

УТВЕРЖДАЮ

Ректор МГТУ им. Н.Э.Баумана

2003

2010 г.

Российское открытое академическое соревнование «Профессор Жуковский»

Олимпиады школьников «Шаг в будущее». Заключительный этап.

Типовой вариант задания по математике

1. Мастерская планировала затратить за два месяца 20 тыс. рублей на изготовление партии деталей. Однако затраты на изготовление одной детали в первом месяце были больше планируемых на 20%, а во втором месяце—на 25%. В среднем, затраты на всю партию деталей оказались на 22% больше планировавшихся. Сколько рублей было затрачено на изготовление деталей в каждом месяце? (8 баллов)
2. Решите уравнение $|\cos x| + \sin 2x = 0$. (8 баллов)
3. Сколько последовательных членов арифметической прогрессии 36, 33, 30, ..., начиная с первого, надо сложить, чтобы получить сумму, большую 201? (8 баллов)
4. Найдите множество значений функции $f(x) = \sin(\sqrt{\pi^2 - x^2} - \pi/3)$. (8 баллов)
5. Решите неравенство $\frac{\sqrt{x} + 3}{2 - \sqrt{x}} \geq \frac{2\sqrt{x} + 11}{x - 7\sqrt{x} + 10}$. (10 баллов)
6. Решите неравенство $\log_x(49 - 84x + 36x^2) < 0$. (10 баллов)
7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, его диагонали AC и BD пересекаются в точке F , причем $AF : FC = 3 : 1$, $BF : FD = 4 : 3$, угол $\angle AFD = \arccos(1/4)$. Найдите радиус описанной около треугольника CFD окружности, если $AC = 4$. (12 баллов)
8. Составьте уравнения касательных, проведенных из точки $M(3; 0)$ к параболе $y = x^2 + 16$. Определите угол между касательными. Найдите площадь треугольника ABM , где A и B – точки касания. (12 баллов)
9. Определите все значения p , при которых уравнение $(x+p)^2 = 4(p+1) + 8(|x|/x)$ имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом значении p . (12 баллов)
10. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC , все стороны которого равны 4, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины стороны основания AC и бокового ребра TB и параллельной медиане BD боковой грани BTC , если расстояние от вершины пирамиды T до секущей плоскости равно $1/2$. (12 баллов)

Подготовил доцент каф. ФН-1

Паршев Л.П.