УТВЕРЖДАЮ

Ректор МГТУ/им. Н.Э.Баумана

____

20.03 2010 г.

Российское открытое академическое соревнование «Профессор Жуковский»

Олимпиады школьников «Шаг в будущее». Заключительный этап.

Типовой вариант задания по математике

1. Мастерская планировала затратить за два месяца 20 тыс. рублей на изготовление партии деталей. Однако затраты на изготовление одной детали в первом месяце были больше планируемых на 20%, а во втором месяце–на 25%. В среднем, затраты на всю партию деталей оказались на 22% больше планировавшихся. Сколько рублей было затрачено на изготовление деталей в каждом месяце? (8 баллов)

2. Решите уравнение $|\cos x| + \sin 2x = 0$. (8 баллов)

3. Сколько последовательных членов арифметической прогрессии 36, 33, 30, …, начиная с первого, надо сложить, чтобы получить сумму, большую 201? (8 баллов)

4. Найдите множество значений функции $f(x) = \sin\left(\sqrt{\pi^2 - x^2} - \pi/3\right)$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}} \ge \dfrac{2\sqrt{x}+11}{x-7\sqrt{x}+10}$. (10 баллов)

6. Решите неравенство $\log_x\left(49 - 84x + 36x^2\right) < 0$. (10 баллов)

7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, его диагонали AC и BD пересекаются в точке F, причем $AF:FC = 3:1$, $BF:FD = 4:3$, угол $\angle AFD = \arccos(1/4)$. Найдите радиус описанной около треугольника CFD окружности, если $AC = 4$. (12 баллов)

8. Составьте уравнения касательных, проведенных из точки $M(3;0)$ к параболе $8y = x^2 + 16$. Определите угол между касательными. Найдите площадь треугольника ABM, где A и B – точки касания. (12 баллов)

9. Определите все значения p, при которых уравнение $(x+p)^2 = 4(p+1) + 8(|x|/x)$ имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом значении p. (12 баллов)

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны 4, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины стороны основания AC и бокового ребра TB и параллельной медиане BD боковой грани BTC, если расстояние от вершины пирамиды T до секущей плоскости равно $1/2$. (12 баллов)

Подготовил доцент каф. ФН–1 Паршев Л.П.

Российское открытое академическое соревнование «Профессор Жуковский» Олимпиады школьников «Шаг в будущее 2010», заключительный этап. 1

Типовой вариант задания по математике. Решения

1. Если x тыс. рублей – плановые затраты за первый месяц, y – за второй, то

$$\begin{cases} x+y=20, \\ 20x+25y=22(x+y); \end{cases} \quad \begin{cases} 2x=3y, \\ x+2/3x=20; \end{cases} \quad \begin{cases} x=12, \\ y=8. \end{cases}$$

Затрачено за первый месяц $12\cdot 1,2=14,4$ тыс. рублей, за второй – $8\cdot 1,25=10$ тыс. рублей.

Ответ: 14,4 и 10 тыс. рублей.

2. $|\cos x|+\sin 2x=0$, $|\cos x|+2\sin x\cos x=0$. 1) $\cos x=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$;

2) $\begin{cases} \sin x=-1/2, \\ \cos x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$; 3) $\begin{cases} \sin x=1/2, \\ \cos x<0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{5\pi}{6}+2m\pi$. Варианты 2), 3) можно

объединить $x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi$. Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{2}+n\pi; -\dfrac{\pi}{6}+k\pi \,\middle|\, n,k\in Z\right\}$.

3. $\dfrac{36+36-3(n-1)}{2}\cdot n>201$, $n^2-25n+134<0$, $n=\dfrac{25\pm\sqrt{625-536}}{2}=\dfrac{25\pm\sqrt{89}}{2}\cong\dfrac{23\pm 9,43}{2}\cong\left[\begin{matrix}7,78, \\ 17,2.\end{matrix}\right.$

Для целых значений $8\le n\le 17$. Ответ: $8\le n\le 17$, $n\in N$.

4. $f(x)=\sin\left(\sqrt{\pi^2-x^2}-\dfrac{\pi}{3}\right)$. Пусть $z(x)=\left(\sqrt{\pi^2-x^2}-\dfrac{\pi}{3}\right)$; при $-\pi\le x\le\pi$ $-\pi/3\le z\le 2\pi/3$.

На этом промежутке функция $\sin(z)$ принимает наименьшее значение $\sin(-\pi/3)=-\sqrt{3}/2$ и

наибольшее значение $\sin(\pi/2)=1$. Ответ: $\left[-\sqrt{3}/2;1\right]$.

5. $\dfrac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}\ge\dfrac{2\sqrt{x}+11}{x-7\sqrt{x}+10}$. Замена $t=\sqrt{x}$, $t\ge 0$.

$\dfrac{t+3}{2-t}\ge\dfrac{2t+11}{t^2-7t+10}\Leftrightarrow\dfrac{t^2-4}{(t-2)(t-5)}\le 0\Leftrightarrow t\ne 2$, $\dfrac{t+2}{t-5}\le 0\Leftrightarrow$ $t\in[0;2)\cup(2;5)$, $x\in[0;4)\cup(4;25)$.

Ответ: $x\in[0;4)\cup(4;25)$.

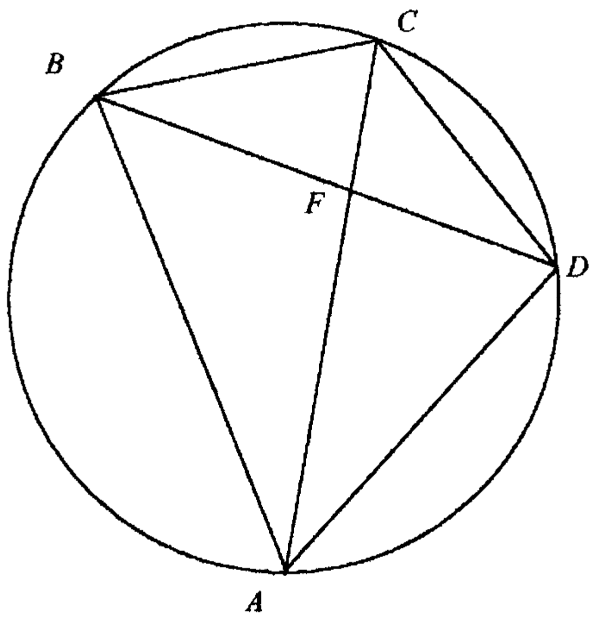
6. $\log_x(49-84x+36x^2)<0$. ОДЗ: $x>0$, $x\ne 1$, $x\ne 7/6$.

1) $0<x<1$; $49-84x+36x^2>1\Leftrightarrow 3x^2-7x+4>0$; $\begin{cases} \left[\begin{matrix} x<1, \\ x>4/3, \end{matrix}\right. \\ 0<x<1 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<1$;

2) $x>1$, $x\ne 7/6$; $49-84x+36x^2<1\Leftrightarrow 3x^2-7x+4<0\Leftrightarrow 1<x<4/3$, $x\ne 7/6$.

Ответ: $x\in(0;1)\cup(1;7/6)\cup(7/6;4/3)$.

Российское открытое академическое соревнование «Профессор Жуковский» Олимпиады школьников «Шаг в будущее 2010», заключительный этап. 2



7. 1) $ABCD$ вписан в окружность, след.,

$\Delta AFD \sim \Delta BFC \Rightarrow AF \cdot FC = BF \cdot FD$.

Поскольку $AF:FC=3:1$, $AC=4$, то

$AF=3$, $FC=1$. Так как, $BF:FD=4:3$,

полагая $BF=4x, FD=3x$, получим

$3\cdot 1 = 4x\cdot 3x$, $x=0{,}5$,

$BF=2$, $FD=1{,}5$, $BD=3{,}5$.

2) Используем теорему косинусов:

в ΔCFD

$$CD^2 = CF^2 + FD^2 - 2\cdot CF\cdot FD\cdot\cos(\angle CFD) =$$

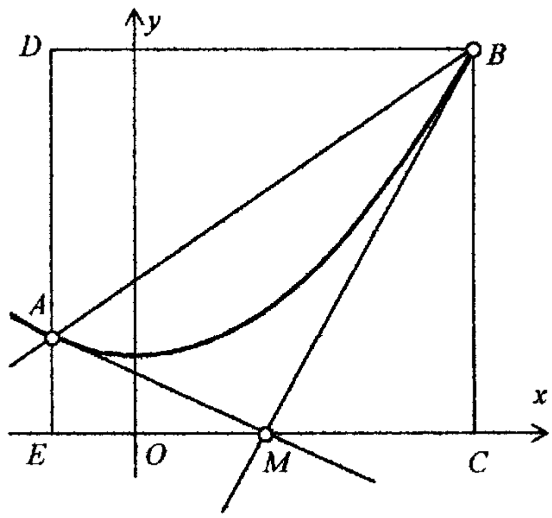
$$1+\frac{9}{4}-2\cdot 1\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=4 \Rightarrow CD=2.$$

3) Используем теорему синусов: в ΔCFD $\sin(\angle CFD)=\sin(\angle AFD)=\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$ и

$$R_{\text{оп}\Delta CFD}=\frac{CD}{2\sin(\angle CFD)}=\frac{2}{2\sqrt{15}/4}=\frac{4}{\sqrt{15}}.$$

Ответ: $R=\frac{4}{\sqrt{15}}$.

8. $8y=x^2+16$; $M(3;0)$.



$$y=\frac{x_0^2}{8}+2+\frac{x_0}{4}(x-x_0),\ y=2+\frac{x_0}{4}x-\frac{x_0^2}{8}.$$

$$0=2+\frac{x_0}{4}\cdot 3-\frac{x_0^2}{8},\ x_0^2-6x_0-16=0,$$

$(x_0)_1=-2,\ (y_0)_1=2{,}5,\ A(-2;2{,}5)$.

$(x_0)_2=8,\ (y_0)_2=10,\ B(8;10)$.

1) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$;

2) $y=2x-6$.

Угол между касательными равен 90°.

$$|AM|=\sqrt{(3+2)^2+\left(0-\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{5}}{2};\ |BM|=\sqrt{(3-8)^2+(0-10)^2}=5\sqrt{5}.$$

$$S_{\Delta AMB}=\frac{1}{2}\cdot AM\cdot BM=\frac{1}{2}\cdot\frac{5\sqrt{5}}{2}\cdot 5\sqrt{5}=\frac{125}{4}.$$

Российское открытое академическое соревнование «Профессор Жуковский» Олимпиады школьников «Шаг в будущее 2010», заключительный этап.

9. I. $x>0,\ x^2+2px+p^2-4p-12=0,\ D/4=4p+12$.

1. Уравнение имеет два различных положительных корня $x_{1,2}=-p\pm\sqrt{4p+12}$, если

$$\begin{cases}4p+12>0,\\ -p>0,\\ p^2-4p-12>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p>-3,\\ p<0,\\ \left[\begin{array}{l}p<-2,\\ p>6\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow -3<p<-2.$$

2. Уравнение имеет один положительный корень $x=-p+\sqrt{4p+12}$, если

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4p+12=0,\\ -p>0,\end{cases}\\ p^2-4p-12<0,\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}p=-2,\\ p=-6,\end{array}\right.\\ -p>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}p=-3\ \ (x=3),\\ -2<p<6,\\ p=-2\ \ (x=4).\end{array}\right.$$

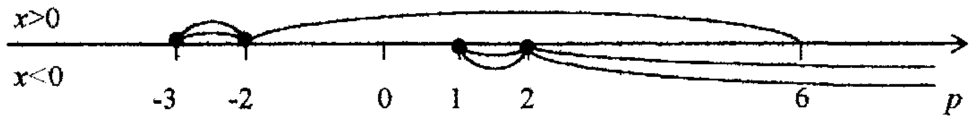
II. $x<0,\ x^2+2px+p^2-4p+4=0,\ D/4=4p-4$.

1. Уравнение имеет два различных отрицательных корня $x_{1,2}=-p\pm\sqrt{4p-4}$, если

$$1.\ \begin{cases}4p-4>0,\\ -p<0,\\ p^2-4p+4>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p>1,\\ p>0,\\ p\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p>1,\\ p\neq 2.\end{cases}$$

2. Уравнение имеет один отрицательный корень $x=-p-\sqrt{4p-4}$, если

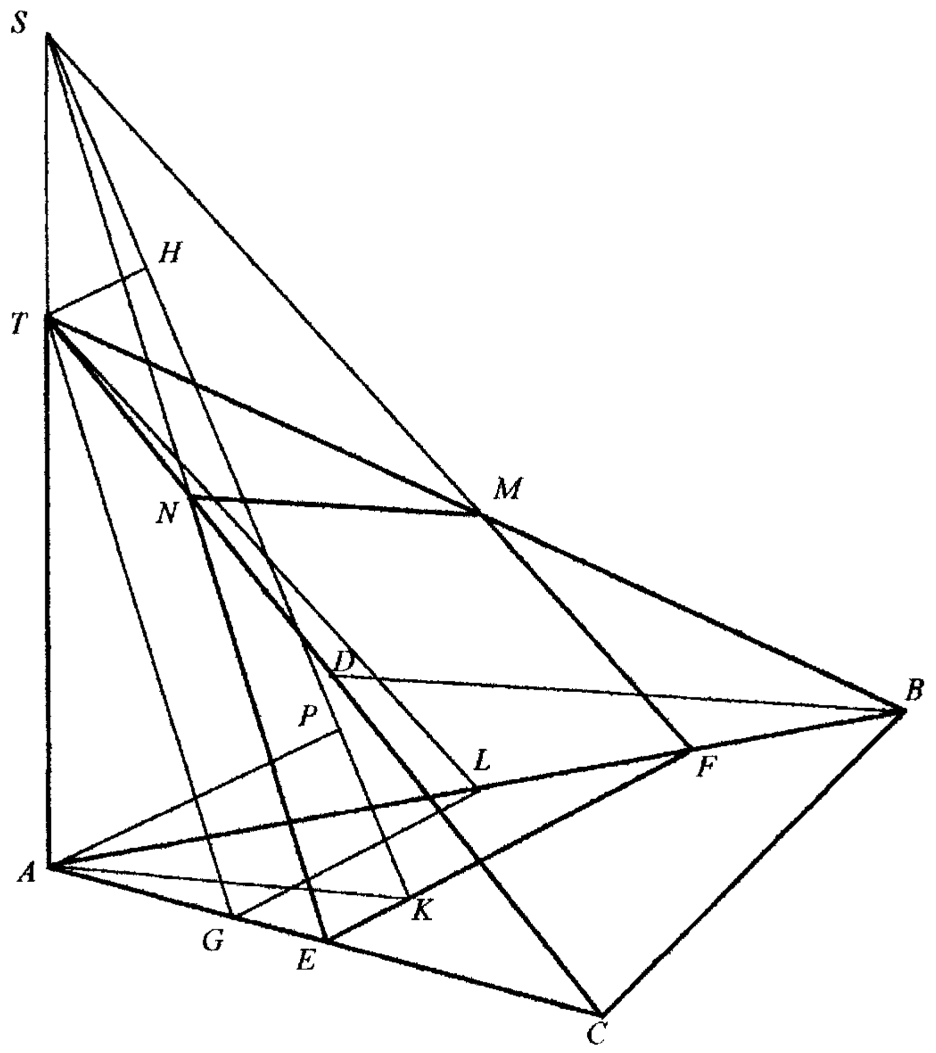
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4p-4=0,\\ -p<0,\end{cases}\\ p^2-4p+4<0,\\ \begin{cases}p^2-4p+4=0\\ -p<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}p=1\ \ (x=-1),\\ \\ p=2\ \ (x=-4).\end{array}\right.$$



Ответ: $p\in(-3;-2),\ x_{1,2}=-p\pm\sqrt{4p+12}$; $\qquad p=1,\ x_1=3,\ x_2=-1$;

$p=2,\ x_1=2\sqrt{5},\ x_2=-4$; $\quad p\in[6;+\infty),\ x_{1,2}=-p\pm\sqrt{4p-4}$.

10.



Пусть M – середина ребра TB и E – середина AC. Проведем $MN \| BD,\ N \in TC,\ TN = ND = TC/4$, $S = (NE) \cap (AT)$, затем $TG \| SE,\ G \in AC$. Так как $TN = 1/3CN$, $GE = 1/3EC$ и $GE = 1/2AG$, отсюда $ST = 1/2AT$ и $AS = 3/2AT$. Поскольку $EN = 3/4TG$ и $SE = 3/2TG$, $EN = SN = 1/2SE$.

Далее $F = (SM) \cap AB$, $EFMN$ –сечение пирамиды заданной в условии секущей плоскостью. Проведем $TL \| SF$. Поскольку $LF = FB = 1/2AL$, $AF = 3/4AB$. Так как $TL = 2MF$ и $SF = 3/2TL$, то $SM = 2/3SF$.

Следовательно, площадь ΔMSN $S_{\Delta MSN}=\frac{1}{2}SM\cdot SN\cdot\sin\angle MSN=$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}SF\cdot\frac{1}{2}SE\cdot\sin\angle FSE=\frac{1}{3}S_{\Delta FSE}$. Площадь сечения $S_{EFMN}=2/3\,S_{\Delta FSE}$.

Проведем $AK\perp EF,\ K\in EF,\ SK\perp EF$, затем $AP\perp SK,\ P\in SK$ и $TH\perp SK,\ H\in SK$. Так как $TH\perp(SEF)$, то длина TH равна заданному в условии задачи расстоянию от вершины пирамиды T до секущей плоскости и $AP=3TH=3/2$.

В ΔAEF $EF^2=AE^2+AF^2-2AE\cdot AF\cdot\cos\angle BAC=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cdot\frac{1}{2}=7$; $EF=\sqrt{7}$. Так как $\frac{1}{2}\cdot AK\cdot EF=\frac{1}{2}\cdot AE\cdot AF\cdot\sin 60^\circ$, $AK=\frac{AE\cdot AF\cdot\sin 60^\circ}{EF}=2\cdot3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

В ΔASK $PK=\sqrt{AK^2-AP^2}=\sqrt{\frac{27}{7}-\frac{9}{4}}=\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{7}}$ и $SK=\frac{AK^2}{PK}=\frac{27\cdot2\sqrt{7}}{7\cdot3\sqrt{5}}=\frac{18}{\sqrt{7}\sqrt{5}}$.

$S_{\Delta FSE}=\frac{1}{2}\cdot EF\cdot SK=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}\cdot18}{\sqrt{7}\sqrt{5}}=\frac{9}{\sqrt{5}}$; $S_{EFMN}=\frac{2}{3}S_{\Delta FSE}=\frac{2\cdot9}{3\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$.

Ответ: $\frac{6}{\sqrt{5}}$.