

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Комплекс предметов «ТЕХНИКА И ТЕХНОЛОГИИ»

МАТЕРИАЛЫ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ

2008-2009 ГОД

**I. Научно-образовательное соревнование**

ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант I.

Задача №1.

Решить систему уравнений 
$$\begin{cases} \sqrt[4]{1+5x} + \sqrt[4]{5-y} = 3, \\ 5x - y = 11. \end{cases}$$

Задача №2.

Решить систему неравенств 
$$\begin{cases} \log_{2-x}(2-y) > 0, \\ \log_{4-y}(2x-2) > 0. \end{cases}$$

Задача №3.

Докажите, что  $\sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos x < \frac{1}{7}$  при всех действительных  $x$ .

Задача №4.

Стороны треугольника относятся как 7 : 8 : 9. Найти отношение радиуса описанной около треугольника окружности к радиусу вписанной в него окружности.

Задача №5.

Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC. Прямая, проведенная через вершину прямого угла C перпендикулярно медиане BD, пересекает гипотенузу в точке M. Найти отношение  $\frac{AM}{MB}$ .

Вариант II.

Задача №1.

Решить систему уравнений 
$$\begin{cases} x + y + z = 9, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 41, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 189. \end{cases}$$

Задача №2.

На каких промежутках возрастает функция  $f(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x - \sin x + 3$  ?

Задача №3.

Решить неравенство  $\log_{-4x^2+12x-8}|4x-5| > 0$ .

Задача №4.

С помощью производной найти число корней уравнения  $x^4 - 4x - 9 = 0$ .

Задача №5.

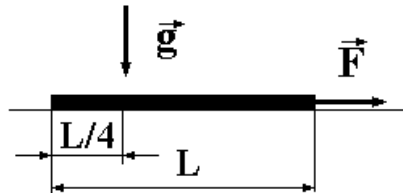
На сторонах квадрата ABCD взяты точки M, N и K, где точка M – середина AB, N лежит на стороне BC, причем  $2BN=NC$ , K лежит на стороне DA, причем  $2DK = KA$ . Найти синус угла между MC и NK.

## ЗАДАНИЯ ПО ФИЗИКЕ

### Вариант I.

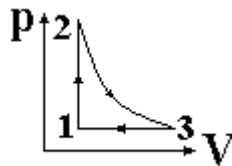
Задача №1.

Толстый массивный канат постоянного сечения длиной  $L$ , лежащий на гладкой горизонтальной плоскости, тянут за правый конец, прикладывая к нему постоянную силу  $F$  (см. рис.). Найти силу натяжения каната в сечении, расположенном на расстоянии  $L/4$  от его левого конца.



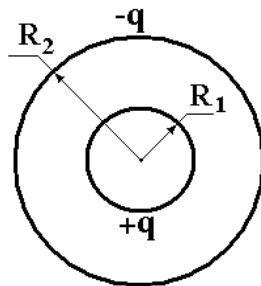
Задача №2.

На рисунке дан график зависимости давления газа от его объема в циклическом процессе 1-2-3. 1-2 – изохора, 2-3 – изотерма, 3-1 – изобара. Построить для данного циклического процесса график зависимости температуры газа от его объема.



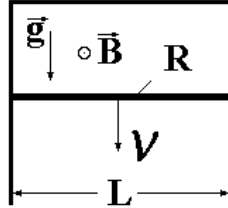
Задача №3.

Две концентрические металлические пустотелые сферы радиусами  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ) заряжены зарядами  $+q$  и  $-q$  соответственно. Какое количество теплоты  $Q$  выделится после соединения сфер проводником с большим сопротивлением?



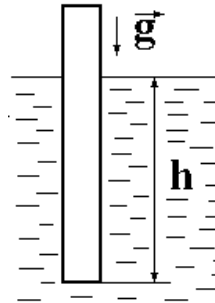
## Задача №4.

По двум вертикальным шинам, соединенным между собой проводником, под действием силы тяжести скользит горизонтальная проводящая перемычка массой  $m$ , длиной  $l$  и сопротивлением  $R$ . Движение происходит в горизонтальном однородном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ , вектор которой перпендикулярен плоскости перемещения перемычки. Пренебрегая трением, сопротивлением шин и проводника, найти установившуюся скорость падения перемычки.



## Задача №5.

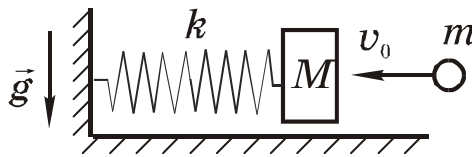
На поверхности жидкости плавает призматическое тело, погруженное в жидкость на глубину  $h$ . Определить период  $T$  малых колебаний тела, если вязкое сопротивление жидкости движению тела пренебрежимо мало.



Вариант II.

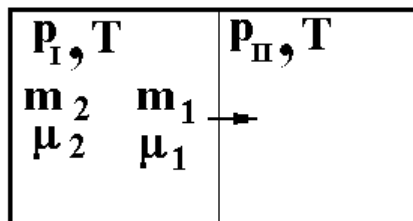
## Задача №1.

Шарик массой  $m$  ударяется о брусок массой  $M$ , закрепленный на пружине жесткостью  $k$  (см. рис.). Определить максимальное сжатие пружины  $x$ , считая удар абсолютно упругим. Скорость шарика перед ударом  $v_0$ . Деформацией пружины за время удара пренебречь.



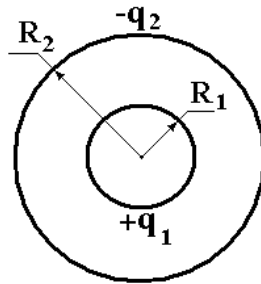
## Задача №2.

Сосуд объемом  $2V$  разделен пополам тонкой полупроницаемой перегородкой. В левую половину ввели газ массой  $m_1$  и газ массой  $m_2$ . В правой половине – вакуум. Через перегородку может диффундировать только первый газ. Температура  $T$  остается постоянной. Молярная масса газов равна  $\mu_1$  и  $\mu_2$  соответственно. Какие давления  $p_1$  и  $p_2$  установятся в обеих половинах сосуда?



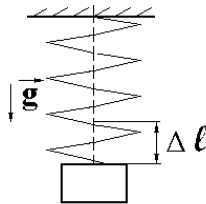
Задача №3.

Две концентрические металлические пустотелые сферы радиусами  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ) заряжены зарядами  $+q_1$  и  $-q_2$  соответственно. Какое количество теплоты  $Q$  выделится после заземления наружной сферы через проводник с большим сопротивлением?



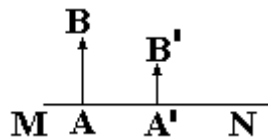
Задача №4.

Груз, подвешенный на пружине, вызвал изменение ее длины на  $\Delta l$ . Найти период собственных колебаний  $T$ .



Задача №5.

На рисунке показаны главная оптическая ось линзы  $MN$ , предмет  $AB$  и его изображение  $A'B'$ . Определить графически положение оптического центра  $P$  и фокуса  $F$  линзы.



## II. Академическое соревнование

### ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

#### Вариант I.

Задача №1.

Решите уравнение

$$(\sqrt{x} - 4)^4 + (\sqrt{x} - 8)^4 = 32.$$

Задача №2.

Решите уравнение

$$1 + \cos 38x \cos 20x + 2 \cos 9x \cos 29x = 0.$$

Задача №3.

Решите неравенство

$$\frac{x - 4}{\log_2(32 - 2^x) - 6} \leq 0.$$

Задача №4.

Докажите, что все точки пересечения взаимно перпендикулярных касательных к кривой

$$y = \frac{1}{2}x^2 \text{ лежат на одной прямой. Найдите уравнение этой прямой.}$$

Задача №5.

В треугольнике длины двух сторон равны 6 см и 3 см. Определить третью сторону, если полусумма высот, опущенных на данные стороны, равна длине третьей стороны.

#### Вариант II.

Задача №1.

Решите уравнение

$$x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 8.$$

Задача №2.

Решите уравнение

$$\cos^8 x + \sin^8 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{32}(1 - \cos 4x)^2.$$

Задача №3.

Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6) + \log_9 x^2 \geq 0.$$

Задача №4.

При каких значениях параметра  $a$  кривые  $y_1 = 2\sqrt{x}$  и  $y_2 = ax^2 + 3x$  имеют общую касательную в точке пересечения?

Задача №5.

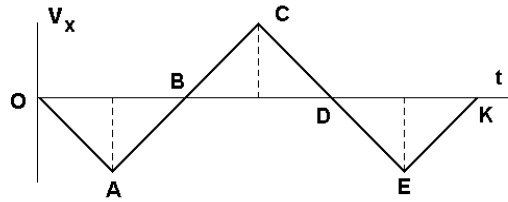
Из центра окружности, вписанной в треугольник со сторонами 13, 14 и 15, проведена новая окружность радиуса 5. Найти длины хорд, отсекаемых этой новой окружностью на сторонах треугольника.

## ЗАДАНИЯ ПО ФИЗИКЕ

## Вариант I.

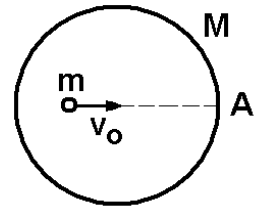
## Задача №1.

На рисунке дан график зависимости от времени  $t$  проекции на ось  $x$  скорости тела  $v_x(t)$ , движущегося прямолинейно. Построить график его перемещения и ускорения, если равнобедренные треугольники  $OAB$ ,  $BCD$  и  $DEK$  равны.



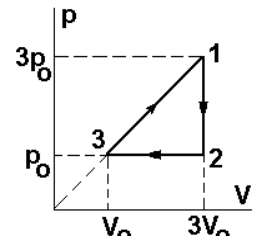
## Задача №2.

На гладком горизонтальном столе лежат незакрепленное кольцо радиусом  $R$  и массой  $M$  и шарик массой  $m$  (см. рис.). Шарику сообщают скорость  $v_0$ . Определить время  $\tau$  между двумя последовательными ударами шарика о кольцо в точке  $A$ . Удары считать абсолютно упругими.



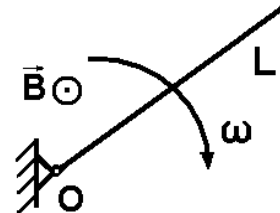
## Задача №3.

С  $\nu$  молями идеального одноатомного газа осуществляется цикл, показанный на рисунке в координатах  $V-p$ . (1-2) – изохора, (2-3) – изобара; (3-1) – прямая. Определить КПД цикла.



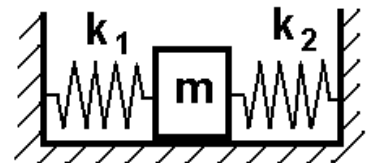
## Задача 4.

В вертикальном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$  вращается вокруг оси  $O$  с постоянной угловой скоростью проводник длиной  $L$  (см. рис.). Плоскость вращения проводника – горизонтальная. Между концами проводника возникает напряжение  $U$ . Определить угловую скорость вращения проводника  $\omega$ .



## Задача №5.

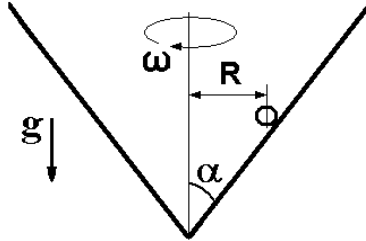
Определить период  $T$  малых колебаний груза массой  $m$ , закрепленного с помощью пружин жесткостями  $k_1$  и  $k_2$  (см. рис).



## Вариант II.

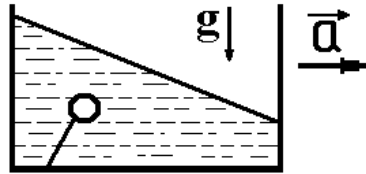
## Задача №1.

Конус с углом полураствора  $\alpha$  вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси (см. рис.). На внутренней поверхности конуса лежит маленький груз, вращающийся вместе с ним. Определить расстояние  $R$  между осью вращения и центром масс груза. Трением пренебречь.



## Задача №2.

Сосуд с водой движется горизонтально с ускорением  $a$ . Ко дну сосуда на невесомой нити прикреплен деревянный шарик массой  $m$  и объемом  $V$  (см. рис.). Определить силу натяжения нити  $F$ . Плотность воды  $\rho$ .

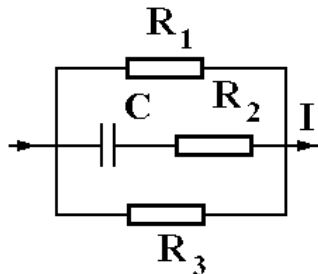


## Задача №3.

Свинцовая пуля пробивает деревянную стенку и застревает в ней. При какой начальной скорости пули она полностью расплавится, если на нагревание пули идет  $\eta = 0,6$  потерянной механической энергии? Температура пули в момент удара  $t_1 = 50^\circ\text{C}$ . Теплоемкость свинца  $c = 125,7 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ , температура плавления  $t_{\text{п}} = 327^\circ\text{C}$ , удельная теплота плавления свинца  $\lambda = 26,4 \cdot 10^3 \text{ Дж}/\text{кг}$ .

## Задача №4.

Определить заряд  $q$  на конденсаторе  $C = 1 \text{ мкФ}$ , включенном в цепь постоянного тока.  $I = 3 \text{ А}$ ,  $R_1 = 100 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 200 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 300 \text{ Ом}$



## Задача №5.

Через какое время в долях от периода  $T$  после начала разрядки конденсатора в колебательном контуре его энергия составит половину от максимальной?