begin{cases} 20-2a>0, \\ a>0, \\ 2a^2+a-10>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 0<a<10, \\ \left[\begin{array}{l} a<-5/2, \\ a>2 \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow 2<a<10$. Из этого множества надо убрать рассмотренную ранее точку $a=19/2$. Объединяя найденные значения a, получим ответ: $a\in(-5/2;2],\ x=\left(2a+\sqrt{20-2a}\right)/2;$

$a\in(2;19/2)\cup(19/2;10),\ x_{1,2}=\left(2a\pm\sqrt{20-2a}\right)/2;\ a=19/2,\ x=9.$

10. Во всех шести вариантах задана одна и та же пирамида, поэтому используется один и тот же чертеж.



Введем обозначения: $AT = BT = CT = l,\ AB = BC = AC = a,\ TF = h$.

Вариант № 13. По условию $a = 3h,\ BK = 2/3\,AB$.

Так как $AF = a/\sqrt{3} = \sqrt{3}\,h,\ \left(\sqrt{3}h\right)^2 = h(2R - h),\ 2h = 2R - h,\ h = R/2$.

$l^2 = h^2 + \left(\sqrt{3}\,h\right)^2,\ l = 2h,\ l = R,\ a = 3/2\,l = 3/2\,R$.

Вариант № 14. По условию $h = R/2,\ BK = 2AK$.

$\left(a/\sqrt{3}\right)^2 = h(2R - h),\ (a/3)^2 = h(4h - h),\ a = 3h$. (далее как в № 1).

Вариант № 15. По условию $l = R,\ BK = BT$.

$R = 2h,\ 4h^2 - h^2 = a^2/3,\ h = a/3.\ BK = BT = l = \sqrt{h^2 + a^2/3} = \sqrt{a^2/9 + a^2/3} = 2/3\,a$.

(далее как в № 1).

Вариант № 16. По условию $l = 2h,\ BK = BT$.

$l^2 - h^2 = a^2/3,\ 4h^2 - h^2 = a^2/3,\ a = 3h.\ BK = BT = l = \sqrt{h^2 + a^2/3} = \sqrt{a^2/9 + a^2/3} = 2/3\,a$.

(далее как в № 1).

Вариант № 17. По условию $\angle ATF = 60°,\ BK = 2AK$.

$AF = h\sqrt{3},\ a = AB = \sqrt{3}AF = 3h.\ BK = 2/3\,AB$. (далее как в № 1).

Вариант № 18 . По условию $a = 3/2l,\ BK = 2AK$.

$l^2 - h^2 = a^2/3,\ 4/9\,a^2 - h^2 = a^2/3,\ a = 3h.\ BK = 2/3\,AB$ (далее как в № 1).

Построение сечения наименьшей площади.

Через точку K $(BK = 2/3\,AB)$ проводим $KL \parallel BC$, $L \in AD$. Затем в плоскости ATD, проходящей через высоту пирамиды TF, проведем $DP \perp TL$, $P \in TL$.

Далее, $PN \parallel BC, N \in TK$, и $NM \parallel DP, M \in BC$. NM – общий перпендикуляр к TK и BC, его длина равна расстоянию между этими прямыми. Треугольник TKM – искомое сечение наименьшей площади.

Вычисление площади ΔTKM.

В треугольнике DTL $TF \cdot DL = DP \cdot TL$, отсюда $DP = \dfrac{FT \cdot DL}{TL}$.

$$TL = \sqrt{FL^2 + TF^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3R\sqrt{3}}{2\cdot 2}\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}R}{4}.\quad DL = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

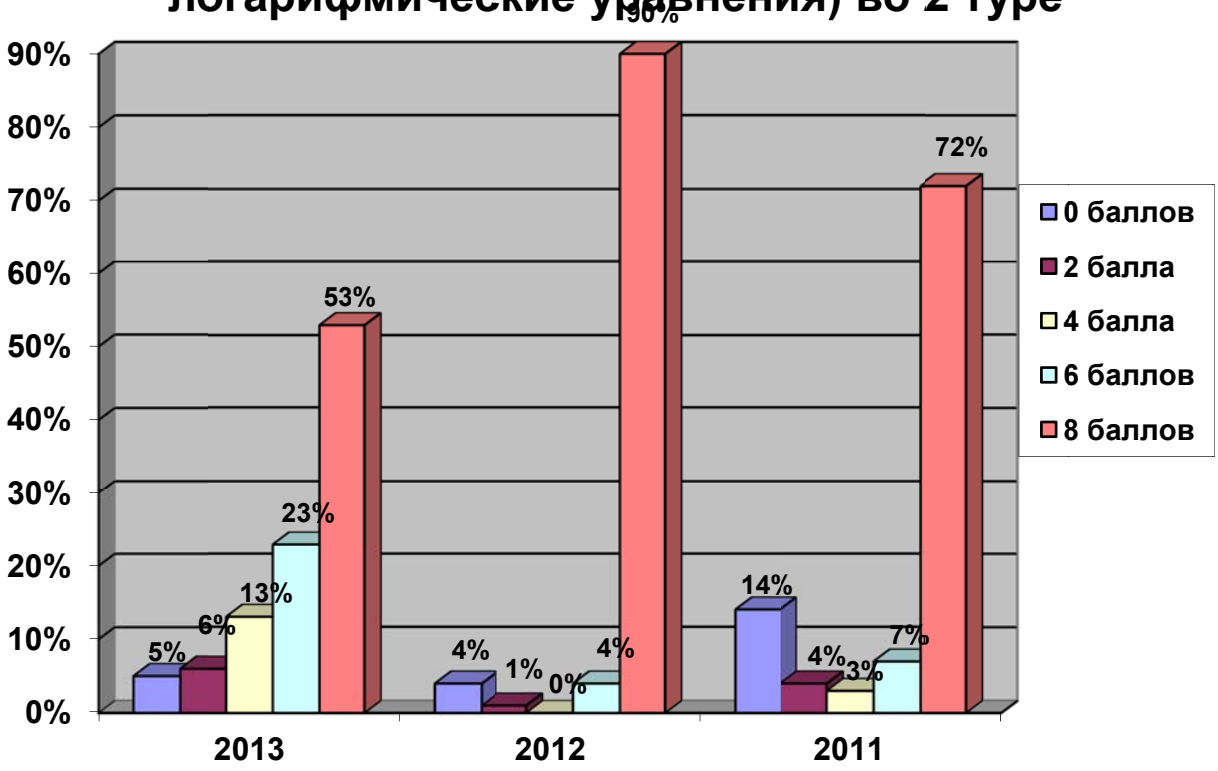
$$MN = DP = \frac{FT \cdot DL}{TL} = \frac{R\cdot R\sqrt{3}\cdot 4}{2\cdot 2\sqrt{7}\cdot R} = \sqrt{\frac{3}{7}}R.\quad TK = \sqrt{TL^2 + LK^2} = \sqrt{\frac{7}{16}R^2 + \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}R\right)^2} = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

$$S_{\text{сеч}} = S_{\Delta TKM} = \frac{1}{2}\cdot TK \cdot MN = \frac{1}{2}\cdot\frac{R}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{3}{14}}R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{14}}R^2.$$

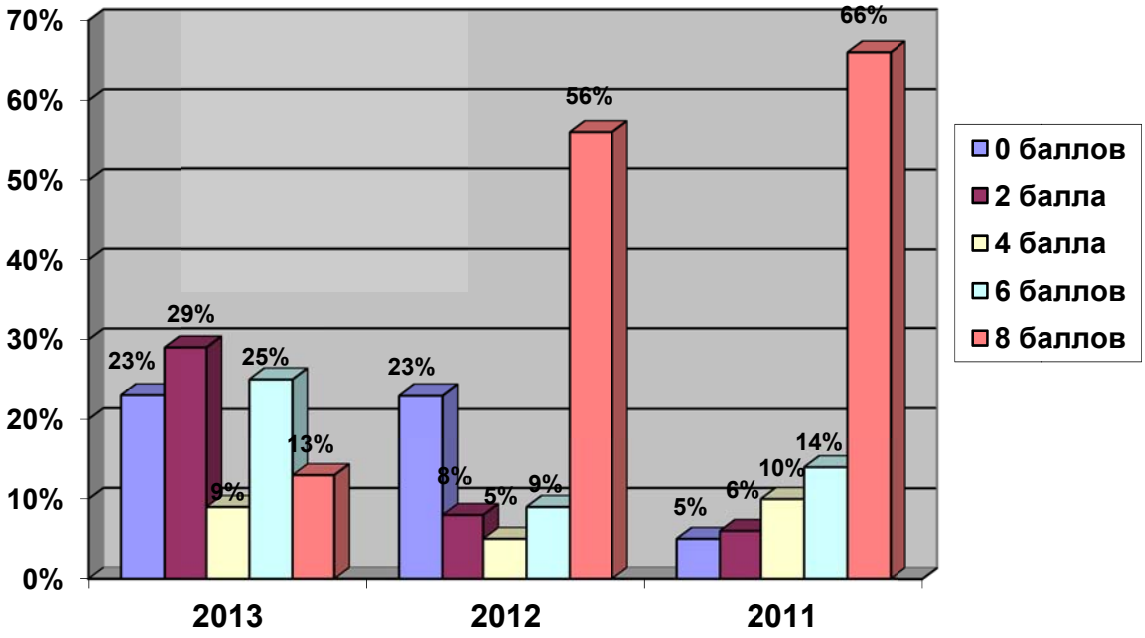
Ответ: $\min S_{\text{сеч}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{14}}R^2$.

По результатам проведения Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика» среди учащихся 11 классов был проведен анализ выполнения участниками задач из разных разделов математики, отличающихся уровнем сложности. Основные статистические результаты приведены ниже.

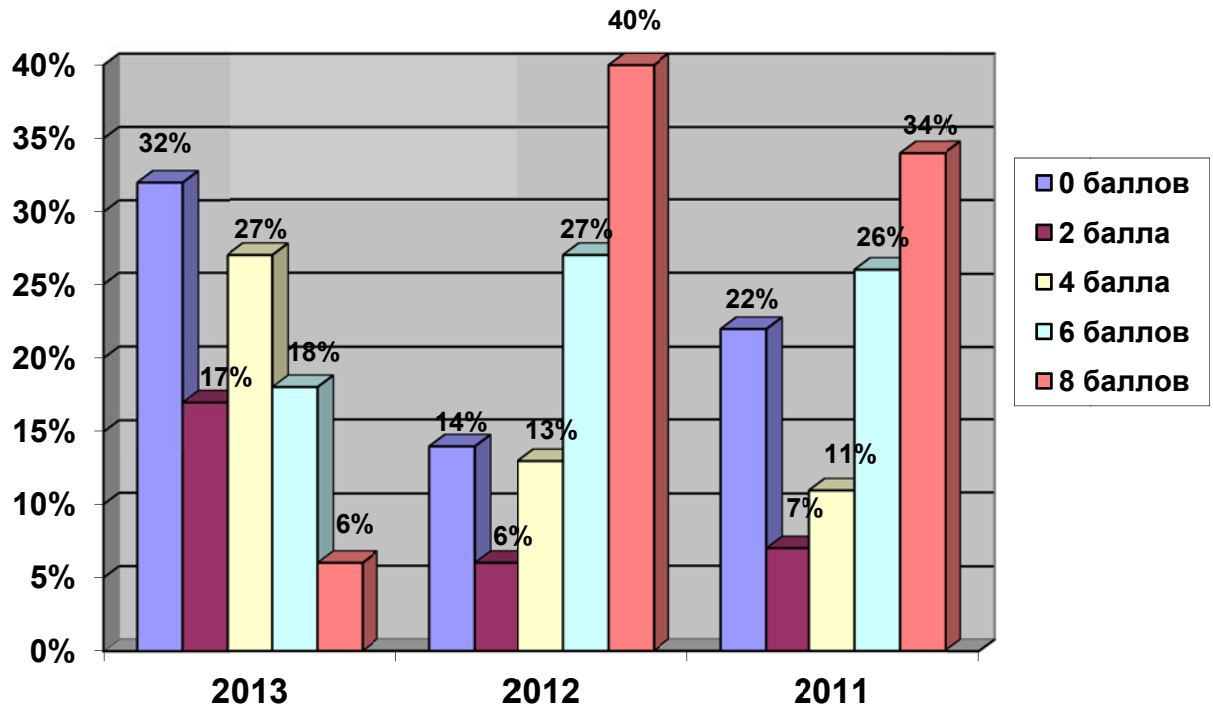
Гистограмма распределения баллов за задачу №2 (показательные, логарифмические уравнения) во 2 туре



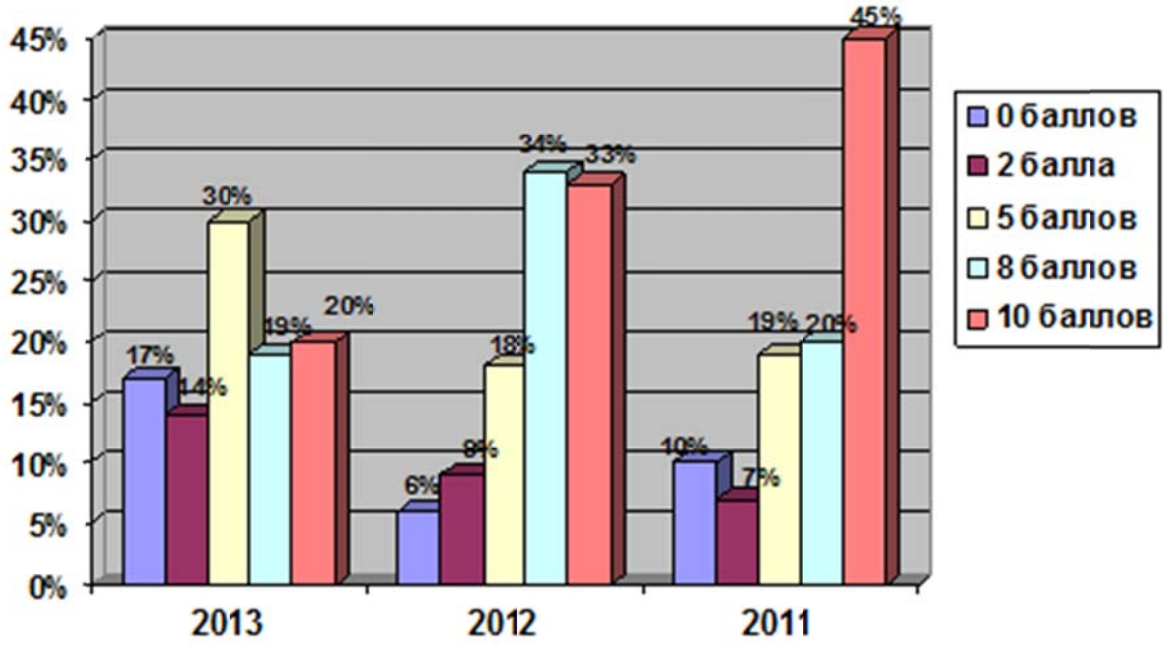
Гистограмма распределения баллов за задачу №3 (прогрессия) во 2 туре



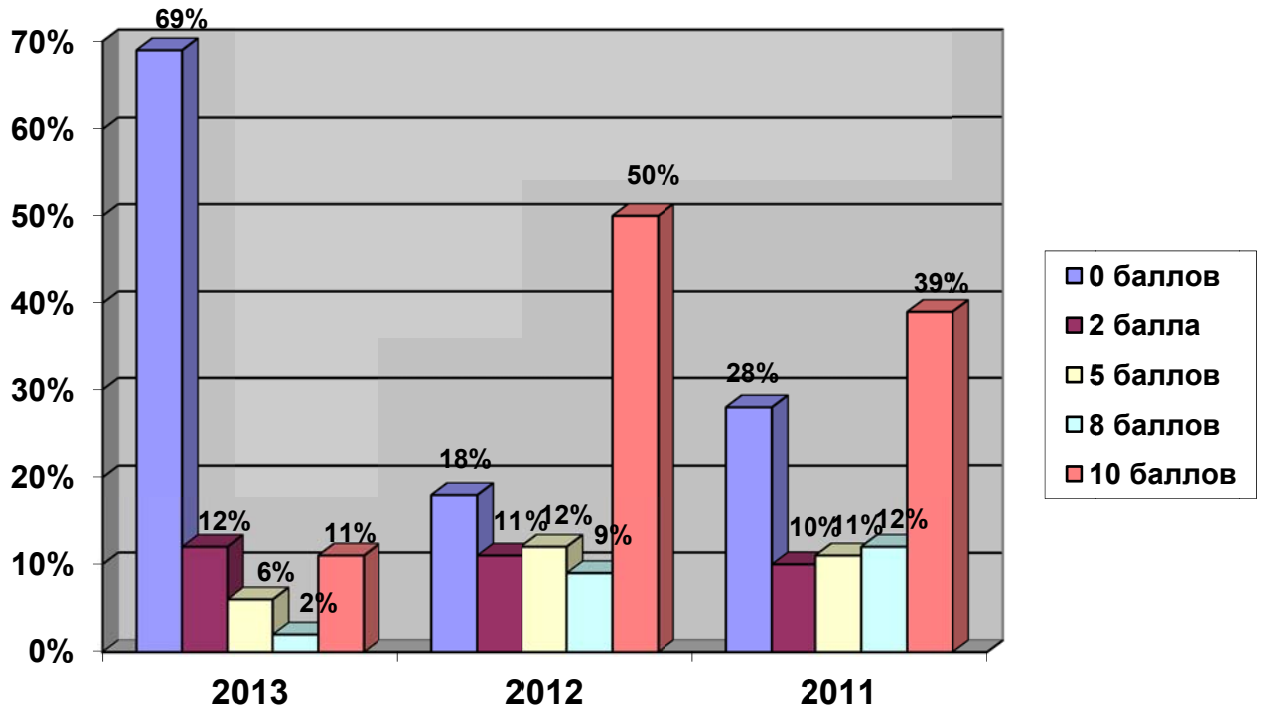
Гистограмма распределения баллов за задачу №4 (тригонометрия) во 2 туре



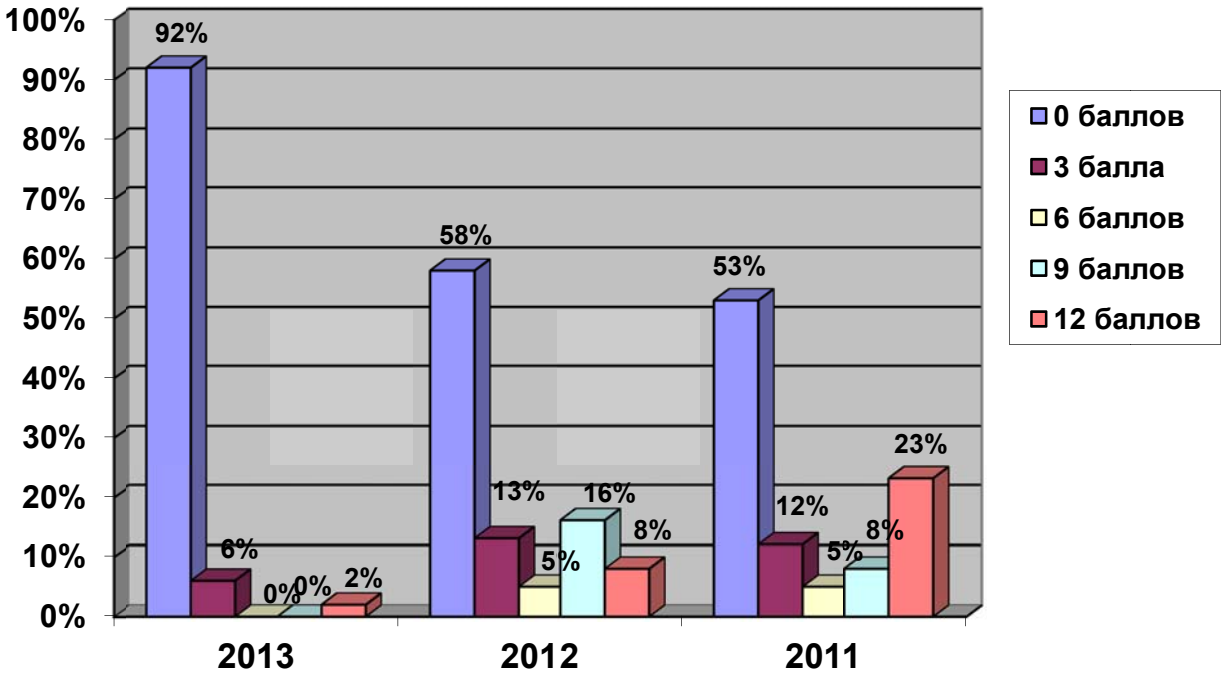
Гистограмма распределения баллов за задачу №5 (неравенство) во 2 туре



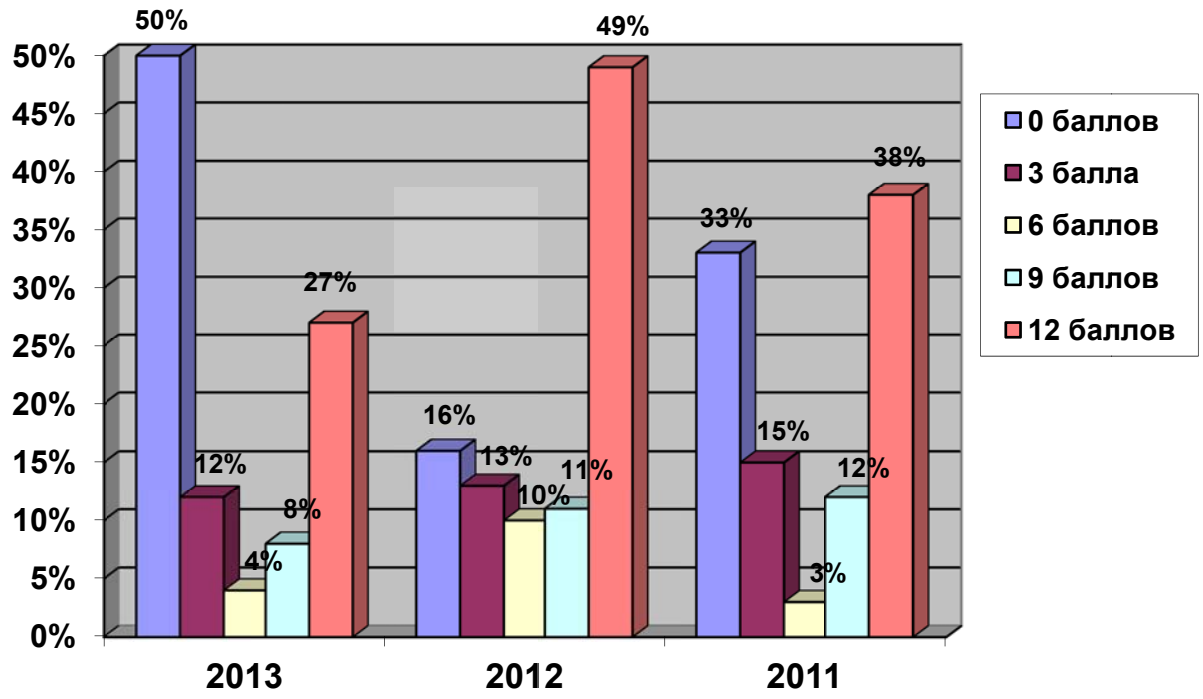
Гистограмма распределения баллов за задачу №6 (свойства функций) во 2 туре



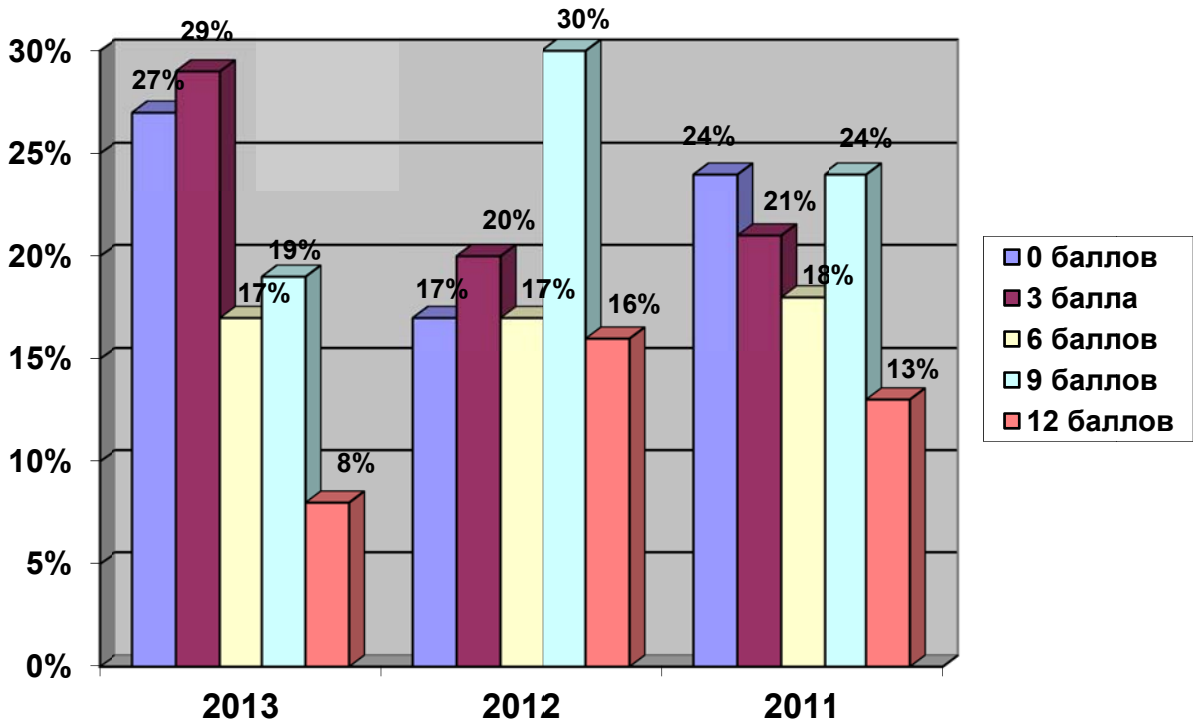
Гистограмма распределения баллов за задачу №7 (планиметрия) во 2 туре



Гистограмма распределения баллов за задачу №8 (производная) во 2 туре



Гистограмма распределения баллов за задачу №9 (уравнения с параметрами) во 2 туре



Гистограмма распределения баллов за задачу №10 (стереометрия) во 2 туре

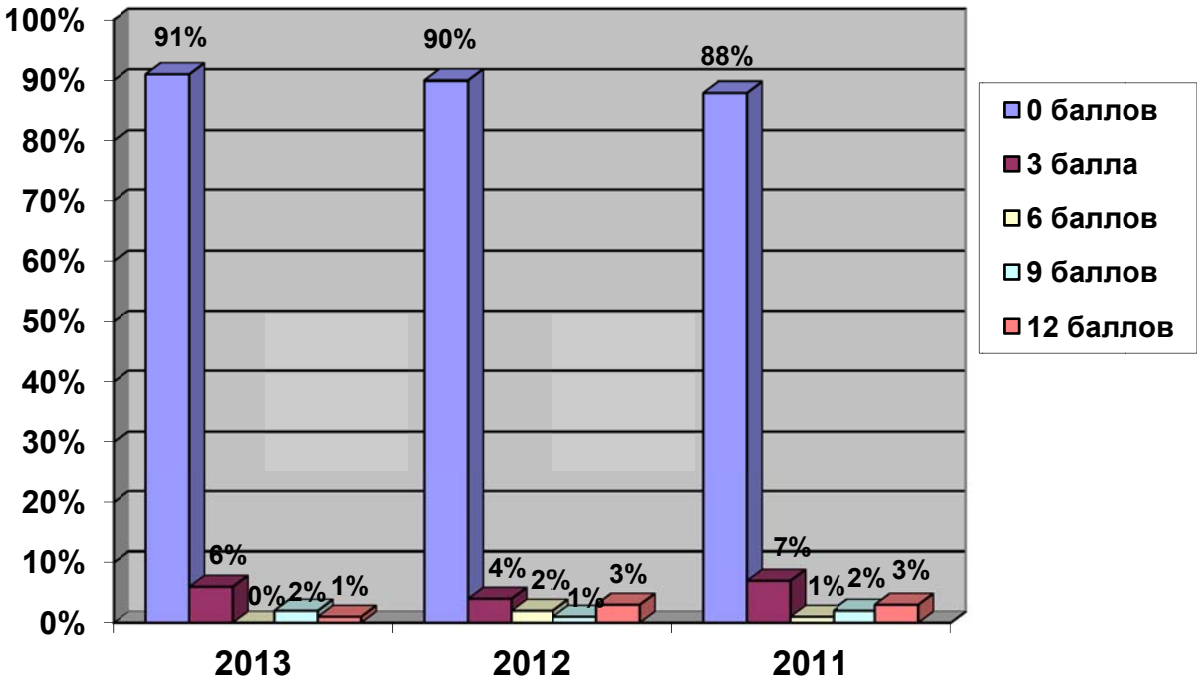
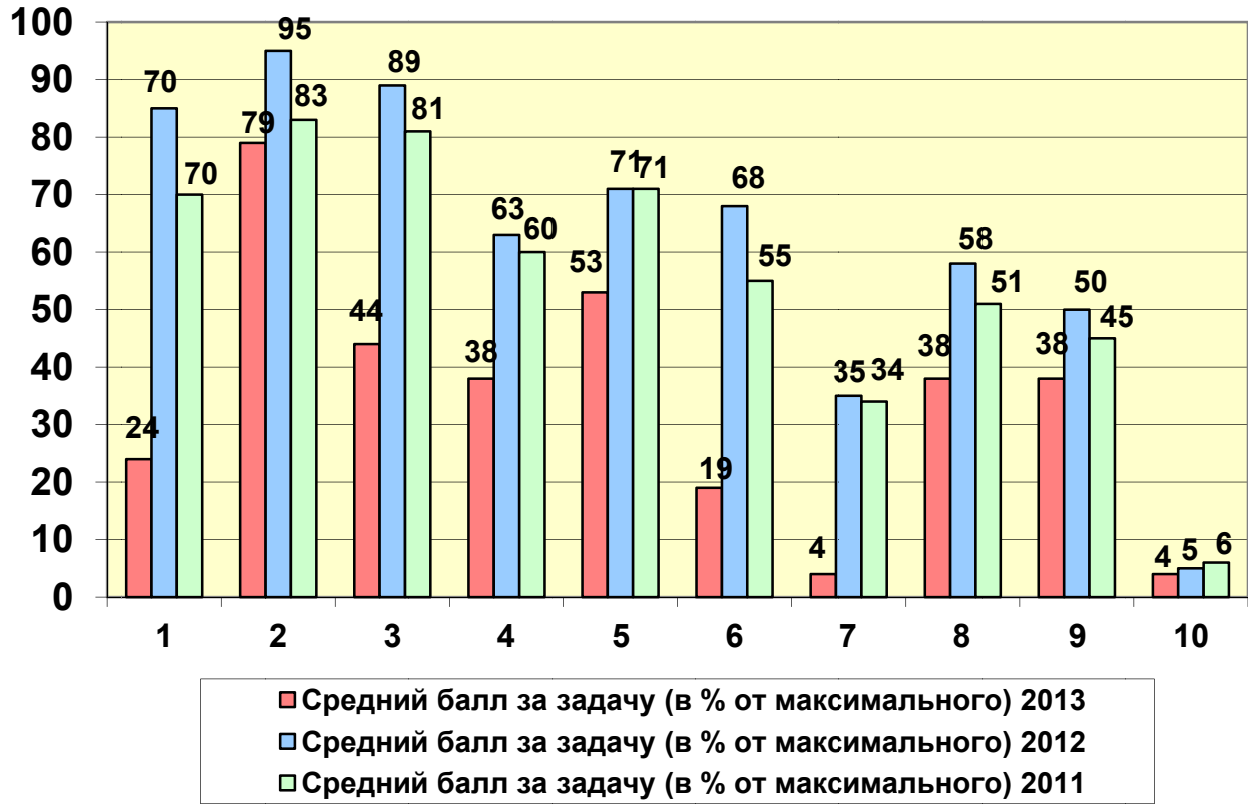
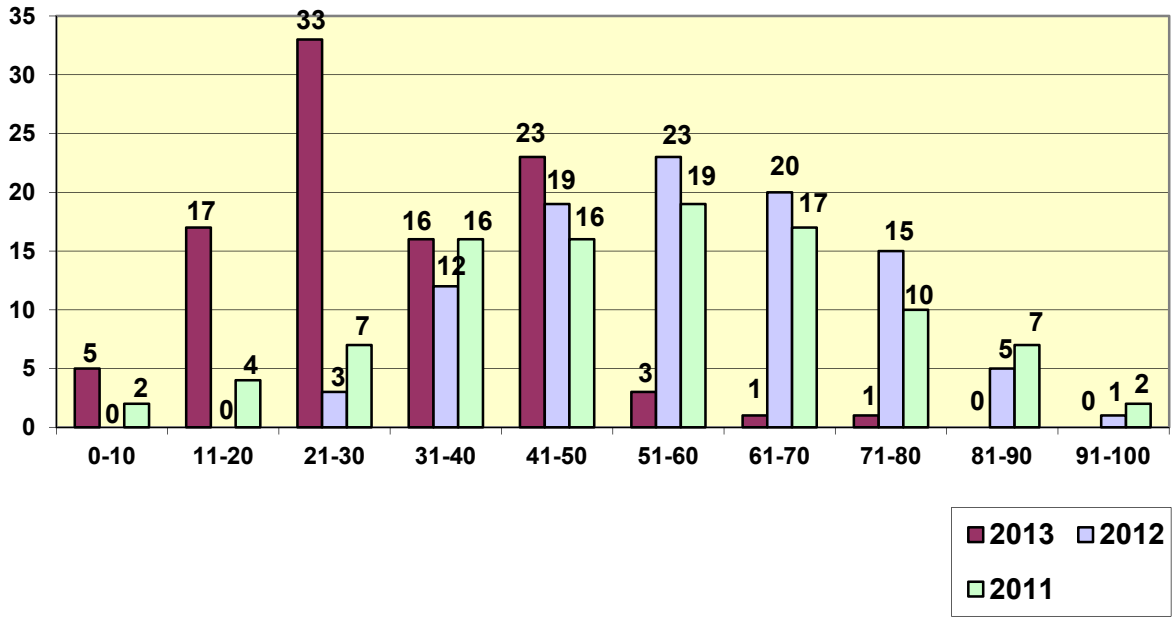


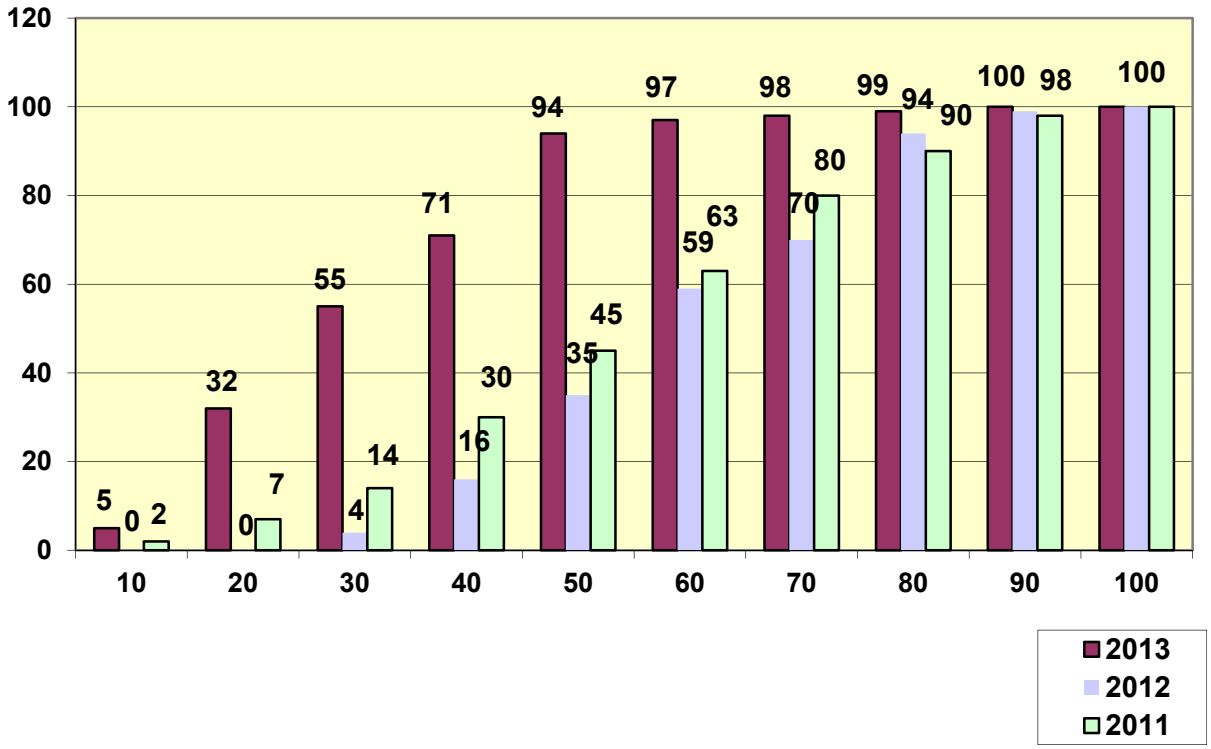
Диаграмма средних баллов



Гистограмма суммарных баллов за 10 задач



Кумулятивная гистограмма распределения суммарных баллов



ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО (ОЧНОГО) ЭТАП ОЛИМПИАДЫ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА «ШАГ В БУДУЩЕЕ» ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ 8-10 КЛАССОВ 2012-2013 УЧЕБНОГО ГОДА.

ВАРИАНТ 1 (10 класс)

1. Решить уравнение $(x-1)(x+2)(x+4)(x+7)=100$.

2. Пусть $a=\sqrt{1580}-\sqrt{1581}$. Вычислить $a^2+\frac{1}{a^2}$.

3. Три группы рыбаков поймали 113 рыб. На каждого рыбака I группы пришлось по 13 рыб, на каждого рыбака II группы - по 5 рыб и на каждого рыбака III группы – по 4 рыбы. Сколько рыбаков было в каждой группе, если всего их было 16?

4. Найти функцию, удовлетворяющую уравнению $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x$.

5. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством $3|y-x|+|3y+x|\le 12$.

6. Найти все значения параметра *a*, при которых в решении неравенства $x^2-4ax+2x+8a^2-2\le 0$ содержится хотя бы одно целое число. Какое наибольшее количество целых чисел может содержаться в решении данного неравенства?

7. Решить уравнение $\sqrt[5]{x}(\sqrt{5}+\sqrt[5]{x^2}+\sqrt{3})+3x(\sqrt{5}+9x^2+\sqrt{3})=0$.

8. Площадь треугольника *ABC* равна 24, $AB:BC=5:3$, расстояние от середины биссектрисы *BD* до стороны *AB* равно 3/2. Найти *BC*.

9. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ с ребрами $AB=3$, $AD=7$, $AA'=5\sqrt{2}$ через диагональ BD' проведена плоскость, пересекающая ребро AA' так, что сечение параллелепипеда этой плоскостью имеет наименьший периметр. Найти этот периметр.

10. Три куба $ABCDA'B'C'D'$ с ребром *a*, $DKLND''K'L'N'$ с ребром *b* и $NEFTN''E'F'Y'$ с ребром *c* совмещены гранями так, что $K\in(DC)$, $D''\in(DD')$, $E\in(LN)$, $N''\in(NN')$. Числа *a*, *b*, *c* образуют геометрическую прогрессию. Найти знаменатель этой прогрессии, если $(C'N')\perp(DF')$.

ВАРИАНТ 2 (10 класс)

1. Решить уравнение $x(x+2)(x+4)(x+6)=-16$.

2. Пусть $a=\sqrt{2012}-\sqrt{2013}$. Вычислить $a^2+\frac{1}{a^2}$.

3. В командных соревнованиях для получения одного призового места необходимо набрать *n* очков. В составе каждой команды 3 игрока. У одной из команд сумма набранных очков оказалась меньше *n*. Если бы 1-й игрок этой команды имел вдвое больше очков, то командная сумма составила бы $2n-34$ очков. С другой стороны, если бы 3-му игроку добавили бы вдвое больше очков, чем у него было, то та же сумма составила бы $2n+6$ очков. Найти *n*, если известно, что 2-й игрок этой команды имел на 9 очков больше, чем 1-й.

4. Найти функцию, удовлетворяющую уравнению $f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$.

5. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством $x^2+y^2+6(x-|y|)\le 0$.

6. Найти все значения параметра *a*, при которых в решении неравенства $x^2-4ax-2x+8a^2-4a-4\le 0$ содержится хотя бы одно целое число. Какое наибольшее количество целых чисел может содержаться в решении этого неравенства?

7. Решить уравнение $\sqrt[3]{x}(\sqrt{2}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{3})+2x(\sqrt{2}+4x^2+\sqrt{3})=0$.

8. В треугольнике *ABC* проведены высоты *BM* и *CN*, при этом $MN=10,\ BC=26$. Найти расстояние между серединами отрезков *MN* и *BC*.

9. Равносторонний треугольник *ABC* со стороной 1 служит основанием пирамиды *SABC*, а ребро $SA=2$ является ее высотой. Провести через ребро *SB* плоскость так, чтобы получить в сечении пирамиды треугольник с наименьшим периметром. Найти этот периметр.

10. Два куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и $DKLND_2K_1L_1N_1$ совмещены гранями так, что вершина D_2 второго куба лежит на ребре DD_1, вершина *K* на ребре DC первого куба. Тангенс угла φ между прямыми B_1N_1 и AD_2 равен $0,6\sqrt{5}$. Найти соотношение между ребрами кубов.

Задание	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**Итого**
Баллы	8	8	10	10	10	10	10	10	12	12	**100**

Критерии оценивания задания олимпиады:

\+ - полное обоснованное решение задачи.

$\pm$ - арифметическая ошибка в конце решения задачи; ошибка при выписывании ответа.

$\frac{1}{2}$ - получены существенные промежуточные результаты.

$\mp$ - получены некоторые промежуточные результаты; арифметическая ошибка допущена вначале решения, которая, при правильном ходе решения задачи, возможно, привела к неверному ответу.

$-$ - решение задачи неверно.

«нет»- решение задачи отсутствует.

Решение задач 1 варианта (10 класс)

Задача 1. *Решить уравнение* $(x-1)(x+2)(x+4)(x+7)=100.$

Решение. Перемножая в уравнении средние скобки и первую скобку с последней, получаем, что $(x^2+6x+8)(x^2+6x-7)=100$. При замене $t=x^2+6x-7$ имеем уравнение $t(t+15)=100$, корнями которого являются числа -20 и 5. Возвращаясь к переменной x получаем $x=-3\pm\sqrt{21}$.

Ответ: $-3\pm\sqrt{21}$.

Задача 2. *Пусть* $a=\sqrt{1580}-\sqrt{1581}$. *Вычислить* $a^2+\frac{1}{a^2}$.

Решение.

$$a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=\left(\sqrt{1580}-\sqrt{1581}+\frac{1}{\sqrt{1580}-\sqrt{1581}}\right)^2-2=$$

$$=\left(\sqrt{1580}-\sqrt{1581}+\frac{\sqrt{1580}+\sqrt{1581}}{-1}\right)^2-2=\left(-2\sqrt{1581}\right)^2-2=6322.$$

Ответ: 6322.

Задача 3. *Три группы рыбаков поймали 113 рыб. На каждого рыбака 1 группы пришлось по 13 рыб, на каждого рыбака II группы - по 5 рыб и на каждого рыбака III группы – по 4 рыбы. Сколько рыбаков было в каждой группе, если всего их было 16?*

Решение. Пусть x, y, z - соответственно число рыбаков в 1-й, 2-й и третьей группах. Тогда $\begin{cases}13x+5y+4z=113,\\ x+y+z=16\end{cases}$. Решением этой системы могут быть только целые положительные числа. Покажем, что с учетом этого факта данная система имеет единственное решение. Из системы следует, что $9x=49-y$. Так как $x>0,\ z>0$, то $y=16-x-z<16$. Таким образом, правая часть выражения $9x=49-y$ кратна 9 и в тоже время заключена между 33 и 49. Значит, либо $9x=36$, либо $9x=45$. В первом случае $x=4, y=13, z=-1$, что противоречит положительности z. Во втором случае $x=5,\ y=4,\ z=7$.

Ответ: 5;4;7.

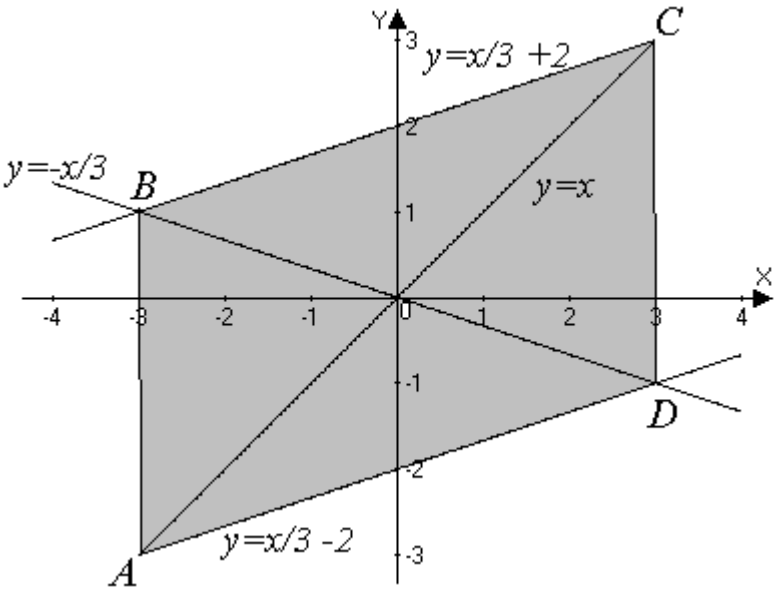
Задача 4. *Найти функцию, удовлетворяющую уравнению* $f\left(x\right)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x$.

Решение. В соответствии с накладываемым на функцию условием, запишем систему $\begin{cases} f\left(x\right)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x \\ f\left(\frac{1}{x}\right)+2f\left(x\right)=\frac{1}{x} \end{cases}$. Умножив второе уравнение на 2 и вычитая затем из второго уравнения первое, получим $f\left(x\right)=\frac{2-x^2}{3x}$.

Ответ: $f\left(x\right)=\frac{2-x^2}{3x}$.

Задача 5. *Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством* $3\left|y-x\right|+\left|3y+x\right|\le 12$.

Решение.



После раскрытия модулей область, заданная неравенством $\left|y-x\right|+\left|y+\frac{1}{3}x\right|\le 4$ представляет собой параллелограмм $ABCD$. Основание параллелограмма $CD=4,$ высота 6. Отсюда его площадь 24.
Ответ: 24.

Задача 6. *Найти все значения параметра а, при которых в решении неравенства* $x^2-4ax+2x+8a^2-2\le 0$ *содержится хотя бы одно целое число. Какое наибольшее количество целых чисел может содержаться в решении данного неравенства?*

Решение. Рассмотрим функцию $y=x^2-4ax+2x+8a^2-2$. Найдем линию вершин этой параболы. Имеем $x_в=2a-1,\ \ y_в=4a^2+4a-3$, следовательно, $y_в=x_в^2+4x_в$. Неравенство $x^2-4ax+2x+8a^2-2\le 0$ имеет решение тогда и только тогда, когда $y_в\le 0$, т. е. $x_в\in\left[-4;0\right]$, откуда $a\in\left[-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right]$. Покажем, что при этих значениях параметра в решении неравенства содержится хотя бы одно целое число.

Подставим $x=0$ в исходное неравенство, получим $a\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$. Подставим $x=-4$ в исходное неравенство, получим $a\in\left[-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right]$. Значит, при $a\in\left[-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right]$ или целое число 0, или целое число -4 содержится в решении данного неравенства.

Так как наибольшее количество целых чисел может содержаться в решении данного неравенства при $y_{в\ наим}=-4$, то легко видеть, что целых чисел будет 5.

Ответ: при $a\in\left[-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right]$. Наибольшее количество целых чисел равно 5.

Задача 7. *Решить уравнение* $\sqrt[5]{x}(\sqrt{5}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{3})+3x(\sqrt{5}+9x^2+\sqrt{3})=0$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=x(\sqrt{5}+x^2+\sqrt{3})$. Она является нечетной и возрастающей. Уравнение можно записать в виде: $f(\sqrt[5]{x})+f(3x)=0$. В соответствии со свойствами этой функции должно выполняться равенство $-\sqrt[5]{x}=3x$. Отсюда $x=0$.

Ответ: $x=0$.

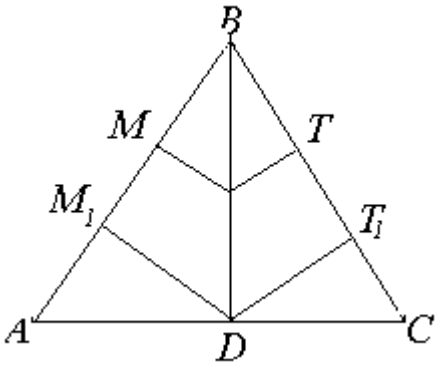
Задача 8. *Площадь треугольника* ABC *равна 24,* $AB:BC=5:3$*, расстояние от середины биссектрисы* BD *до стороны* AB *равно* $\frac{3}{2}$*. Найти* BC.

Решение. Из середины О биссектрисы BD и из точки D опустим перпендикуляры на стороны угла ABC.

Тогда:

а) $OM=OT=\frac{3}{2}$ - по условию,

б) $DM_1=DT_1=2\cdot OM=2\cdot\frac{3}{2}=3$ - из подобия треугольников DM_1B, OMB с коэффициентом подобия $k=\frac{DB}{OB}=2$. По условию $\frac{AB}{BC}=\frac{5}{3}$. Значит, $AB=5n,$. $BC=3n, n>0$. Искомую величину $BC=3n$ найдем через площади:



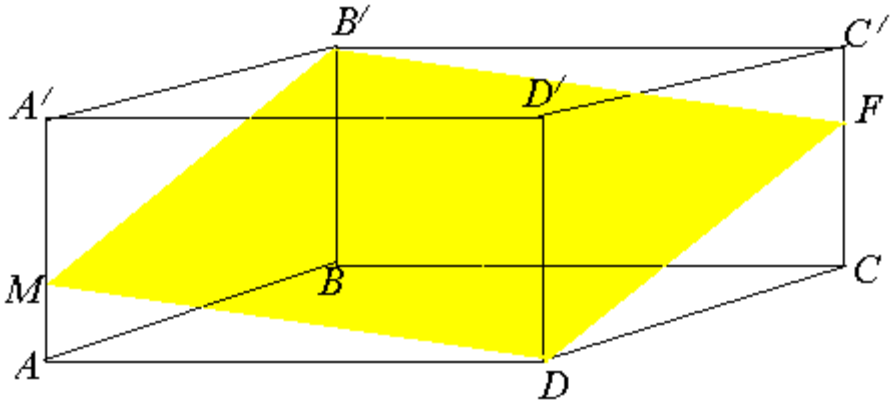
$S_{\triangle BDA}+S_{\triangle BDC}=S_{\triangle ABC}$, $\frac{1}{2}AB\cdot DM_1+\frac{1}{2}BC\cdot DT_1=24$, $\frac{1}{2}5n\cdot 3+\frac{1}{2}3n\cdot 3=24\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow BC=3\cdot 2=6$.

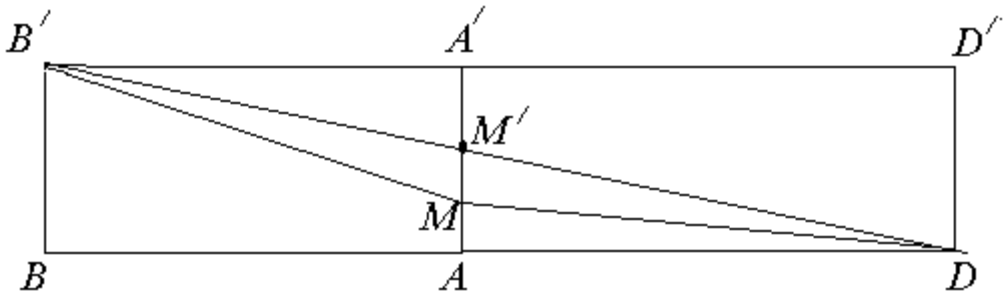
Ответ: 6.

Задача 9. *В прямоугольном параллелепипеде* $ABCDA'B'C'D'$ *с ребрами* $AB=3, AD=7, AA'=5\sqrt{2}$ *через диагональ* BD' *проведена плоскость, пересекающая ребро* AA' *так, что сечение параллелепипеда этой плоскостью имеет наименьший периметр. Найти этот периметр.*

Решение. Сечение параллелепипеда - параллелограмм $DMB'F$.

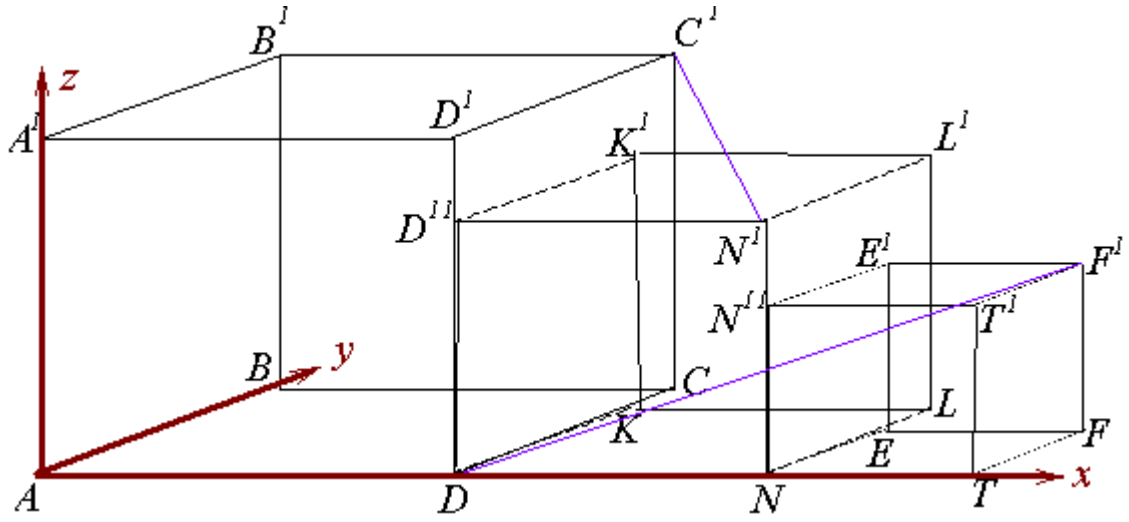


Сделаем развертку граней $ABB'A'$ и $ADD'A'$.Видно, что длина $B'M+MD$ будет наименьшей, когда $M\equiv M'\in(B'D)$. $\Delta DAM'$ подобен $\Delta B'A'M'$. поэтому $\frac{DM'}{M'B'}=\frac{AD}{A'B'}=\frac{7}{3}$, $B'D=\sqrt{50+100}=5\sqrt{6}$. Отсюда $P_{наим}=10\sqrt{6}$.



Ответ: $P_{наим}=10\sqrt{6}$.

Задача 10. *Три куба* $ABCDA'B'C'D'$ *с ребром* a, $DKLND''K'L'N'$ *с ребром* b *и* $NEFTN''E'F'Y'$ *с ребром* c *совмещены гранями так, что* $K\in(DC), D''\in(DD')$, $E\in(LN), N''\in(NN')$. *Числа* a,b,c *образуют геометрическую прогрессию. Найти знаменатель этой прогрессии, если* $(C'N')\perp(DF')$.



Решение. Не нарушая общности рассуждений, примем $a=1$. Тогда $b=q, c=q^2$. В соответствии с рис. введем координаты точек $C^{/}(1;1;1)$, $N^{/}(1+q;0;q)$, $D(1;0;0)$, $F^{/}(1+q+q^2;q^2;q^2)$. Тогда $\overrightarrow{C^{/}N^{/}}=(q;-1;q-1)$, $\overrightarrow{DF^{/}}=(q+q^2,q^2;q^2)$. Из условия $\overrightarrow{C^{/}N^{/}}\perp\overrightarrow{DF^{/}}$ следует, что $\overrightarrow{C^{/}N^{/}}\cdot\overrightarrow{DF^{/}}=0\Rightarrow q^2+q^3-q^2+q^3-q^2=0\Rightarrow q^2(2q-1)=0,\Rightarrow q=\frac{1}{2}$.

Ответ: $q=\frac{1}{2}$.

Решение задач 2 варианта (10 класс)

Задача 1. *Решить уравнение* $x\left(x+2\right)\left(x+4\right)\left(x+6\right)=-16$.

Решение. Перемножая в уравнении средние скобки и первую скобку с последней, получаем, что $\left(x^2+6x+8\right)\left(x^2+6x\right)=-16$. При замене $t=x^2+6x$ имеем уравнение $\left(t+8\right)t=-16$, корнем которого является число -4. Возвращаясь к переменной *x* получаем $x=-3\pm\sqrt{5}$.

Ответ: $x=-3\pm\sqrt{5}$.

Задача 2. *Пусть* $a=\sqrt{2012}-\sqrt{2013}$. *Вычислить* $a^2+\frac{1}{a^2}$.

Решение.

$$a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=\left(\sqrt{2012}-\sqrt{2013}+\frac{1}{\sqrt{2012}-\sqrt{2013}}\right)^2-2=$$

$$=\left(\sqrt{2012}-\sqrt{2013}+\frac{\sqrt{2012}-\sqrt{2013}}{-1}\right)^2-2=\left(-2\sqrt{2013}\right)^2-2=8050.$$

Ответ: 8050.

Задача 2. *В командных соревнованиях для получения одного призового места необходимо набрать n очков. В составе каждой команды 3 игрока. У одной из команд сумма набранных очков оказалась меньше n. Если бы 1-й игрок этой команды имел вдвое больше очков, то командная сумма составила бы* $2n-34$ *очков. С другой стороны, если бы 3-му игроку добавили бы вдвое больше очков, чем у него было, то та же сумма составила бы* $2n+6$ *очков. Найти n, если известно, что 2-й игрок этой команды имел на 9 очков больше, чем 1-й.*

Решение. Обозначим наличие очков у 1-го игрока x, у второго - y, у третьего z. Тогда из условия задачи вытекает: $x+y+z<n,\ y=x+9\Rightarrow\begin{cases}2x+z+9<n\\3x+9+z=2n-34\\2x+9+3z=2n+6\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x<-z+25\\x=2z-40\end{cases}.$$

Учитывая, что $x>0$, приходим к выводу, что $20<z\le 21$. Отсюда $\begin{cases}x=2\\z=21\end{cases}\Rightarrow n=35.$

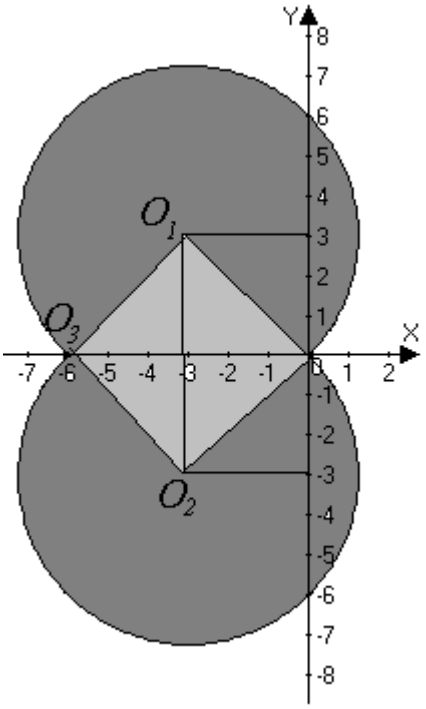
Ответ: $n=35$.

Задача 3. *Найти функцию, удовлетворяющую уравнению* $f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$.

Решение. В соответствии с условием составим систему $\begin{cases}f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x\\f(\frac{1}{x})-2f(x)=\frac{3}{x}\end{cases}$. Умножив второе уравнение на 2 и сложив затем оба уравнения, найдем $f(x)=-x-\frac{2}{x}$.

Ответ: $f(x) = -x - \dfrac{2}{x}$.

Задача 5. *Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством* $x^2 + y^2 + 6(x - |y|) \le 0$.



Решение. После выделения полных квадратов придем к виду: $(x+3)^2 + (|y|-3)^2 \le 18$.

Область на координатной плоскости, заданная этим неравенством изображена на рис. Площадь *S* заштрихованной фигуры можно вычислить, представив ее в виде:

$$S = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 18 + S_{oo_1o_2o_3} = 27\pi + (3\sqrt{2})^2 = 27\pi + 18.$$

Ответ: $27\pi + 18$

Задача 6. *Найти все значения параметра а, при которых в решении неравенства* $x^2 - 4ax - 2x + 8a^2 - 4a - 4 \le 0$ *содержится хотя бы одно целое число. Какое наибольшее количество целых чисел может содержаться в решении этого неравенства?*

Решение. Рассмотрим функцию $y = x^2 - 4ax - 2x + 8a^2 - 4a - 4$. Найдем линию вершин этой параболы. Имеем $x_в = 2a + 1$, $y_в = 4a^2 - 8a - 5$, следовательно, $y_в = x_в^2 - 6x_в$. Неравенство $x^2 - 4ax - 2x + 8a^2 - 4a - 4 \le 0$ имеет решение тогда и только тогда, когда $y_в \le 0$, т. е. $x_в \in [0;6]$, откуда $a \in \left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right]$. Покажем, что при этих значениях параметра в решении неравенства содержится хотя бы одно целое число. Подставим $x = 0$ в исходное неравенство, получим $a \in \left[-\dfrac{1}{2};1\right]$. Подставим $x = 6$ в исходное неравенство, получим $a \in \left[1;\dfrac{5}{2}\right]$. Значит, при $a \in \left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right]$ или целое число 0, или целое число 6 содержится в решении данного неравенства.

Так как наибольшее количество целых чисел может содержаться в решении данного неравенства при $y_{в\ наим} = -9$, то легко видеть, что целых чисел будет 7.

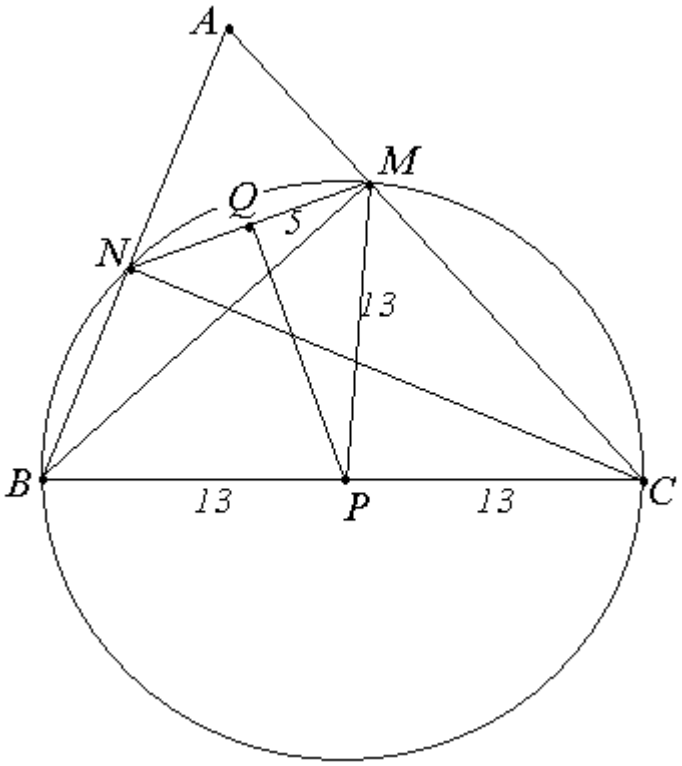
Ответ: при $a \in \left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right]$. Наибольшее количество целых чисел равно 7.

Задача 7. *Решить уравнение* $\sqrt[3]{x}(\sqrt{2}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{3})+2x(\sqrt{2}+4x^2+\sqrt{3})=0$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=x(\sqrt{2}+x^2+\sqrt{3})$. Она является нечетной и возрастающей. Уравнение можно записать в виде: $\sqrt[3]{x}(\sqrt{2}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{3})+2x(\sqrt{2}+4x^2+\sqrt{3})=0 \Rightarrow f(\sqrt[3]{x})+f(2x)=0$. В соответствии со свойствами этой функции должно выполняться равенство $-\sqrt[3]{x}=2x$. Отсюда $x=0$.

Ответ: $x=0$.

Задача 8. *В треугольнике* ABC *проведены высоты* BM, CN, *при этом* $MN=10,\ BC=26$. *Найти расстояние между серединами отрезков* MN *и* BC.



Решение. Пусть P, Q - середины отрезков BC, MN соответственно. Из точек M и N отрезок BC виден под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром BC. Точка P - центр окружности, а Q - середина хорды MN, поэтому $PQ \perp MN$. Из прямоугольного треугольника PQM находим, что $PQ=\sqrt{PM^2-QM^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$

Ответ: 12.

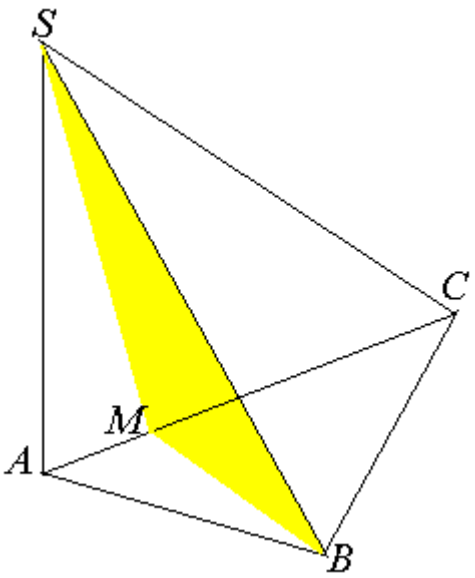
Задача 9. *Равносторонний треугольник ABC со стороной 1 служит основанием пирамиды* $SABC$, *а ребро* $SA=2$ *является ее высотой. Провести через ребро* SB *плоскость так, чтобы получить в сечении пирамиды треугольник с наименьшим периметром. Найти этот периметр.*

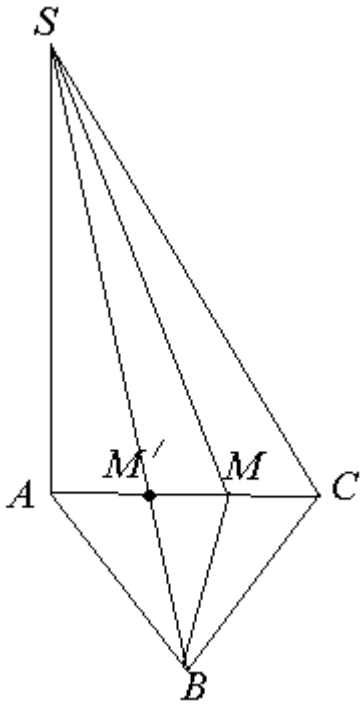
Решение. $AB=BC=CA=1,\ SA=3, P_{\Delta SBM}=SB+BM+SM$. Сделаем развертку граней SFC и ABC.

Наименьшее значение периметра сечения достигается, когда $M \equiv M' \Rightarrow M \in (SB)$. Из $\Delta SAB \Rightarrow SB=\sqrt{5}$. Из $\Delta SDB \Rightarrow SM+BM= =\sqrt{\frac{1}{4}+(2+\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\sqrt{5+2\sqrt{3}}$.

Тогда $P_{наим} = \sqrt{5} + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}$.

Ответ:





$P_{наим} = \sqrt{5} + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}$.

Задача 10. *Два куба* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *и* $DKLND_2K_1L_1N_1$ *совмещены гранями так, что вершина* D_2 *второго куба лежит на ребре* DD_1, *вершина* K *на ребре* DC *первого куба. Тангенс угла* φ *между прямыми* B_1N_1 *и* AD_2 *равен* $\frac{3}{\sqrt{5}}$. *Найти соотношение между ребрами кубов.*

Решение. Примем длину ребра большого куба за 1, малого куба за a .

Введем систему координат, как показано на рис.

$\overrightarrow{AD_2} = (1;0;a)$, $B_1(0;1;1)$, $N_1(1+a;0;a)$

$\Rightarrow \overrightarrow{B_1N_1} = (1+a;-1;a-1)$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{AD_2} \cdot \overrightarrow{B_1N_1}\right|}{\left|\overrightarrow{AD_2}\right| \cdot \left|\overrightarrow{B_1N_1}\right|} = \frac{1+a+a^2-a}{\sqrt{a^2+1} \cdot \sqrt{2a^2+3}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2+1}{2a^2+3}} .$$

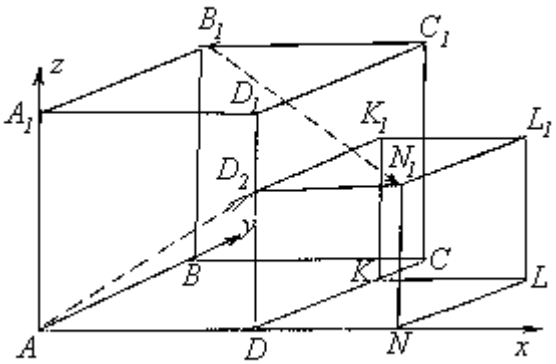


Рис.

Из основного тригонометрического тождества вытекает, что $tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 \Rightarrow \frac{9}{5} = \frac{a^2+2}{a^2+1} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$. Таким образом, отношение ребер кубов составляет 1:2.

Ответ: 1:2.

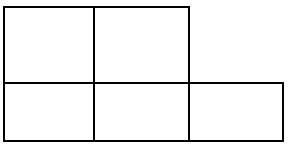
ВАРИАНТ 1 (9 класс).

1. Известно, что p и q – простые числа, такие, что $(p^2 + 1)$ делится на q, а $(q^2 – 1)$ делится на p. Докажите, что $(p + q + 1)$ – составное число.

2. В ромбе $ABCD$ на сторонах AB и BC взяты, соответственно, точки E и F, такие, что $CF/BF = BE/AE = 2012$. Оказалось, что $DE = DF$. Найдите величину угла BAD.

3. В прямоугольном треугольнике с катетами 3 и 4 см проведены высота прямого угла и медиана большего из острых углов. В каком отношении высота делит медиану?

4. Прямоугольник, стороны которого выражаются целыми числами, можно разрезать на фигурки вида, изображенного на рисунке (сторона клетки равна единице). Докажите, что его можно разрезать на прямоугольники 1 × 5.



5. Одна руда содержит 72% железа и 28% пустой породы, а другая – 56% железа и 44% пустой породы. Сколько нужно взять первой и второй руды, чтобы получить 10т руды с содержанием железа 60%?

6. Решите неравенство $\left|\frac{x^3+8}{x^2-2x+4}\right| < 0,4 \cdot 2\frac{1}{2} \cdot tg45^\circ + 5|x|^0 - \frac{x^{-2012}}{x^{-2013}}$.

7. Известно, что график функции $y = (x-2)\left(x^2 - 3a^2x - 2x + 2a^4 + 3a^2 + 1\right)$ пересекает оси координат ровно в трёх точках. Найти площадь треугольника с вершинами в этих точках.

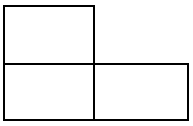
ВАРИАНТ 2 (9 класс)

1. Докажите, что если a, b, c - нечётные числа, то хотя бы одно из чисел $ab-1$, $bc-1$ или $ac-1$ делится на 4.

2. В ромбе $ABCD$ на сторонах AB и BC взяты, соответственно, точки E и F, такие, что $CF/BF = BE/AE = 2013$. Оказалось, что $DE = DF$. Найдите величину угла ABC.

3. В прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, делит ее на отрезки, разность которых равна одному из катетов треугольника. Найти углы треугольника.

4. Прямоугольник, стороны которого выражаются целыми числами, можно разрезать на фигурки вида, изображенного на рисунке (сторона клетки равна единице). Докажите, что его можно разрезать на прямоугольники 1 × 3.



5. Имеется 5 литров 70%-го раствора серной кислоты. Сколько литров 80%-го раствора серной кислоты нужно долить в этот раствор, чтобы получился 72%-й раствор серной кислоты?

6. Решите неравенство $\sqrt{x^2-\frac{6x^2}{|x|}+\frac{3}{\left(tg30^\circ\right)^2}}>\frac{1}{2}\left(\sin 30^\circ\right)^2$.

7. Известно, что график функции $y=\left(x-4\right)\left(x^2-3a^2x-3x+2a^4+5a^2+2\right)$ пересекает оси координат ровно в трёх точках. Найти площадь треугольника с вершинами в этих точках.

Задание	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**Итого**
Баллы	12	12	12	16	16	16	16	**100**

Общие критерии оценивания заданий олимпиады:

\+ - полное обоснованное решение задачи.

$\pm$ - арифметическая ошибка в конце решения задачи; ошибка при выписывании ответа.

$\frac{1}{2}$ - получены существенные промежуточные результаты.

$\mp$ - получены некоторые промежуточные результаты; арифметическая ошибка допущена вначале решения, которая, при правильном ходе решения задачи, возможно, привела к неверному ответу.

$-$ - решение задачи неверно.

«нет»- решение задачи отсутствует.

Решение задач 9 класса

Задача 1. Вариант 1.

p и q – простые числа, такие, что ($p^2 + 1$) делится на q, а ($q^2 – 1$) делится на p. Докажите, что (p + q + 1) – составное число.

Решение: Так как (q + 1)(q – 1) делится на p, то одно из чисел q + 1 или q – 1 делится на p. Если q + 1 делится на p, то и p + q + 1 делится на p. Если же q – 1 делится на p, то q = kp + 1 для некоторого натурального k ≤ p. По условию, $p^2 + 1$ делится на q, значит, $p^2 + 1 – q = p^2 – kp = p(p – k)$ делится на q, значит, p – k делится на q. Следовательно, k = p (иначе 0 < p – k < q), то есть $q = p^2 + 1$. Но тогда $p + q + 1 = p^2 + p + 2$ – четное число, большее двух.

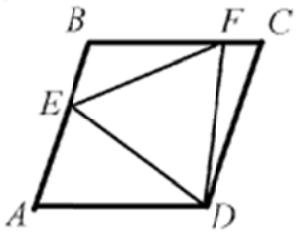
Задача 1. Вариант 2.

Докажите, что если ***a***, ***b***, ***c*** - нечётные числа, то хотя бы одно из чисел ***ab*- 1**, ***bc* - 1** или ***ac* - 1** делится на **4**.

Решение: Остаток от деления нечетного числа на 4 может быть либо 3, либо 1. Если среди чисел *a*, *b*, *c* есть хотя бы два числа, остатки от деления которых на 4 равны 1, то их произведение при делении на 4 также даёт остаток 1. Следовательно, разность этого произведения и единицы делится на 4, ч. т. д. В противном случае, среди данных найдутся хотя бы два числа, остатки от деления которых на 4 равны 3. Так как $(4m + 3)*(4n+ 3) - 1 = 16mn + 12m+ 12n + 8 = 4(4mn + 3m + 3n + 2)$, то разность произведения этих чисел и единицы делится на 4, ч. т. д.

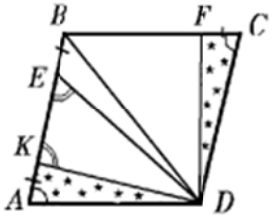
Задача 2.

В ромбе ABCD на сторонах AB и BC взяты, соответственно, точки E и F, такие, что CF/BF = BE/AE = 2012 [2013]. Оказалось, что DE = DF. Найдите величину угла BAD[ABC].



Решение: Ответы: в первом варианте – 60, во втором – 120.

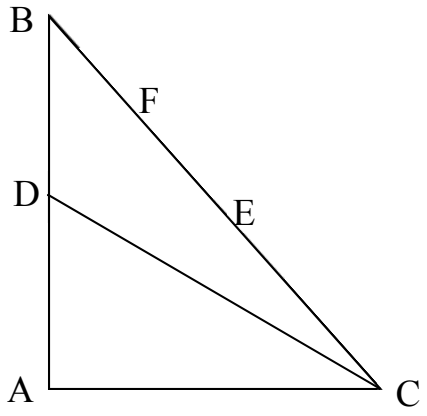
Из условия задачи (в обоих вариантах) следует, что BE = CF. Отложим на стороне AB отрезок AK, равный BE. Треугольники ADK и CDF равны по двум сторонам и углу (AD = CD, AK = CF, ∠ DAK = ∠ DCF). Значит, DK = DF = DE, то есть треугольник DKE – равнобедренный. В частности, равны углы DKE и DEK при его основании. Следовательно, треугольники ADK и BDE равны (по двум сторонам и углу: AK = BE, DK = DE, ∠ DKA = ∠ DEB). Отсюда AD = BD, то есть треугольник ABD – равносторонний. Следовательно, ∠ BAD = 60, ∠ ABC = 120.



Задача 3. Вариант 1.

В прямоугольном треугольнике с катетами 3 и 4 см проведены высота прямого угла и медиана большего из острых углов. В каком отношении высота делит медиану?

Ответ: 9:8, считая от основания.



Решение. Проведем отрезок DF, параллельный высоте AE. По теореме Фалеса, он разделит отрезок BE пополам. По теореме Пифагора, гипотенуза треугольника ABC равна 5 см. Кроме этого $AE^2 = BE \cdot EC$, и $AE \cdot BC = AB \cdot AC$. Отсюда: $AE = 2{,}4,\ \ 2{,}4^2 = x \cdot (5 - x)$. Отсюда $x = 3{,}2$. То есть BE=3,2, FE=1,6, EC=1,8. Из параллельности отрезков DF и GE следует, что $\frac{CG}{GD} = \frac{CE}{EF} = \frac{1{,}8}{1{,}6} = 9 : 8$.

Задача 3. Вариант 2.

В прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, делит ее на отрезки, разность которых равна одному из катетов треугольника. Найти углы треугольника.

Решение: Пусть ABC прямоугольный треугольник с прямым углом B и BH высота. На отрезке HC отметим точку K с $AH = HK$. Из условия задачи следует, что $KC = AB = BK$. Поэтому $\angle BAC = \angle AKB = 2\angle ACB$. Отсюда находим, что $\angle ACB = 30°,\ \ \angle BAC = 60°$.

Задача 4.

Прямоугольник, стороны которого выражаются целыми числами, можно разрезать на фигурки вида [ ] (сторона клетки на рисунке равна единице). Докажите, что его можно разрезать на прямоугольники 1 × 5 [1 × 3].

Решение: Площадь данного прямоугольника делится нацело на площадь указанной фигурки, то есть на 5 [3]. Площадь прямоугольника равна произведению длин сторон. Поскольку длины сторон – целые числа, а 5 [3] – простое число, то длина одной из сторон должна делится на 5 [3]. Разделим эту сторону и противоположную ей на отрезки длины 5 [3], а две другие стороны – на отрезки длины 1, после чего соединим соответствующие точки на противоположных сторонах прямыми линиями.

Задача 5. Вариант 1.

0,72x + (10 – x)*0,56 = 6 **Ответ**: 2,5 т и 7,5 т

Задача 5. Вариант 2.

3,5 + 0,8x = 3,6 + 0,72x **Ответ**: 1,25л

Задача 6. Вариант 1.

Решите неравенство: $\left|\frac{x^3 + 8}{x^2 - 2x + 4}\right| < 0{,}4 \cdot 2\frac{1}{2} \cdot tg45^\circ + 5|x|^0 - \frac{x^{-2012}}{x^{-2013}}.$

Решение: $x \neq 0$.

$|x+2| < \frac{0{,}4\cdot 5}{2} + 5 - x; \Leftrightarrow \quad |x+2| < 1 + 5 - x; \Leftrightarrow \quad |x+2| < 6 - x;$

$\begin{cases} x+2 < 6-x; \\ x+2 > x-6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2; \\ 2 < -6 \end{cases} \Leftrightarrow x \epsilon (-\infty; 0) \cup (0; 2).$

Ответ: x $\epsilon (-\infty; 0) \cup (0; 2)$.

Задача 6. Вариант 2.

Решите неравенство: $\sqrt{x^2 - \frac{6x^2}{|x|} + \frac{3}{\left(tg30^\circ\right)^2}} > \frac{1}{2}\left(\sin 30^\circ\right)^2.$

Решение: $x \neq 0$. Замена: $|x|=t> 0$,

$\sqrt{t^2 - 6t + 9} > \frac{1}{8} \Leftrightarrow |t-3| > \frac{1}{8} \Leftrightarrow t - 3 > \frac{1}{8}, t - 3 < -\frac{1}{8} \Leftrightarrow t > 3\frac{1}{8}, t < 2\frac{7}{8}$

Обратная замена: $t=|x|$ $\Leftrightarrow$ **Ответ:** $x \epsilon \left(-\infty; -3\frac{1}{8}\right) \cup \left(-2\frac{7}{8}; 0\right) \cup \left(0; 2\frac{7}{8}\right) \cup \left(3\frac{1}{8}; +\infty\right).$

Задача 7. Вариант 1.

Известно, что график функции $y = \left(x-2\right)\left(x^2 - 3a^2x - 2x + 2a^4 + 3a^2 + 1\right)$ пересекает оси координат ровно в трёх точках. Найти площадь треугольника с вершинами в этих точках.

Решение: Для данной функции имеем $y\left(0\right) = -2\left(2a^4 + 3a^2 + 1\right)$. Найдем нули данной функции: $\left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x^2 - 3a^2x - 2x + 2a^4 + 3a^2 + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 2a^2 + 1. \\ x_3 = a^2 + 1 \end{array}\right.$

График функции пересекает оси координат ровно в трёх точках, следовательно, должны совпадать два из трех нулей функции. Получаем три случая:

$x_1 = x_2 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2a^2 + 1 \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_3 = \frac{3}{2}, y\left(0\right) = -6 \Rightarrow S = \frac{3}{2};$

$x_1 = x_3 = 2 \Leftrightarrow 2 = a^2 + 1 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Rightarrow x_2 = 3, y\left(0\right) = -12 \Rightarrow S = 6;$

$x_2 = x_3 \Leftrightarrow a^2 + 1 = 2a^2 + 1 \Leftrightarrow a = 0 \Rightarrow x_{2,3} = 1, y\left(0\right) = -2 \Rightarrow S = 1.$

Ответ: 1 или 1,5 или 6.

Задача 6. Вариант 2

Известно, что график функции $y=\left(x-4\right)\left(x^2-3a^2x-3x+2a^4+5a^2+2\right)$ пересекает оси координат ровно в трёх точках. Найти площадь треугольника с вершинами в этих точках.

Решение: Для данной функции имеем $y\left(0\right)=-4\left(2a^4+5a^2+2\right)$. Найдем нули данной функции: $\left[\begin{array}{l} x_1=4 \\ x^2-3a^2x-3x+2a^4+5a^2+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=4 \\ x_2=2a^2+1 \\ x_3=a^2+2 \end{array}\right.$.

График функции пересекает оси координат ровно в трёх точках, следовательно, должны совпадать два из трех нулей функции. Получаем три случая:

$$x_1=x_2=4 \Leftrightarrow 4=2a^2+1 \Leftrightarrow a^2=\frac{3}{2} \Rightarrow x_3=\frac{7}{2}, y\left(0\right)=-56 \Rightarrow S=14;$$

$$x_1=x_3=4 \Leftrightarrow 4=a^2+2 \Leftrightarrow a^2=2 \Rightarrow x_2=5, y\left(0\right)=-80 \Rightarrow S=40;$$

$$x_2=x_3 \Leftrightarrow a^2+2=2a^2+1 \Leftrightarrow a=1 \Rightarrow x_{2,3}=3, y\left(0\right)=-36 \Rightarrow S=18.$$

Ответ: 14 или 18 или 40.

ВАРИАНТ 1 (8 класс)

1. Известно, что $a^2+b^2=1+ab$. Доказать, что $a^3-b=a-b^3$.

2. После того, как Вася съел половину ягод из банки, уровень компота понизился на одну треть. На какую часть (от нового уровня) понизится уровень компота, если съесть половину оставшихся ягод?

3. Доказать, что сумма чисел $5^1+5^2+5^3+\ldots+5^{2013}$ делится на 31.

4. Один из углов треугольника равен 76 градусов. Найти угол между биссектрисами двух других углов.

5. Грани куба можно окрасить либо в красный цвет, либо в зеленый, либо некоторые в красный, а некоторые в зеленый. Сколько существует разных способов окраски? (Два куба считаем окрашенными различно, если их нельзя перепутать, как не вращай).

6. Построить квадрат по сумме его диагонали и стороны.

7. Через точку, взятую на стороне треугольника, проведены две прямые параллельные двум другим сторонам треугольника. Эти прямые разбивают данный треугольник на три части – параллелограмм и два треугольника. Площади треугольников равны S_1 и S_2. Найти площадь параллелограмма.

ВАРИАНТ 2

1. Известно, что $a^2 + b^2 = 1 - ab$. Доказать, что $a^3 + b = b^3 + a$.

2. После того, как Коля съел одну треть ягод из банки, уровень компота понизился на одну четверть. На какую часть (от нового уровня) понизится уровень компота, если съесть треть оставшихся ягод?

2. Доказать, что сумма чисел $3^1+3^2+3^3+\ldots+3^{2013}$ делится на 13.

4. В треугольнике *ABC* биссектрисы *AL* и *CK* пересекаются под углом 57 градусов. Найти величину угла *B*.

5. При приготовлении бутерброда к начинке можно добавить один или несколько разных компонентов из набора: перец, лук, грибы, помидоры, кетчуп, огурцы. Сколько разных видов бутербродов можно приготовить?

6. Построить прямоугольник по диагонали и периметру.

7. Через точку *M* взятую на стороне *AB* треугольника *ABC* проведены две прямые параллельные двум другим сторонам треугольника и пересекающие сторону *BC* в точке *L*, а сторону *AC* в точке *K*. Известно, что $S_\Delta AMK = S_1$, $S_\Delta KLC = S_2$. Найти $S_\Delta MBL$.

Задание	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**Итого**
Баллы	12	12	12	12	12	20	20	**100**

Общие критерии оценивания заданий олимпиады:

\+ - полное обоснованное решение задачи.

$\pm$ - арифметическая ошибка в конце решения задачи; ошибка при выписывании ответа.

$\frac{1}{2}$ - получены существенные промежуточные результаты.

$\mp$ - получены некоторые промежуточные результаты; арифметическая ошибка допущена вначале решения, которая, при правильном ходе решения задачи, возможно, привела к неверному ответу.

$-$ - решение задачи неверно.

«нет»- решение задачи отсутствует.

Решение задач 8 класса

Вариант 1.

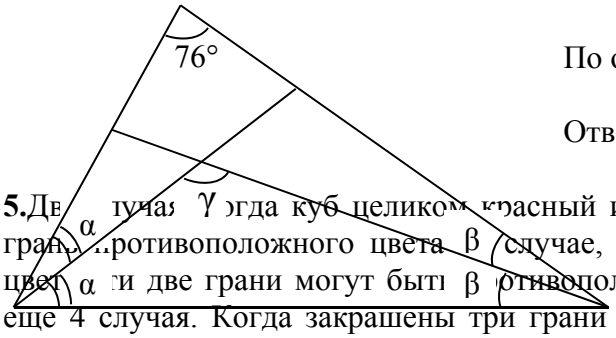
1. $b^2 + a^2 = 1 + ab$; $a^2 - ab + b^2 = 1$;
$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)$; $a^3 + b^3 = a + b$;
$a^3 - b = a - b^3$. Ч.т.д.

2.Половина ягод занимала $\frac{1}{3}$ банки. Половина оставшихся ягод составит $\frac{1}{6}$ банки. От нового уровня $\left(\frac{2}{3}\text{ банки}\right)$ $\frac{1}{6}$ банки составит $\frac{1}{4}$ часть.

Ответ:1/4.

3.$5^1+5^2+5^3+\cdots..+5^{2013}=5(1+5+5^2)+5^4(1+5+5^2)+\cdots..+5^{2011}(1+5+5^2)=31(5+5^4+\cdots.+5^{2011})$

4. $2\alpha+2\beta+76^\circ=180^\circ$, значит, $\alpha+\beta=52^\circ$. Откуда получаем, что $180^\circ-52^\circ=\gamma=122^\circ$.

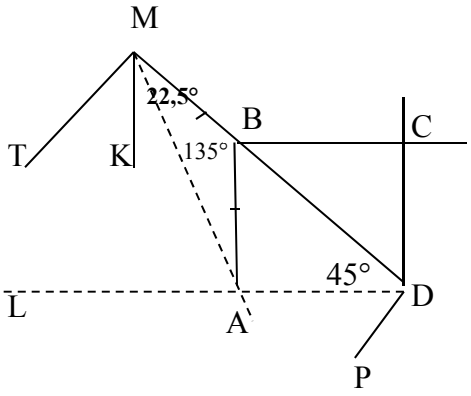


По определению угол между прямыми – острый.

Ответ 52^0.

5.Два случая, когда куб целиком красный или зеленый. Два случая, когда закрашена одна грань противоположного цвета. В случае, когда закрашены две грани противоположного цвета, и две грани могут быть противоположны друг другу или соседствовать. Получаем еще 4 случая. Когда закрашены три грани протвоположного цвета, они или примыкают к одному углу, или граничат только одной стороной. Всего 10 закрашиваний куба. Ответ: 10.

6. Дано: отрезок, равный *a*+*d*.



Построение:

1. Строим отрезок MD, равный *a*+*d*. 2. В точках M и D проведём перпендикуляры MT и DP к прямой MD. 3. Строим биссектрису DL прямого угла MDP. 4. Строим биссектрису MK прямого угла TMD, затем биссектрису угла KMD, которая составляет с прямой MD угол в 22,5° . На пересечении этой биссектрисы с прямой DL отметим точку A. 5. В точке A проведем перпендикуляр к прямой AD, и на пересечении с прямой MD отметим точку B. 6. В точках B и D проведем перпендикуляры к прямым AB и AD, соответственно, и на их пересечении отметим точку C. Квадрат ABCD-искомый.

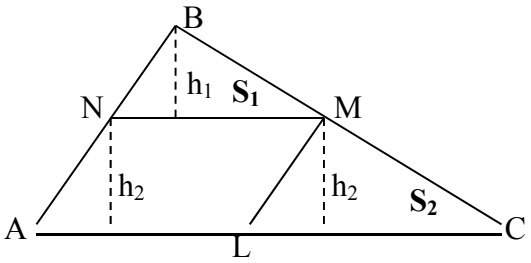
7. Через точку M, взятую на стороне BC треугольника ABC проведем прямые MN и ML, параллельные сторонам AC и AB, соответственно. Пусть $S_{NBM}=S_1$, $S_{LMC}=S_2$.

Обозначим h_1 высоту треугольника NBM , h_2 треугольника LMC и параллелограмма

ANML.Из подобия треугольников NBM и LMC имеем $\frac{h_1}{h_2}=\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$, откуда $h_1=\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}h_2$.

Так как площадь треугольника $S_1=\frac{1}{2}MN\cdot h_1$, то $S_1=\frac{1}{2}MN\cdot\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}h_2$, откуда

$MN\cdot h_2=S_{ANML}=\frac{2S_1\cdot\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}}=2\sqrt{S_1S_2}$. Ответ: $S=2\sqrt{S_1S_2}$.



Вариант 2.

1. $b^2+a^2=1-ab;\ a^2+ab+b^2=1;$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b);\ a^3-b^3=a-b;$

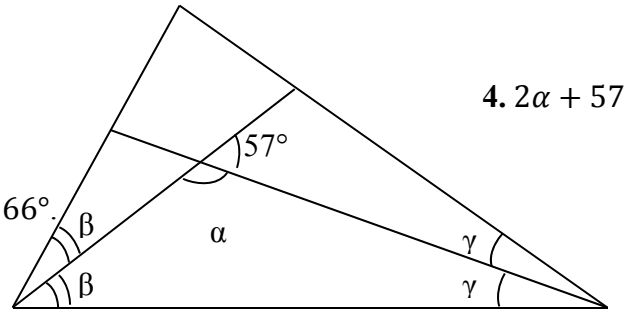
$a^3+b=a+b^3$. Ч.т.д.

2. Одна треть ягод занимала $\frac{1}{4}$ банки. Одна треть оставшихся ягод составит $\frac{2}{3}\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$ банки. От нового уровня $\left(\frac{3}{4}\text{ банки}\right)$ $\frac{1}{6}$ банки составит $\frac{2}{9}$.

Ответ: 2/9.

3. $3^1+3^2+3^3+\cdots..+3^{2013}=3(1+3+3^2)+3^4(1+3+3^2)+\cdots..+3^{2011}(1+3+3^2)=$

$=13(3+3^4+\cdots.+3^{2011})$. Ч. т. д.



4. $2\alpha+57\cdot2=360°;\ \alpha=123;\beta+\gamma=180°-\alpha=57°;$

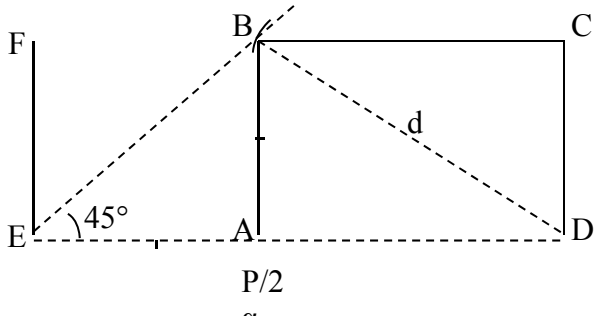
$2\cdot(\beta+\gamma)=114°;\ \angle B=180°-114°=$

Ответ: 66^0.

5. Мы можем выбрать все 6 приправ, 5 приправ,4,3,2,1 соответственно

$1 + C_6^5 + C_6^4 + C_6^3 + C_6^2 + 6 = 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 = 63$ способами. Ответ: 63 способа.

6. Дано: Отрезки, равные P, d.



Построение: 1. Разделим отрезок P пополам. 2. Построим ED=P/2. 3. В точке E восстановим перпендикуляр EF. 4. Построим биссектрису прямого угла DEF. 5. Проведем окружность с центром в точке D и радиусом d, точку пересечения окружности с биссектрисой угла DEF обозначим B. 6.Из точки B проведем перпендикуляр к прямой ED, на пересечении с ED отметим точку A. 7. В точках D и B проведем перпендикуляры к прямым AD и AB, соответственно, на пересечении перпендикуляров отметим точку C. ABCD- искомый прямоугольник.

7. Так как площадь параллелограмма $S_{KMLC} = 2S_2$, то из решения задачи 7 варианта 1 следует, что $2S_2 = 2\sqrt{S_1 \cdot S_{MBL}}$, откуда $S_{MBL} = \dfrac{S_2^2}{S_1}$.

Ответ: $S_{MBL} = \dfrac{S_2^2}{S_1}$.

ПРОТОКОЛ

утверждения вариантов заданий для проведения
заключительного этапа олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по физике и математике
в МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2013 году

Перечень вопросов и структуру вариантов заданий для проведения олимпиады школьников «Шаг в будущее» по физике и математике утвердить.

РЕКТОР
МГТУ им. Н.Э.Баумана А. А. АЛЕКСАНДРОВ

УТВЕРЖДАЮ

Председатель Жюри олимпиады
школьников «Шаг в будущее»,
Президент МГТУ им. Н.Э. Баумана
_____ И.Б. Федоров
«20» февраля 2013 г.

ПРАВИЛА
Оценивания заданий заключительного этапа олимпиады
Школьников «Шаг в будущее», 2013 г.

Общеобразовательный предмет «Математика»

Максимальная сумма баллов за 10 задач варианта – 100.

Распределение баллов по задачам следующее:

Номер задач	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Баллы	8	8	8	8	10	10	12	12	12	12

Задачи 1,2,3,4

Степень решенности задач	1	0,75	0,5	0,25	0
Баллы	8	6	4	2	0

Задачи 5,6

Степени решенности задачи	1	0,75	0,5	0,25	0
Баллы	10	8	5	2	0

Задачи 7,8,9,10

Степени решенности задачи	1	0,75	0,5	0,25	0
Баллы	12	9	6	3	0

Общеобразовательный предмет «Физика»

Максимальная сумма баллов за 10 задач варианта – 100.

Номер задач	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Баллы	8	8	10	10	10	10	10	10	12	12

Задачи 1,2

Степень	1	0,75	0,5	0,25	0
Баллы	8	6	4	2	0

Задачи 3,4,5,6,7,8

Степени решенности задачи	1	0,75	0,5	0,25	0
Баллы	10	8	5	2	0

Задачи 9,10

Степени решенности задачи	1	0,75	0,5	0,25	0
Баллы	12	9	6	3	0

Предмет «Физика», «Техника и технология»

Максимальная сумма баллов за 10 задач варианта – 50.

Распределение баллов по задачам следующее:

Номер задач	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Баллы	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6

Задачи 1,2

Степень	1	0,75	0,5	0,25	0
Баллы	4	3	2	1	0

Задачи 3,4,5,6,7,8

Степени решенности задачи	1	0,75	0,5	0,25	0
Баллы	5	4	3	1	0

Задачи 9,10

Степени решенности задачи	1	0,75	0,5	0,25	0
Баллы	6	4	3	2	0

Заместитель Председателя Жюри
олимпиады школьников «Шаг в будущее» _____ Д.А. Ягодников

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ОЛИМПИАДАМ ПО МАТЕМАТИКЕ

1. Конкурсные задачи по математике и физике: Пособие для поступающих в МГТУ им. Н.Э.Баумана / Л.П.Паршев, А.Г. Андреев, Н.А. Гладков и Ю.А. Струков; Под ред. С.В. Белова. - М.: Машиностроение, 1993. - 192с.
2. Справочное пособие для абитуриентов. Программы и содержание вступительных экзаменов по физике, математике, русскому языку и литературе литература / Сост.: Белов С.В., Камалова Р.А., Паршев Л.П., Струков Ю.А.; Под ред. С.В. Белова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. - 144с.
3. Типовые варианты заданий вступительных испытаний в 2003 г. математика, физика, русский язык и литература / Сост. : Камалова Р.А., Паршев Л.П., Струков Ю.А.; Под ред. Н.Я. Ирьянова / МГТУ им. Н.Э. Баумана. – М., 2003. - 45с.
4. Власова Е.А. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, ISBN 5-7038-2900-3, 2006. - 115с.
5. Краткое изложение стандартных и нестандартных методов решения задач по элементарной математике: Учеб. пособие / И.А. Соловьев, Г.В. Арутюнян, Е.В. Марчевская и др. – М.: ГУЗ, 2005. - 216с.
6. Ляпин А.А, Родионов Е.М, Синякова С.Л. Математика. Сборник задач. 4-е изд., перераб. и доп. - М.: Ориентир, 2006. - 392с.
7. Родионов Е.М. Справочник по математике для поступающих в вузы. Решение задач с параметрами. - М.: МЦ "Аспект", 1992. - 144с.
8. Элементарная геометрия. Методы решения задач : учеб. пособие / Г.В. Арутюнян, Е.В. Марчевская, И.К. Марчевский. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2010. - 222с.
9. Будак А.Б., Щедрин Б.М. Элементарная математика. Руководство для поступающих в вузы. Изд. 3-е, перераб. и доп. — М. Издат. отдел УНЦ ДО, 2001 - 690 с. ISBN 5-88800-132-5
10. Голубев В.И. Решение сложных и нестандартных задач по математике. — М: ИЛЕКСА, 2007. — 252 с: ил.
11. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. — К.: РИА "Текст"; МП "ОКО", 1992. - 290 с.
12. Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х. Пособие по математике для поступающих в вузы (Избранные вопросы элементарной математики) - Изд. 5-е, перераб., 1976 - 638с.
13. Козко А.И., Чирский В.Г. Задачи с параметром и другие сложные задачи. - М., МЦНМО, 2007. - 296с.
14. Математика. Сборник задач по базовому курсу (ЕГЭ, олимпиады, экзамены в вуз). Учебно-методическое пособие / Золотарёва Н. Д., Попов Ю. А., Семендяева Н. Л., Федотов М. В. - М.: Фойлис, 2010. - 236 с: ил. Под редакцией М. В. Федотова ISBN 978-5-91860-009-2
15. Мельников И.И., Сергеев И.Н. Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах.- М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. - 304с.
16. Моденов В.П. Математика. Пособие для поступающих в вузы. - М., Новая волна, 2002. - 796 с.

17. Олимпиада школьников «Шаг в будущее». Демонстрационные варианты и задания для тренировки по физике и математике. Тематический сборник информационно-методических и образовательных материалов / Под ред. Н.Я. Ирьянова. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. – 150 с.

18. Олехник С.Н. , Потапов М.К. Пасиченко П.И. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения: справочник. М.: Изд-во Факториал, 1997. - 219с.

19. Панферов В.С., Сергеев И.Н. Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач; ФИПИ - М.: Интеллект-Центр, 2010. - 80 с. ISBN 978-5-89790-612-3

20. Потапов М. К., Олехник С. Н., Нестеренко Ю. В. Конкурсные задачи по математике: Справочное пособие. — Изд. 3-е, стер. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 416 с.

21. Цыпкин А. Г. Справочное пособие по математике с методами решения задач для поступающих в вузы / А. Г. Цыпкин, А. И. Пинский. — 3-е изд., испр. — М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2007. — 640 с: ил. ISBN 5-94666-341-0(000 «Издательство«Мир и Образование»)

22. Черкасов О. Ю., Якушев А. Г. Математика: интенсивный курс подготовки к экзамену. — 7-е изд. — М.: Айрис-пресс, 2003. — 432 с: ил. — (Домашний репетитор). ISBN 5-8112-0256-3

23. Шарыгин, И. Ф. Математика для поступающих в вузы : учеб. пособие / И. Ф. Шарыгин. — 6-е изд., стереотип. — М. : Дрофа, 2006. — 479, [1] с. : ил. ISBN 5-358-01163-3

24. Алгебра. Базовый курс с решениями и указаниями (ЕГЭ, олимпиады, экзамены в вуз). Учебно-методическое пособие / Золотарёва Н. Д., Попов Ю.А., Семендяева Н. Л., Федотов М. В. - М.: Фойлис, 2010. - 568 с: ил. (Под редакцией М. В. Федотова ISBN 978-5-91860-008-5)

25. Геометрия. Базовый курс с решениями и указаниями. (ЕГЭ, олимпиады, экзамены в вуз).: Учебно-методическое пособие / Золотарёва Н. Д., Семендяева Н. Л., Федотов М. В. - М: Изд-во Фойлис, 2010. - 296 стр.: ил. (Под редакцией М. В. Федотова ISBN 978-5-91860-004-7)

26. Сборник задач по математике для поступающих во втузы (с решениями). В 2-х книгах. Кн. 1. Алгебра. / Егерев В.К., Кордемский Б.А., Зайцев В.В. и др. Под ред. М.И. Сканави. - 7-е изд., перераб. и доп. - М., Высш.шк., 1994. - 528 с.

27. Сборник задач по математике для поступающих во втузы (с решениями). В 2-х книгах. Кн. 2. Геометрия /Егерев В.К., Кордемский Б.А., Зайцев В.В. и др. Под ред. М.И. Сканави. - 7-е изд., перераб. и доп. - М., Высш.шк., 1995. - 368 с.

28. Олимпиада «Ломоносов» по математике (2005—2008). — М.: Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2008. — 48 с., илл.

29. Всероссийская олимпиада школьников по математике 1993-2006; Окружной и финальный этапы / Под ред. Н.Х. Агаханова. – М.: МЦНМО, 2007. – 472с.

Председатель Оргкомитета
Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
Ректор МГТУ им. Н.Э. Баумана А.А. Александров