

II. МАТЕРИАЛЫ ПО ПОДГОТОВКЕ К ОЛИМПИАДАМ ПО МАТЕМАТИКЕ
ПРИМЕРЫ ВАРИАНТОВ ЗАДАНИЙ ОЛИМПИАДЫ С РЕШЕНИЯМИ

I ЭТАП ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

ВАРИАНТ № 1.1

1. Каждый из двух рабочих должен был изготовить по 45 деталей. Второй рабочий приступил к выполнению задания на 25 мин позднее первого, по трети задания они выполнили к одному времени, а к моменту окончания работы второй рабочий ещё помог первому, изготовив за него 6 деталей. Сколько деталей в час изготавливал каждый рабочий? (8 баллов)

2. Укажите все значения n , при которых сумма n последовательных членов арифметической прогрессии 31, 28, 25, ..., начиная с первого, не меньше 84. (8 баллов)

3. Решите уравнение $2^{x+1} = 7 + 2^{2-x}$. (8 баллов)

4. Решите уравнение $\cos 2x + 5\sin x = 3$. Укажите корни, принадлежащие промежутку $[-3\pi/2; \pi/2]$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\frac{3}{x-3\sqrt{x}+2} \leq \frac{2}{x-2\sqrt{x}+1}$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x) = 11 - x^2 - 2\sqrt{9-x^2}$. (10 баллов)

7. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 28, угол A составляет 60° , BK и BN – высоты параллелограмма, проведенные к прямым, содержащим стороны AD и CD соответственно. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если длина отрезка KN равна $\sqrt{39}$. (12 баллов)

8. Найдите угол между касательными к графику функции $y = x^2/3$, проходящими через точку $M(\sqrt{3}; 3/4)$. (12 баллов)

9. Укажите все значения a , при которых система уравнений

$$y = \frac{x+|x|}{x}; (x-a)^2 = y+a$$

имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a . (12 баллов)

10. Найдите площадь сечения прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через диагональ AC_1 и параллельной диагонали основания BD , если расстояние от BD до секущей плоскости равно l , а другая диагональ основания AC образует с секущей плоскостью угол 30° и с диагональю AC_1 – угол 45° . (12 баллов)

Решения варианта №1.1

1. Каждый из двух рабочих должен был изготовить по 45 деталей. Второй рабочий приступил к выполнению задания на 25 мин позднее первого, по трети задания они выполнили к одному времени, а к моменту окончания работы второй рабочий ещё помог первому, изготовив за него 6 деталей. Сколько деталей в час изготавливал каждый рабочий?

Решение. Пусть первый рабочий изготавливал x – деталей в час, второй рабочий y – деталей в час, тогда $\frac{15}{x} - \frac{15}{y} = \frac{25}{60}$; $\frac{24}{x} = \frac{36}{y} \Rightarrow \frac{3}{x} - 3 \cdot \frac{2}{3x} = \frac{1}{12}$; $\frac{1}{x} = \frac{1}{12}$; $x = 12$, $y = 18$.

Ответ: 12 и 18 деталей.

2. Укажите все значения n , при которых сумма n последовательных членов арифметической прогрессии 31, 28, 25, ..., начиная с первого, не меньше 84.

Решение. $\frac{31 + 31 - 3(n-1)}{2} n \geq 84$; $3n^2 - 65n + 168 \leq 0$;

$n_{1,2} = \frac{65 \pm 47}{6}$, $n_1 = 3$, $n_2 = 18\frac{2}{3}$. Ответ: $3 \leq n \leq 18$, $n \in N$.

3. Решите уравнение $2^{x+1} = 7 + 2^{2-x}$.

Решение. $2^{x+1} = 7 + 2^{2-x}$; $2(2^x)^2 - 7 \cdot 2^x - 4 = 0$; $2(2^x - 4)(2^x + 1/2) = 0$; $2^x = 4$, $x = 2$

Ответ: $x = 2$.

4. Решите уравнение $\cos 2x + 5 \sin x = 3$. Укажите корни, принадлежащие промежутку $[-3\pi/2; \pi/2]$.

Решение. $\cos 2x + 5 \sin x = 3 \Leftrightarrow 2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$; $\sin x = (5 \pm 3)/4$.

1) $\sin x = 2$ – решений нет. 2) $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in Z$. В заданный

промежуток входят корни $\left\{-\frac{7\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right\}$. Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in Z$; $\left\{-\frac{7\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right\}$.

5. Решите неравенство $\frac{3}{x - 3\sqrt{x} + 2} \leq \frac{2}{x - 2\sqrt{x} + 1}$.

Решение. Замена: $\sqrt{x} = t \geq 0$, $x = t^2$.

$\frac{3}{t^2 - 3t + 2} \leq \frac{2}{t^2 - 2t + 1} \Leftrightarrow \frac{3}{(t-1)(t-2)} - \frac{2}{(t-1)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3t - 3 - 2t + 4}{(t-2)(t-1)^2} \leq 0$

$\frac{t+1}{(t-2)(t-1)^2} \leq 0 \stackrel{t \geq 0}{\Leftrightarrow} t \in [0; 1) \cup (1; 2) \Leftrightarrow x \in [0; 1) \cup (1; 4)$.

Ответ: $x \in [0; 1) \cup (1; 4)$.

6. Найдите множество значений функции $f(x) = 11 - x^2 - 2\sqrt{9 - x^2}$.

Решение. Функция $t = \sqrt{9 - x^2}$ принимает значения $t \in [0; 3]$. Рассмотрим функцию $y = 11 - (9 - t^2) - 2t$, определенную на отрезке $[0; 3]$. Графиком функции $y = t^2 - 2t + 2$ является парабола с вершиной в точке с абсциссой $t = 1$ и ветвями, направленными вверх. Таким образом, минимальное значение y равно 1, оно достигается в точке $t = 1$, максимальное значение равно 5, оно достигается в точке $t = 3$. Функция $y = f(x)$ принимает значения из отрезка $[1; 5]$. Ответ: $E_f = [1; 5]$.

7. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 28, угол A составляет 60° , BK и BN – высоты параллелограмма, проведенные к прямым, содержащим стороны AD и CD соответственно. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если длина отрезка KN равна $\sqrt{39}$.

Решение. Пусть стороны параллелограмма a и b . Найдём высоты BK и BN :

$$BK = a \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad BN = b \sin 60^\circ = \frac{b\sqrt{3}}{2}.$$

В треугольнике KBN угол B равен 60° .

По теореме косинусов

$$KN^2 = BK^2 + BN^2 - 2BK \cdot BN \cos 60^\circ = \frac{3a^2}{4} + \frac{3b^2}{4} - \frac{3ab}{4} = 39 \Rightarrow a^2 + b^2 - ab = 52.$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} a^2 + b^2 - ab = 52, \\ a + b = 14, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 48, \\ b = 14 - a. \end{cases}$$

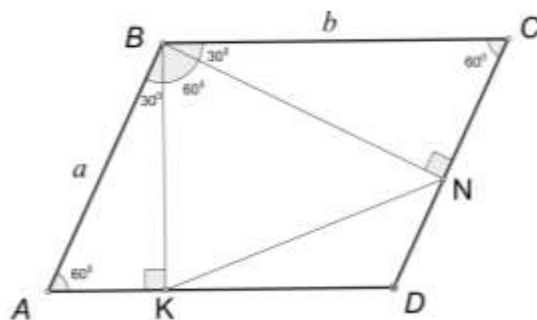
Решая уравнение $a^2 - 14a + 48 = 0$, получаем: $a = 8$ или $a = 6$. Тогда $b = 6$ и $a = 8$ или $b = 8$ и $a = 6$. Площадь параллелограмма $S = 24\sqrt{3}$. Ответ: $S = 24\sqrt{3}$.

8. Найдите угол между касательными к графику функции $y = x^2/3$, проходящими через точку $M(\sqrt{3}; 3/4)$.

Решение. Уравнение касательной к графику заданной функции имеет вид $y = \frac{x_0^2}{3} + \frac{2x_0}{3}(x - x_0)$, где x_0 – абсцисса точки касания. Так как касательная проходит через

$$\text{точку } M, \quad \frac{3}{4} = \frac{x_0^2}{3} + \frac{2x_0}{3}(\sqrt{3} - x_0); \quad x_0^2 - 2\sqrt{3}x_0 + 9/4 = 0; \quad x_0 = \sqrt{3} \pm \sqrt{3}/2;$$

$(x_0)_1 = 3\sqrt{3}/2, (x_0)_2 = \sqrt{3}/2.$ Угловые коэффициенты касательных:



1) $\operatorname{tg} \alpha_1 = \sqrt{3}$, $\alpha_1 = 60^\circ$; 2) $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha_2 = 30^\circ$. Угол между

касательными: $\varphi = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$. Ответ: 30° .

9. Укажите все значения a , при которых система уравнений $y = \frac{x+|x|}{x}$; $(x-a)^2 = y+a$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a .

Решение. I. При $x > 0$ $y = 2$, $x^2 - 2ax + a^2 - a - 2 = 0$ (*).

Уравнение (*) имеет два различных положительных корня $x_{1,2} = a \pm \sqrt{a+2}$, если:

$$\left\{ \begin{array}{l} D/4 = a+2 > 0, \\ a > 0, \\ a^2 - a - 2 > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a > -2, \\ a > 0, \Leftrightarrow a > 2. \\ \left[\begin{array}{l} a < -1, \\ a > 2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Уравнение (*) имеет один положительный корень $x_{1,2} = a + \sqrt{a+2}$, если:

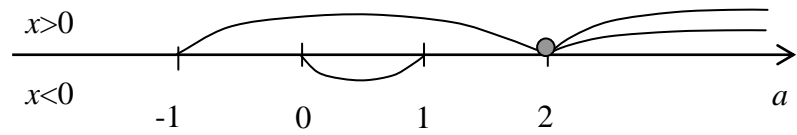
$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} D = 0, \\ a > 0, \end{array} \right. \\ a^2 - a - 2 < 0, \Leftrightarrow -1 < a \leq 2. \\ \left[\begin{array}{l} a = -1, \\ a = 2 \\ a > 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

II. При $x < 0$, $y = 0$, $x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$ (**). Уравнение (**) не может иметь двух

отрицательных корней, так как система неравенств $\left\{ \begin{array}{l} D/4 = a > 0, \\ a < 0, \\ a^2 - a > 0. \end{array} \right.$ решений не имеет.

Уравнение (**) имеет один отрицательный корень $x = a - \sqrt{a}$, если

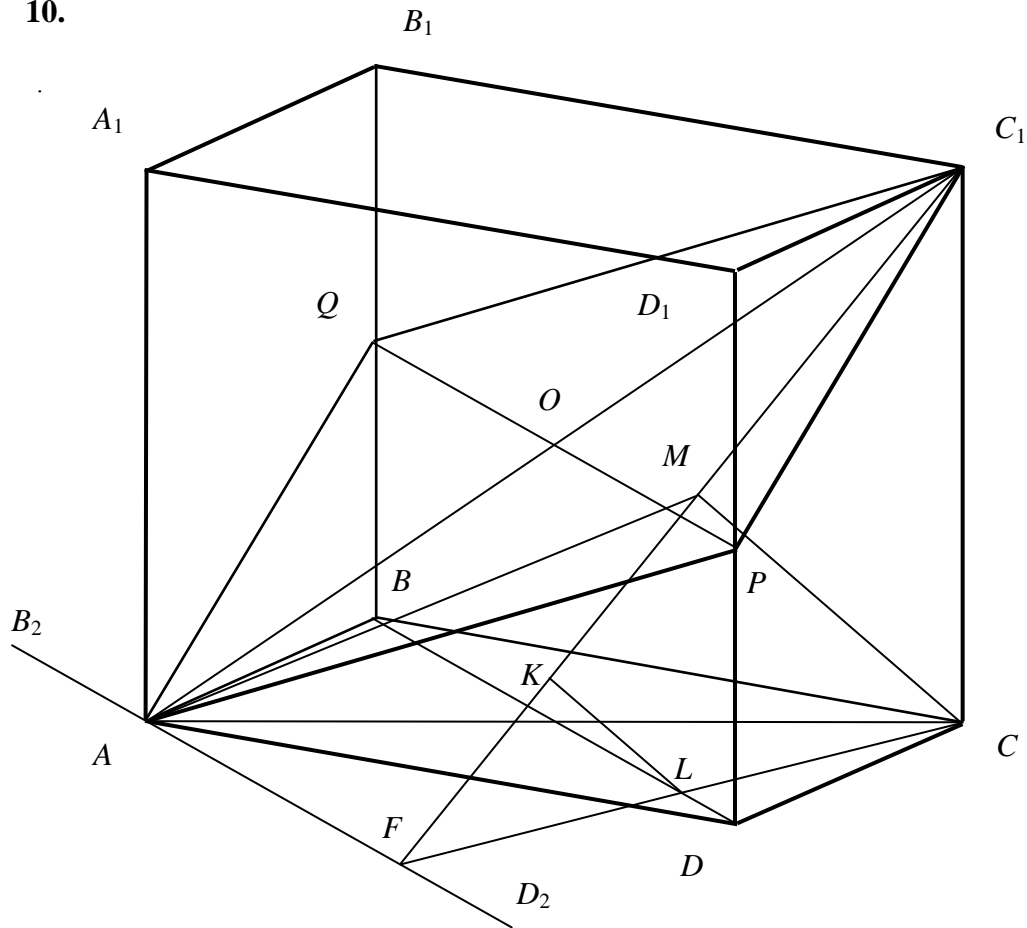
$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} D/4 = a = 0, \\ a < 0, \end{array} \right. \\ a^2 - a < 0, \Leftrightarrow 0 < a < 1 \\ \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ a = 1 \\ a < 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$



Ответ: при $a \in (-1; 0] \cup [1; 2]$ $x = a + \sqrt{a+2}$, $y = 2$; при $a \in (0; 1)$ $x_1 = a + \sqrt{a+2}$, $y_1 = 2$;

$x_2 = a - \sqrt{a}$; $y_2 = 0$, при $a \in (2; +\infty)$ $x_{1,2} = a \pm \sqrt{a+2}$, $y_{1,2} = 2$.

10.



Проведем $(B_2D_2) \parallel BD$, $A \in (B_2D_2)$; $CF \perp (B_2D_2)$, $LK \perp C_1F$, где $L = CF \cap BD$, и $CM \perp C_1F$. Тогда $FC_1 \perp B_2D_2$ и $LK = l$, $CM = 2l$. Обозначим $\alpha = \angle C_1AC$ и $\gamma = \angle CAM$; γ – угол, который диагональ основания AC образует с секущей плоскостью, и α – угол между AC и диагональю AC_1 . Тогда $AC = BD = PQ = \frac{MC}{\sin \gamma} = \frac{2l}{\sin \gamma}$; $AC_1 = \frac{AC}{\cos \alpha} = \frac{2l}{\cos \alpha \cdot \sin \gamma}$;

$CC_1 = AC \operatorname{tg} \alpha = \frac{2l \operatorname{tg} \alpha}{\sin \gamma}$. $MC_1 = \sqrt{CC_1^2 - MC^2} = \frac{2l}{\sin \gamma} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \gamma}$. $\frac{MC_1}{CC_1} = \frac{CC_1}{FC_1}$, отсюда

$$FC_1 = \frac{CC_1^2}{MC_1}, \text{ т.е. } FC_1 = \frac{2l \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}{\sin \gamma \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \gamma}}. S_{PAQC_1} = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot FC_1 = \frac{2l^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\sin^2 \gamma \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \gamma}}. \text{ При}$$

$$\gamma = 30^\circ, \alpha = 45^\circ S_{PAQC_1} = \frac{16}{\sqrt{3}} l^2.$$

$$\text{Ответ: } S = 16l^2 / \sqrt{3}.$$

Вариант № 1.2.

1. За три часа один лыжник прошел на 2,5 км больше другого, так как один километр он проходил на одну минуту быстрее. За сколько минут каждый лыжник проходил один километр? (8 баллов)

2. Решите уравнение $2^x - 6 \cdot 2^{1-x} = 1$. (8 баллов)

3. Какое наибольшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии 100, 97, 94, ...? (8 баллов)

4. Решите уравнение $\sin 2x - \sin 4x = |\sin x|$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\frac{\left(\sin \frac{\pi x}{2} - 1\right)(\sqrt{x+3} - \sqrt{x})}{x^2 - 11x + 10} \leq 0$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x) = 8 \cos 6x + 24 \sin 3x - 15$. (10 баллов)

7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, его диагонали AC и BD пересекаются в точке F , причем $BF = 4$, $FD = 3$, периметр треугольника BFC равен 10, угол BFC равен $\arcsin \sqrt{15/16}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC . (12 баллов)

8. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, координаты вершин которого удовлетворяют уравнению $|y| = (x+2)(4-x)$, $-2 < x < 4$, а стороны параллельны координатным осям? (12 баллов)

9. Укажите все значения a , при которых система уравнений

$$(x-a)^2 = 8(y-x+a-2), \frac{\sqrt{2}-\sqrt{y}}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{y}{x}}$$

имеет два различных решения. Найдите эти решения. (12 баллов)

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит прямоугольный треугольник ABC , а все боковые рёбра пирамиды равны l . Боковое ребро TB образует с гипотенузой основания AB угол 45° , а угол между TB и медианой основания CD равен 60° . Какую наименьшую

площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через медиану CD и пересекающей ребро TB ? (12 баллов)

Решения варианта №1.2

1. . За три часа один лыжник прошел на 2,5 км больше другого, так как один километр он проходил на одну минуту быстрее. За сколько минут каждый лыжник проходил один километр?

Решение. $\frac{3 \cdot 60}{x} = \frac{3 \cdot 60}{x+1} + \frac{5}{2}$; $72x + 72 = 72x + x^2 + x$; $x^2 + x - 72 = 0$; $x = (-1 \pm 17)/2$;

$x = 8$.

Ответ: за 8 и 9 минут.

2. . Решите уравнение $2^x - 6 \cdot 2^{1-x} = 1$.

Решение. $2^x - 6 \cdot 2^{1-x} = 1$, $(2^x)^2 - 2^x - 12 = 0$; $2^x = (1 \pm 7)/2$, $2^x = 4$, $x = 2$.

Ответ: $x = 2$.

3. Какое наибольшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии 100, 97, 94, ...?

Решение. Сумма первых n членов арифметической прогрессии S_n принимает наибольшее значение, если $a_n > 0$, а $a_{n+1} \leq 0$. Так как $a_n = a_1 + d(n-1)$, то из неравенства $100 - 3(n-1) > 0$ найдем $n = [103/3] = 34$.

Тогда $\max S_n = S_{34} = 0,5 \cdot (100 + 100 - 3 \cdot 33) \cdot 34 = 1717$.

Ответ: 1717.

4. Решите уравнение $\sin 2x - \sin 4x = |\sin x|$.

Решение. 1) При условии $\sin x \geq 0$ имеем $-2 \sin x \cos 3x = \sin x \Leftrightarrow \sin x = 0$ или $\cos 3x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pi n$, $x = \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. С учетом условия $\sin x \geq 0$ окончательно имеем $x = \pi n$, $x = \frac{2\pi}{9} + 2\pi n$, $x = \frac{4\pi}{9} + 2\pi n$, $x = \frac{8\pi}{9} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2) При условии $\sin x < 0$ имеем $-2 \sin x \cos 3x = -\sin x \Leftrightarrow \sin x = 0$ или $\cos 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pi n$, $x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. С учетом условия $\sin x < 0$ окончательно имеем $x = -\frac{\pi}{9} + 2\pi n$, $x = -\frac{5\pi}{9} + 2\pi n$, $x = -\frac{7\pi}{9} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \pi n$, $x = \frac{2\pi}{9} + \pi n$, $x = \frac{4\pi}{9} + \pi n$, $x = \frac{8\pi}{9} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

5. Решите неравенство
$$\frac{\left(\sin \frac{\pi x}{2} - 1\right)(\sqrt{x+3} - \sqrt{x})}{x^2 - 11x + 10} \leq 0.$$

Решение. ОДЗ: $x \neq 1, x \neq 10, x \geq 0$. Т.к. $\sin \frac{\pi x}{2} - 1 \leq 0$, то $\frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{x})}{x^2 - 11x + 10} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{(x-1)(x-10)} \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0; 1) \cup (10; +\infty). \text{ Необходимо учесть решения уравнения}$$

$$\sin \frac{\pi x}{2} - 1 = 0, \text{ принадлежащие ОДЗ. } \frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 1 + 4n, n \in \mathbb{Z}. \text{ С учетом}$$

ОДЗ имеем $x = 1 + 4n, n \in \mathbb{N}$.

Ответ: $x \in [0; 1) \cup (10; +\infty) \cup \{5; 9\}$.

6. Найдите множество значений функции $f(x) = 8\cos 6x + 24\sin 3x - 15$.

Решение:

$$f(x) = 8\cos 6x + 24\sin 3x - 15 = 8 - 16\sin^2 3x + 24\sin 3x - 15 = -16\sin^2 3x + 24\sin 3x - 7 = \\ = -(4\sin 3x - 3)^2 + 2.$$

Функция $t = 4\sin 3x$ принимает значения $t \in [-4; 4]$. Рассмотрим функцию $y = 2 - (t - 3)^2$, определенную на отрезке $[-4; 4]$. Графиком этой функции является парабола с вершиной в точке $(3; 2)$, ветви которой направлены вниз. Таким образом, максимальное значение y равно 2, оно достигается в точке $t = 3$, минимальное значение функция принимает в точке $t = -4$, оно равно -47 , и функция принимает все значения из промежутка $[-47; 2]$.

Ответ: $E_f = [-47; 2]$.

7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, его диагонали AC и BD пересекаются в точке F , причем $BF = 4$, $FD = 3$, периметр треугольника BFC равен 10, угол BFC равен $\arcsin \frac{\sqrt{15}}{4}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

Решение:

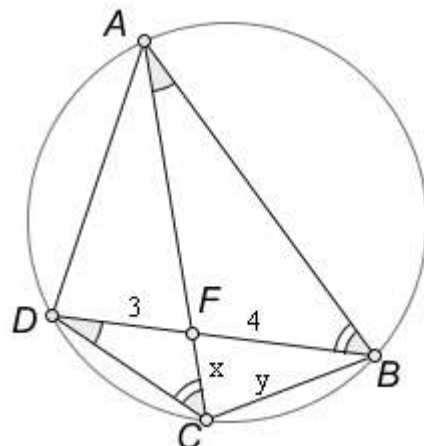
$$1) \triangle BFC : BF = 4, CF = x, BC = y$$

$$P_{BFC} = 10 \Leftrightarrow x + y + 4 = 10,$$

По теореме косинусов

$$y^2 = x^2 + 16 - 2 \cdot 4x \cos(\arcsin \frac{\sqrt{15}}{4}).$$

Решим систему



$$\begin{cases} y = 6 - x, \\ y^2 = x^2 + 16 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - x, \\ x = 2. \end{cases}$$

2) $BF = 4$, $CF = 2$, $BC = 4$. ABCD вписан в окружность \Rightarrow

$$\triangle ABF \approx \triangle DCF \Rightarrow \frac{BF}{FC} = \frac{AF}{FD} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{BF}{FC} = \frac{AF}{FD} = 2.$$

Так как $FD = 3$, то $AF = 6$.

3) По теореме косинусов $AB^2 = BF^2 + AF^2 - 2 \cdot BF \cdot AF \cos(\pi - \arcsin \frac{\sqrt{15}}{4}) \Rightarrow$

$$AB^2 = 16 + 36 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{4} = 64 \Rightarrow AB = 8 \Rightarrow P_{ABC} = 8 + 4 + 6 + 2 = 20$$

$$4) S_{BFC} = \frac{1}{2} BF \cdot FC \sin BFC = \sqrt{15}, S_{AFB} = \frac{AF}{FC} S_{BFC} = 3\sqrt{15} \Rightarrow S_{ABC} = 4\sqrt{15}.$$

$$5) r_{\text{вн}ABC} = \frac{2S_{ABC}}{P_{ABC}} = \frac{2\sqrt{15}}{5}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{15}}{5}$.

8. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, координаты вершин которого удовлетворяют уравнению $|y| = (x+2)(4-x)$, $-2 < x < 4$, а стороны параллельны координатным осям?

Решение.

$$S(x) = 2(6 - 2(x+2))(x+2)(4-x) =$$

$$4(1-x)(8+2x-x^2) =$$

$$4(8+2x-x^2-8x-2x^2+x^3) =$$

$$4(x^3-3x^2-6x+8).$$

$$S'(x) = 4(3x^2-6x-6) = 12(x^2-2x-2)$$

$$S'(x) = 0 \text{ при } x = 1 \pm \sqrt{3}; \text{ нужно}$$

взять меньшее значение $x = 1 - \sqrt{3}$.

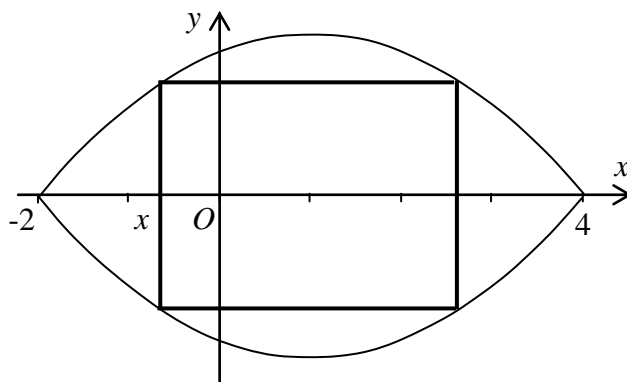
$$S_{\max} = S(1 - \sqrt{3}) = 4(1 - 1 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3}) = 24\sqrt{3}.$$

Ответ: $24\sqrt{3}$ ед².

9. Укажите все значения a , при которых система уравнений

$$(x-a)^2 = 8(y-x+a-2), \frac{\sqrt{2}-\sqrt{y}}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{y}{x}}$$

имеет два различных решения. Найдите эти решения.



Решение.

Второе уравнение равносильно системе: $x > 0$, $x \neq 2$, $y = x$. Подставляя $y = x$ в первое уравнение, получаем; $(x-a)^2 = 8(a-2)$, или $x^2 - 2ax + a^2 - 8a + 16 = 0$ (*), у которого $D/4 = a^2 - a^2 + 8a - 16 = 8a - 16$.

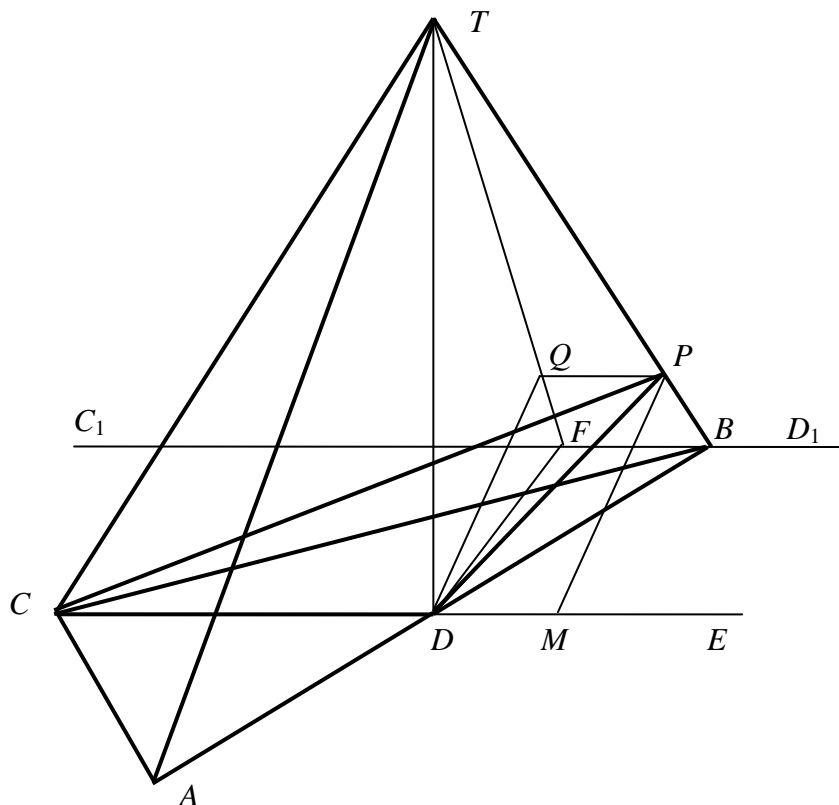
Количество решений заданной системы уравнений зависит от числа корней этого квадратного уравнения.

Квадратное уравнение (*) будет иметь два различных положительных, не равных 2, корня $x_{1,2} = a \pm \sqrt{8a-16}$, если

$$\begin{cases} 8a-16 > 0, \\ a > 0, \\ a^2 - 8a + 16 > 0, \\ 4 - 4a + a^2 - 8a + 16 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 2, \\ a \neq 4, \\ a^2 - 12a + 20 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 2, \\ a \neq 2, \\ a \neq 4, \\ a \neq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < a < 4, \\ 4 < a < 10, \\ 10 < a < +\infty. \end{cases}$$

Ответ: $a \in (2; 4) \cup (4; 10) \cup (10; +\infty)$, $x = y = a \pm \sqrt{8a-16}$.

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит прямоугольный треугольник ABC , а все боковые рёбра пирамиды равны l . Боковое ребро TB образует с гипотенузой основания AB угол 45° , а угол между TB и медианой основания CD равен 60° . Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через медиану CD и пересекающей ребро TB ? Основание высоты пирамиды совпадает с серединой гипотенузы D .



Проведем $C_1D_1 \parallel CD, B \in C_1D_1, DF \perp C_1D_1, F \in C_1D_1, DQ \perp TF, Q \in TF,$
 $QP \parallel C_1D_1, P \in TB$ и $PM \parallel QD, M \in (CD)$. Треугольник CPD – искомое сечение, PM его
 высота, причем $PM = QD$. Так как $AT = BT = CT = l, TD = BD = AD = CD = l/\sqrt{2}$.

$$BF = BT \cdot \cos 60^\circ = l/2, \quad TF = BT \cdot \sin 60^\circ = l\sqrt{3}/2, \quad DF = \sqrt{BD^2 - BF^2} = \sqrt{\frac{l^2}{2} - \frac{l^2}{4}} = \frac{l}{2}.$$

$$DQ = \frac{DF \cdot TD}{TF} = \frac{l \cdot l \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot l\sqrt{3}} = \frac{l}{\sqrt{6}} = PM. S_{\Delta CDP} = \frac{1}{2} CD \cdot PM = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{\sqrt{2}} \cdot \frac{l}{\sqrt{6}} = \frac{l^2}{4\sqrt{3}} \text{ ед}^2.$$

$$\text{Ответ: } S_{\Delta CDP} = \frac{l^2}{4\sqrt{3}}.$$

**ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО
МАТЕМАТИКЕ**

ВАРИАНТ № 2.1

1. Два спортсмена бегают по одной замкнутой круговой трассе. Скорость каждого постоянна, а на пробег круга один тратит на 9 секунд меньше другого. Если они бегут в одном направлении, то один обгоняет другого ровно на круг за 3 минуты. Через какое время они будут встречаться, если побегут в противоположных направлениях? (8 баллов)

2. Количество членов геометрической прогрессии является четным числом. Сумма всех членов прогрессии в 5 раз больше суммы членов, стоящих на нечетных местах. Найдите знаменатель прогрессии. (8 баллов)

3. Решите уравнение $\log_{0,5}^2 4x + \log_2 \frac{x^2}{8} = 7^{(\log_{49} 4^{x+3} - \log_7 2^x)}$. (8 баллов)

4. Решите уравнение $\operatorname{ctg} 6x\sqrt{2\sin 2x+1} = \operatorname{ctg} 10x\sqrt{2\sin 2x+1}$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $x - \sqrt[4]{y} - \sqrt{x^2 + \sqrt{y} - 9} \geq 3$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$$f(x) = \log_{0,2}(4 - \log_6 x) + \log_{0,2}(6 + \log_6 x). \quad (10 \text{ баллов})$$

7. Около окружности радиуса 5 описана равнобокая трапеция $ABCD$ с углом A , равным $\arccos 0,6$. Точки K и N - точки касания окружности с боковыми сторонами AB и CD , соответственно. Найдите площади четырехугольников $AKND$ и $KBCN$. (12 баллов)

8. На кривой $y = (x+2)^2$ найдите точку, расстояние от которой до общей касательной к графикам функций $y = x^2$ и $y = x^2 + 2x - 1$ будет наименьшим. Найдите это расстояние. (12 баллов)

9. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений
$$\begin{cases} y + |y| = 4\sqrt{x} \\ a(y-3) = x-2 \end{cases}$$
 имеет два различных решения. Укажите эти решения при каждом из найденных значений a . (12 баллов)

10. Шар радиуса 1 с центром в точке O вписан в правильную треугольную пирамиду. Через точку O проходит плоскость, параллельная стороне основания пирамиды и апофеме, проведенной к другой стороне основания. Найдите площадь

сечения пирамиды указанной плоскостью, если расстояние от центра описанной около основания пирамиды окружности до этой плоскости равно $1/\sqrt{13}$ (12 баллов).

Решения варианта №2.1

1. Два спортсмена бегут по одной замкнутой круговой трассе. Скорость каждого постоянна, а на пробег круга один тратит на 9 секунд меньше другого. Если они бегут в одном направлении, то один обгоняет другого ровно на круг за 3 минуты. Через какое время они будут встречаться, если побегут в противоположных направлениях?

Решение. За единицу измерения расстояния примем длину трассы. Пусть x (тр/сек) – скорость первого спортсмена, а y (тр/сек) – скорость второго. В таблице отметим пробег спортсменами всей трассы, движение с общей линии старта в одном направлении, а также в противоположных направлениях. Если они начинают бег с общего старта одновременно и в одном направлении, то через 3 минуты или 180 секунд более быстрый спортсмен пробежит расстояние на одну трассу большее, чем второй спортсмен. Если они побегут одновременно с общей линии старта в противоположных направлениях, то к моменту встречи пробегут расстояние в сумме равное длине одной трассы. В итоге, имеем таблицу:

v (тр/сек)	t (сек)	S (тр)
x	t	1
y	$t+9$	1
x	180	$S+1$
y	180	S
x	t_1	S_1
y	t_1	$1-S_1$

Необходимо найти t_1 . Согласно таблице, получаем систему из шести уравнений с шестью неизвестными:

$$\begin{cases} xt = 1, \\ y(t+9) = 1, \\ 180x = S+1, \\ 180y = S, \\ xt_1 = S_1, \\ yt_1 = 1-S_1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\left(\frac{1}{x}+9\right) = 1, \\ 180x = 180y+1, \\ t_1(x+y) = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{180x-1}{180}\left(\frac{1}{x}+9\right) = 1, \\ y = \frac{180x-1}{180}, \\ t_1(x+y) = 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (180x-1)(1+9x)=180x, \\ y=\frac{180x-1}{180}, \\ t_1(x+y)=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1620x^2-9x-1=0, \\ y=\frac{180x-1}{180}, \\ t_1(x+y)=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{36}, \\ y=\frac{1}{45}, \\ t_1=\frac{1}{x+y}, \end{cases} \Rightarrow t_1=20.$$

Ответ: 20 секунд.

2. Количество членов геометрической прогрессии является четным числом. Сумма всех членов прогрессии в 5 раз больше суммы членов, стоящих на нечетных местах. Найдите знаменатель прогрессии.

Решение. Пусть количество членов геометрической прогрессии равно $2n$. Тогда сумма всех членов прогрессии определяется по формуле $S_{2n} = \frac{b_1(q^{2n}-1)}{q-1}$, а сумма членов,

стоящих на нечетных местах $S_{\text{нечет}} = \frac{b_1(q^{2n}-1)}{q^2-1}$. Так как $S_{2n} = 5S_{\text{нечет}}$, то $q+1=5$.

Следовательно, $q=4$. Ответ: 4.

3. Решите уравнение $\log_{0,5}^2 4x + \log_2 \frac{x^2}{8} = 7^{(\log_{49} 4^{x+3} - \log_7 2^x)}$.

Решение. Преобразуем правую часть данного уравнения $7^{(\log_{49} 4^{x+3} - \log_7 2^x)} = 7^{(0,5 \log_7 4^{x+3} - \log_7 2^x)} = 7^{\log_7 2^{x+3-x}} = 7^{\log_7 8} = 8$. Тогда исходное уравнение равносильно следующему $\log_{0,5}^2 4x + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8$. Используя свойства логарифмов, имеем

$$(\log_{0,5} 4 + \log_{0,5} x)^2 + \log_2 x^2 - \log_2 8 = 8 \Leftrightarrow (2 + \log_2 x)^2 + 2 \log_2 x - 11 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x + 6 \log_2 x - 7 = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = -7 \text{ или } \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{128} \text{ или } x = 2.$$

Ответ: $\frac{1}{128}$, 2.

4. Решите уравнение $\operatorname{ctg} 6x \sqrt{2 \sin 2x + 1} = \operatorname{ctg} 10x \sqrt{2 \sin 2x + 1}$.

Решение. Данное уравнение равносильно следующему

$$\begin{aligned} (\operatorname{ctg} 6x - \operatorname{ctg} 10x) \sqrt{2 \sin 2x + 1} &= 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\cos 6x}{\sin 6x} - \frac{\cos 10x}{\sin 10x} \right) \sqrt{2 \sin 2x + 1} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\cos 6x \sin 10x - \cos 10x \sin 6x}{\sin 6x \sin 10x} \sqrt{2 \sin 2x + 1} &= 0 \Leftrightarrow \frac{\sin 4x}{\sin 6x \sin 10x} \sqrt{2 \sin 2x + 1} = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x = 0, \\ \sin 2x = -0,5, \\ \sin 6x \neq 0, \\ \sin 10x \neq 0, \\ \sin 2x \geq -0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi n}{4}, n \in Z, \\ \sin \frac{3\pi n}{2} \neq 0, \\ \sin \frac{5\pi n}{2} \neq 0, \\ \sin \frac{\pi n}{2} \geq -0,5; \\ x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2m + 1, m \in Z, \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, \\ \sin \left(\frac{\pi}{2} + \pi m \right) \geq -0,5; \\ x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi l, l \in Z, (m = 2l) \\ x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi l, l \in Z, (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$

5. Решите неравенство $x - \sqrt[4]{y} - \sqrt{x^2 + \sqrt{y} - 9} \geq 3.$

Решение. Имеем равносильное неравенство $x - \sqrt[4]{y} \geq \sqrt{x^2 + \sqrt{y} - 9} + 3.$

Так как правая часть неравенства неотрицательная, то левая часть удовлетворяет неравенству $x - \sqrt[4]{y} \geq 0.$ Тогда $x \geq \sqrt[4]{y} \geq 0,$ и $(x - \sqrt[4]{y})^2 \geq (\sqrt{x^2 + \sqrt{y} - 9} + 3)^2,$ или

$$x^2 - 2x\sqrt[4]{y} + \sqrt{y} \geq x^2 + \sqrt{y} - 9 + 6\sqrt{x^2 + \sqrt{y} - 9} + 9 \Leftrightarrow -x\sqrt[4]{y} \geq 3\sqrt{x^2 + \sqrt{y} - 9}.$$

Так как левая часть последнего неравенства неположительная, а правая неотрицательная, то это

неравенство выполняется только при условии $\begin{cases} x\sqrt[4]{y} = 0, \\ x^2 + \sqrt{y} - 9 = 0. \end{cases}$ Первое уравнение системы

распадается на два уравнения: $x = 0$ или $y = 0.$ Если $x = 0,$ то из условия $x \geq \sqrt[4]{y} \geq 0$

следует $y = 0,$ но точка $(0; 0)$ не удовлетворяет второму уравнению системы. Если $y = 0.$

То из второго уравнения системы имеем $x^2 = 9,$ с учетом условия $x \geq \sqrt[4]{y} \geq 0$ приходим к

выводу, что $x = 3.$ Итак, решением исходного неравенства является единственная точка

$(3; 0).$ Ответ: $(3; 0).$

6. Найдите множество значений функции $f(x) = \log_{0,2}(4 - \log_6 x) + \log_{0,2}(6 + \log_6 x).$

Решение. Пусть $y = f(x).$ Сделаем замену $t = \log_6 x.$ Тогда получим $y = \log_{0,2}(4 - t) + \log_{0,2}(t + 6), t \in (-6; 4).$ Используя свойства логарифмов и выделяя

полный квадрат, приходим к функции $y = \log_{0,2}((4 - t)(t + 6)) = \log_{0,2}(25 - (t + 1)^2),$

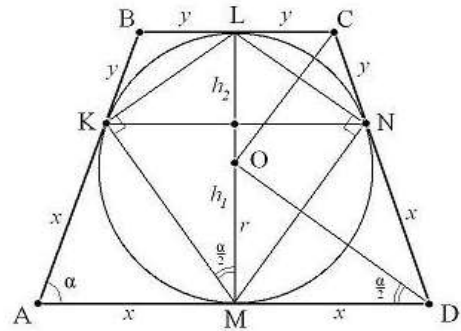
определенной при $t \in (-6; 4).$ Пусть $z = 25 - (t + 1)^2.$ Тогда при $t \in (-6; 4)$ имеем

$z \in (0; 25]$. Так как логарифмическая функция с основанием $0,2 < 1$ убывает, и $y = \log_{0,2} z$, $z \in (0; 25]$, то $y \in [\log_{0,2} 25; +\infty) = [-2; +\infty)$. Ответ: $E(y) = [-2; +\infty)$.

7. Около окружности радиуса 5 описана равнобокая трапеция $ABCD$ с углом A , равным $\arccos 0,6$. Точки K и N - точки

касания окружности с боковыми сторонами AB и CD , соответственно. Найдите площади четырехугольников $AKND$ и $KBCN$.

Решение. По условию имеем $\angle A = \alpha = \arccos 0,6$, $r = 5$, $ABCD$ - равнобокая трапеция, где r - радиус вписанной в трапецию окружности. Точки K и N - точки



касания окружности с боковыми сторонами AB и CD , соответственно. Пусть точки M и L - точки касания окружности с основаниями AD и BC , соответственно. Тогда имеем $KN \parallel AD \parallel BC$, $AKND$ и $KBCN$ - трапеции. Пусть h_1 - высота $AKND$, h_2 - высота $KBCN$. Из свойств касательных к окружности имеем $AK = AM = x$, $BK = BL = y$.

Тогда $\angle KML = \frac{\alpha}{2}$, $LM = H = 2r$, $\triangle KLM$ - прямоугольный, $\angle K = 90^\circ$,

$$KM = 2r \cos \frac{\alpha}{2}, \quad KL = 2r \sin \frac{\alpha}{2}, \quad x = \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, \quad y = r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad h_2 = y \sin \alpha, \quad h_1 = x \sin \alpha.$$

Основания трапеций $AKND$ и $KBCN$ определяем по формулам $KN = 2(y + y \cos \alpha)$ или $KN = 2(x - x \cos \alpha)$, $AD = 2x$, $BC = 2y$.

$$S_{AKND} = \frac{AD + KN}{2} h_1 = (2x - x \cos \alpha) x \sin \alpha = \frac{r^2 (2 - \cos \alpha) \sin \alpha}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{r^2 (2 - \cos \alpha) (1 + \cos \alpha) \sin \alpha}{(1 - \cos \alpha)},$$

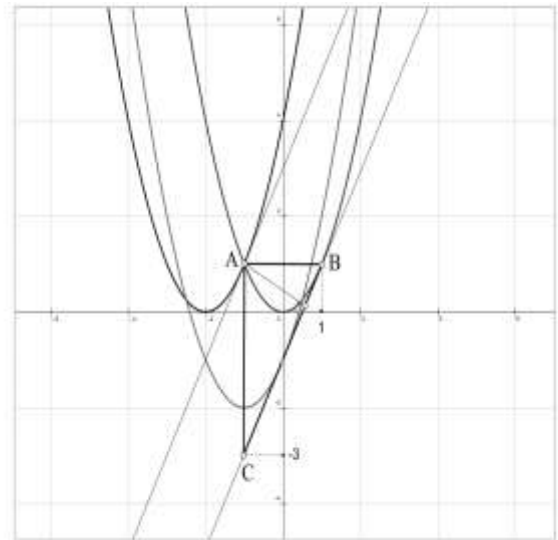
$$S_{KBCN} = \frac{BC + KN}{2} h_2 = (2y + y \cos \alpha) y \sin \alpha = r^2 (2 + \cos \alpha) \sin \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{r^2 (2 + \cos \alpha) (1 - \cos \alpha) \sin \alpha}{(1 + \cos \alpha)}.$$

$$S_{AKND} = \frac{r^2 (2 - \cos \alpha) (1 + \cos \alpha) \sin \alpha}{(1 - \cos \alpha)} = \frac{25(2 - 0,6)(1 + 0,6)0,8}{1 - 0,6} = 112.$$

$$S_{KBCN} = \frac{r^2 (2 + \cos \alpha) (1 - \cos \alpha) \sin \alpha}{(1 + \cos \alpha)} = \frac{25(2 + 0,6)(1 - 0,6)0,8}{1 + 0,6} = 13. \quad \text{Ответ: } 112, 13.$$

8. На кривой $y = (x+2)^2$ найдите точку, расстояние от которой до общей касательной к графикам функций $y = x^2$ и $y = x^2 + 2x - 1$ будет наименьшим. Найдите это расстояние.

Решение. Найдем уравнения общей касательной к графикам функций $y = x^2$ и $y = x^2 + 2x - 1$. Уравнение касательной к графику функции $y = x^2$, абсцисса точки касания которой равна x_1 имеет вид $y = 2x_1(x - x_1) + x_1^2$. Уравнение касательной к графику функции $y = x^2 + 2x - 1$, абсцисса точки касания которой равна x_2 имеет вид $y = (2x_2 + 2)(x - x_2) + x_2^2 + 2x_2 - 1$. Так как две прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ совпадают тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$, имеем следующую систему уравнений с неизвестными x_1 и x_2 для уравнений совпадающих касательных:



$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 1, \\ x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + 1, \\ (x_2 + 1)^2 - x_2^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Тогда уравнение общей касательной $y = 2x - 1$.

Точка на кривой $y = (x+2)^2$, расстояние от которой до прямой $y = 2x - 1$ будет наименьшим, совпадает с той точкой, в которой касательная к графику функции $y = (x+2)^2$ будет параллельна этой прямой. Условие параллельности двух прямых совпадает с равенством их угловых коэффициентов. Угловой коэффициент касательной совпадает со значением производной в точке, равной абсциссе точки касания. Таким образом, приходим к уравнению $2(x_0 + 2) = 2 \Leftrightarrow x_0 = -1$. Итак, абсцисса искомой точки равна $x_0 = -1$, ордината $y_0 = 1$. Обозначим эту точку $A = (-1; 1)$. Пусть точка B - точка пересечения прямой, проходящей через точку A параллельно оси абсцисс, с прямой $y = 2x - 1$. Тогда $B = (1; 1)$. Пусть точка C - точка пересечения прямой, проходящей через точку A параллельно оси ординат, с прямой $y = 2x - 1$. Тогда $C = (-1; -3)$. Расстояние от точки A до прямой $y = 2x - 1$ совпадает с длиной высоты прямоугольного треугольника ABC , опущенной из вершины A . Таким образом, искомое расстояние d

можно найти из формулы $d = \frac{AB \cdot AC}{BC}$. Так как $AB = 2$, $AC = 4$,

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2\sqrt{5}, \text{ то } d = \frac{4}{\sqrt{5}}. \text{ Ответ: } (-1; 1), \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

9. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} y + |y| = 4\sqrt{x} \\ a(y-3) = x-2 \end{cases} \text{ имеет два различных решения. Укажите эти решения при каждом}$$

из найденных значений a .

Решение. Рассмотрим два случая раскрытия модуля в первом уравнении системы.

I. Если $y \geq 0$, то $y = 2\sqrt{x}$, $a(2\sqrt{x} - 3) = x - 2$. Сделаем замену переменного $\sqrt{x} = t \geq 0$.

Получим следующее квадратное уравнение $t^2 - 2at + 3a - 2 = 0$, для которого

$$\frac{D}{4} = (a-1)(a-2); \quad t_1 + t_2 = 2a; \quad t_1 t_2 = 3a - 2. \text{ Таким образом,}$$

$$\text{два различных решения: } \begin{cases} (a-1)(a-2) > 0 \\ a > 0 \\ 3a - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left[\frac{2}{3}; 1 \right) \cup (2; +\infty).$$

$$\text{При } a \in \left[\frac{2}{3}; 1 \right) \cup (2; +\infty) \text{ имеем решения: } \begin{cases} x_{1/2} = \left(a \pm \sqrt{a^2 - 3a + 2} \right)^2 \\ y_{1/2} = 2a \pm 2\sqrt{a^2 - 3a + 2} \end{cases}$$

$$\text{Одно решение: } \begin{cases} (a-1)(a-2) = 0 \\ a > 0 \\ \begin{cases} 3a - 2 < 0 \\ 3a - 2 = 0 \end{cases} \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(-\infty; \frac{2}{3} \right) \cup \{1; 2\}.$$

$$\text{При } a \in \left(-\infty; \frac{2}{3} \right) \cup \{1; 2\} \text{ имеем решение: } \begin{cases} x = \left(a + \sqrt{a^2 - 3a + 2} \right)^2 \\ y = 2a + 2\sqrt{a^2 - 3a + 2} \end{cases}$$

II. Если $y < 0$, то $x = 0$, $a(y-3) = -2$, $y = 3 - \frac{2}{a} < 0$, $a \in \left(0; \frac{2}{3} \right)$, $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 - \frac{2}{a} \end{cases}$

$$\text{Ответ: при } a \in \left(0; \frac{2}{3} \right) \text{ имеем 2 решения: } \begin{cases} x_1 = \left(a + \sqrt{a^2 - 3a + 2} \right)^2 \\ y_1 = 2a + 2\sqrt{a^2 - 3a + 2} \end{cases}; \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = 3 - \frac{2}{a} \end{cases};$$

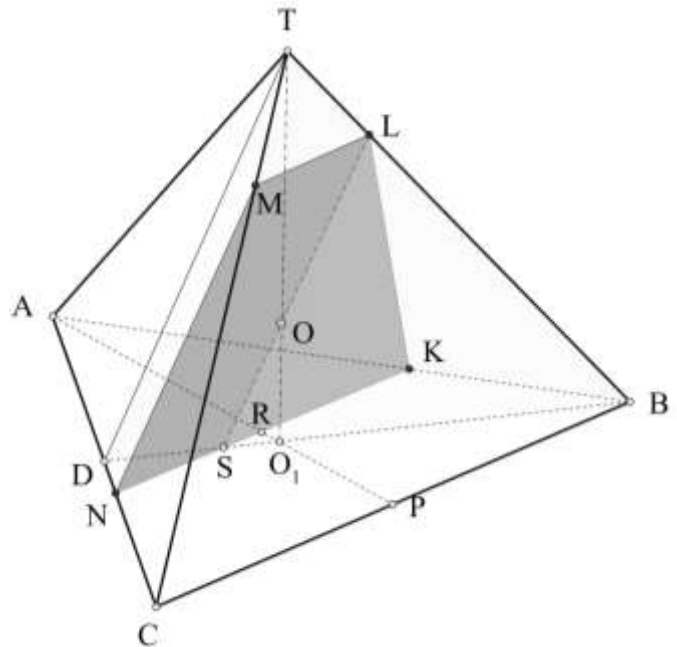
$$\text{при } a \in \left[\frac{2}{3}; 1 \right) \cup (2; +\infty) \text{ имеем 2 решение: } \begin{cases} x_{1/2} = \left(a \pm \sqrt{a^2 - 3a + 2} \right)^2 \\ y_{1/2} = 2a \pm 2\sqrt{a^2 - 3a + 2} \end{cases}$$

10. Шар радиуса 1 с центром в точке O вписан в правильную треугольную пирамиду. Через точку O проходит плоскость, параллельная стороне основания пирамиды и апофеме, проведенной к другой стороне основания. Найдите площадь сечения пирамиды указанной плоскостью, если расстояние от центра описанной около основания пирамиды окружности до этой плоскости равно $1/\sqrt{13}$ (12 баллов)

Решение. Обозначим расстояние от центра описанной около основания пирамиды окружности до плоскости, содержащей сечение, $d = \frac{1}{\sqrt{13}}$, радиус вписанного шара $r = 1$.

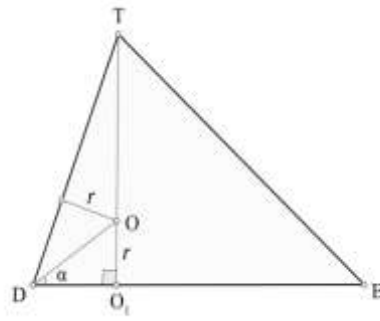
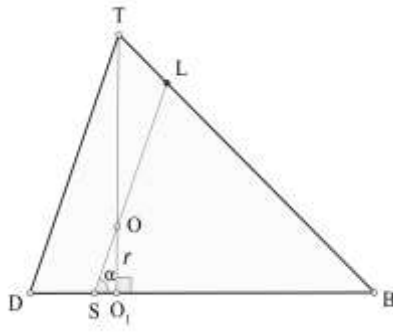
Опишем построение сечения. Центр O вписанного шара лежит на высоте TO_1 правильной треугольной пирамиды $TABC$. Пусть TD апофема пирамиды, проведенная к стороне AC . В плоскости TBD через точку O проведем прямую SL , параллельную TD , $S = DB \cap SL$, $L = TB \cap SL$. Через точку S в

плоскости основания проведем прямую NK , параллельную стороне основания CB , $N = AC \cap NK$, $K = AB \cap NK$. Соединяем точки K и L . Через точку L в плоскости TBC проводим прямую ML , параллельную стороне основания CB , $M = TC \cap ML$. Соединяем точки N и M . Трапеция $KLMN$ искомое сечение пирамиды. Найдем его площадь. Пусть a - длина стороны основания пирамиды.



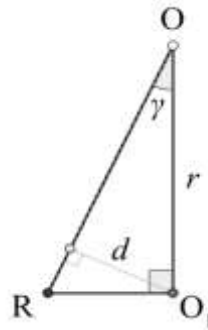
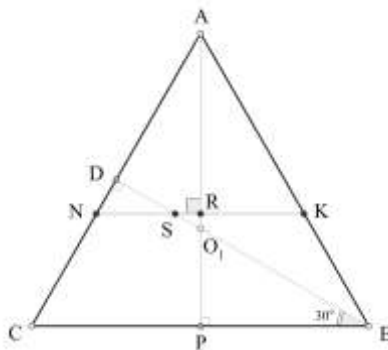
$$1) \angle ODO_1 = \alpha, \angle TDO_1 = 2\alpha, OO_1 = r, \operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{O_1D} = \frac{6r}{\sqrt{3}a} = \frac{6}{\sqrt{3}a}.$$

$$2) TD \parallel SL, \angle OSO_1 = \angle TDO_1 = 2\alpha, SO_1 = \frac{r}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{r(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{2\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sqrt{3}(a^2 - 12)}{12a}.$$



3) AP и BD - медианы основания пирамиды, O_1 - точка их пересечения, R - точка

пересечения AP и NK , $\angle DBC = \angle RSO_1 = 30^\circ$, $O_1R = \frac{SO_1}{2} = \frac{\sqrt{3}(a^2 - 12)}{24a}$, $DO_1 = \frac{1}{3}BD = \frac{\sqrt{3}a}{6}$



4) Длина высоты прямоугольного треугольника OO_1R , проведенной из вершины прямого угла O_1 , совпадает с расстоянием от центра описанной около основания пирамиды окружности до плоскости, содержащей сечение. Пусть $\angle OO_1R = \gamma$. Тогда

$$\sin \gamma = \frac{d}{r} = \frac{O_1R}{\sqrt{r^2 + O_1R^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{3}(a^2 - 12)}{\sqrt{576a^2 + 3(a^2 - 12)^2}}, \quad 4a = a^2 - 12, \quad a = 6$$

$$5) DS = O_1D - SO_1 = \frac{\sqrt{3}a}{6} - \frac{\sqrt{3}(a^2 - 12)}{12a} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$BS = 3O_1D - DS = \frac{\sqrt{3}a}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{В треугольнике } TBD \text{ имеем } TD \parallel SL \Rightarrow \frac{DS}{BS} = \frac{TL}{LB}, \quad \frac{DS}{BS} = \frac{2}{7}, \quad \frac{TL}{LB} = \frac{2}{7}.$$

$$\text{В треугольнике } TBD \text{ имеем } ML \parallel CB \Rightarrow \frac{ML}{CB} = \frac{TL}{TB} = \frac{2}{9} \Rightarrow ML = \frac{2a}{9} = \frac{4}{3}.$$

$$6) O_1R = \frac{SO_1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad SR = \frac{\sqrt{3}SO_1}{2} = \frac{1}{2}, \quad AR = AO_1 - O_1R = \frac{\sqrt{3}a}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{11\sqrt{3}}{6}.$$

Так как $NK \parallel CB$, то $\frac{NK}{CB} = \frac{AR}{AP} = \frac{2AR}{\sqrt{3}a} = \frac{11}{18} \Rightarrow NK = \frac{11}{3}$.

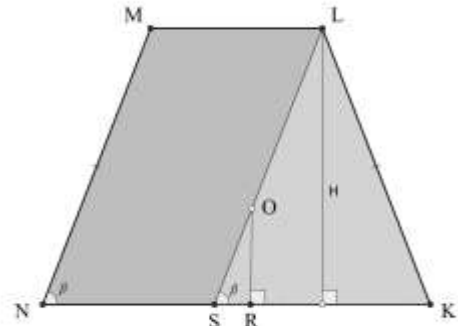
$$7) OR = \sqrt{r^2 + O_1R^2} = \frac{\sqrt{39}}{6}.$$

$$8) \angle MNK = \angle OSR = \beta, \operatorname{tg} \beta = \frac{OR}{SR} = \sqrt{\frac{13}{3}}.$$

$$9) H = \frac{NK - ML}{2} \operatorname{tg} \beta = \frac{7}{18} \sqrt{39}.$$

$$10) S_{\text{сеч}} = \frac{NK + ML}{2} H = \frac{35}{36} \sqrt{39}.$$

Ответ: $S_{\text{сеч}} = \frac{35}{36} \sqrt{39}$.



Вариант № 2.2

1. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два велосипедиста. Когда первый велосипедист проехал половину пути, второму осталось проехать 24 км, а когда второй проехал половину пути, первому осталось проехать 15 км. Найдите расстояние между пунктами A и B . (8 баллов)

2. Какое наименьшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии (a_n) , если $a_{35} = 2$, $a_{40} = 17$? (8 баллов)

3. Решите уравнение $(\log_3 x) \cdot \log_4 (x/3) = \log_2 3$. (8 баллов)

4. Решите уравнение $\sqrt{-4 \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x - \sqrt{3}} = \sqrt[4]{12} \sin x$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\frac{5 \cdot 3^{-x} - 5}{3 + \sqrt{x+1}} \geq \frac{3^{-x} - 1}{\sqrt{x+1} - 1}$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x) = \log_2 \frac{\cos 2x + 2 \sin^2 x}{1 - \sin 3x}$. (10 баллов)

7. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны 2 и 4 , углы A и D острые. Биссектрисы углов A и B трапеции пересекаются в точке M , а биссектрисы углов C и D – в точке N . Длина отрезка MN равна 5 . Найдите длины оснований BC и AD , если площадь трапеции $ABCD$ равна $4\sqrt{15}$. (12 баллов)

8. Какую наибольшую площадь может иметь фигура на плоскости xy , расположенная между прямыми $x = -3$ и $x = 1$ и ограниченная снизу осью x , а сверху – касательной к графику функции $y = x^2 + 16$ с абсциссой x_0 точки касания, лежащей в промежутке $-3 \leq x_0 \leq 1$? (12 баллов)

9. Укажите все значения a , при которых система уравнений

$$y - 4 = a(x - 2), \quad \frac{2y}{|x| + x} = \sqrt{y}$$

имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a . (12 баллов)

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC , все стороны которого равны $\sqrt{3}$, а высота пирамиды, равная 1, совпадает с боковым ребром TA . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, которая проходит через центр описанной около пирамиды сферы, параллельна медиане AD основания и образует с плоскостью основания угол 60° . (12 баллов)

Решения варианта №2.2

1. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два велосипедиста. Когда первый велосипедист проехал половину пути, второму осталось проехать 24 км, а когда второй проехал половину пути, первому осталось проехать 15 км. Найдите расстояние между пунктами A и B .

Решение. Пусть s – расстояние между пунктами A и B , v_1, v_2 – скорости велосипедистов. Тогда $\frac{s}{2v_1} = \frac{s-24}{v_2}$ и $\frac{s-15}{v_1} = \frac{s}{2v_2}$. Отсюда $\frac{s}{2(s-24)} = \frac{(s-15) \cdot 2}{s}$;
 $s^2 = 4s^2 - 4 \cdot 39s + 60 \cdot 24$; $s^2 - 52s + 480 = 0$; $s_{1,2} = 26 \pm 14$. $s_1 = 40$, $s_2 = 12$ не удовлетворяет условиям задачи $s > 15$, $s > 24$. Ответ: 40 км.

2. Какое наименьшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии (a_n) , если $a_{35} = 2$, $a_{40} = 17$?

Решение. Если a – первый член и d – разность арифметической прогрессии,

$$\begin{cases} a + 34d = 2, \\ a + 39d = 17 \end{cases} \Leftrightarrow d = 3, a = -100.$$

Сумма первых n членов арифметической прогрессии S_n принимает наименьшее значение, если $a_n < 0$, а $a_{n+1} \geq 0$. Так как $a_n = a + d(n-1)$, то из неравенства $-100 + 3(n-1) < 0$ найдем $n = [103/3] = 34$.

Тогда $\min S_n = S_{34} = 0,5 \cdot (-100 - 100 + 3 \cdot 33) \cdot 34 = -1717$. Ответ: -1717 .

3. Решите уравнение $(\log_3 x) \cdot \log_4 (x/3) = \log_2 3$.

Решение. $(\log_3 x) \cdot \log_4 (x/3) = \log_2 3$; $\frac{\log_3 (x/3)}{2 \log_3 2} \cdot \log_3 x = \frac{1}{\log_3 2}$;

$$(\log_3 x - 1) \log_3 x = 2; \log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0. \text{ 1) } \log_3 x = -1, \quad x = 1/3,$$

$$\text{2) } \log_3 x = 2, \quad x = 9. \text{ Ответ: } \{1/3; 9\}.$$

$$\mathbf{4.} \text{ Решите уравнение } \sqrt{-4 \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x - \sqrt{3}} = \sqrt[4]{12} \sin x.$$

Решение. При условии $\sin x \geq 0$ возводим в квадрат обе части уравнения:

$$-4 \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \sin^2 x \Leftrightarrow -4 \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x - \sqrt{3} = \sqrt{3} - \sqrt{3} \cos 2x \Leftrightarrow$$

$$\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \text{ С учетом условия } \sin x \geq 0$$

$$\text{окончательно имеем } x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{5.} \text{ Решите неравенство } \frac{5 \cdot 3^{-x} - 5}{3 + \sqrt{x+1}} \geq \frac{3^{-x} - 1}{\sqrt{x+1} - 1}.$$

$$\text{Решение. } \frac{5 \cdot 3^{-x} - 5}{3 + \sqrt{x+1}} \geq \frac{3^{-x} - 1}{\sqrt{x+1} - 1} \Leftrightarrow (3^{-x} - 1) \left(\frac{5}{3 + \sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1} - 1} \right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3^{-x} \geq 1, \\ \frac{5}{3 + \sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1} - 1} \geq 0, \end{cases} \quad (1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leq 0, \\ \frac{5}{3 + \sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1} - 1} \geq 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 3^{-x} \leq 1, \\ \frac{5}{3 + \sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1} - 1} \leq 0, \end{cases} \quad (2) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{5}{3 + \sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1} - 1} \leq 0, \end{cases} \quad (2)$$

Решим неравенство (1). Замена: $\sqrt{x+1} = t \geq 0, x = t^2 - 1$

$$\frac{5}{3+t} - \frac{1}{t-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5t - 5 - 3 - t}{(t+3)(t-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4t - 8}{(t+3)(t-1)} \geq 0 \stackrel{t \geq 0}{\Leftrightarrow} t \in [0; 1) \cup [2; \infty).$$

$$x+1 \in [0; 1) \cup [4; \infty) \Leftrightarrow x \in [-1; 0) \cup [3; \infty)$$

Решим неравенство (2). Замена: $\sqrt{x+1} = t \geq 0, x = t^2 - 1$

$$\frac{5}{3+t} - \frac{1}{t-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5t - 5 - 3 - t}{(t+3)(t-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4t - 8}{(t+3)(t-1)} \leq 0 \stackrel{t \geq 0}{\Leftrightarrow} t \in (1; 2].$$

$$x+1 \in (1; 4] \Leftrightarrow x \in (0; 3].$$

$$\begin{cases} x \leq 0, \\ x \in [-1; 0) \cup [3; \infty), \\ x \geq 0, \\ x \in (0; 3], \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-1; 0) \cup (0; 3]$$

$$\text{Ответ: } x \in [-1; 0) \cup (0; 3].$$

6. Найдите множество значений функции $f(x) = \log_2 \frac{\cos 2x + 2 \sin^2 x}{1 - \sin 3x}$.

Решение. $f(x) = \log_2 \frac{\cos 2x + 2 \sin^2 x}{1 - \sin 3x} = \log_2 \frac{1}{1 - \sin 3x}$.

Функция $t = \sin 3x$ принимает значения $t \in [-1; 1]$. Рассмотрим функцию $z = \frac{1}{1-t}$, определенную на полуинтервале $[-1; 1)$. Графиком этой функции является гипербола с асимптотами $t=1$ и $z=0$. Функция $z = \frac{1}{1-t}$ на промежутке $[-1; 1)$ неограниченно возрастает. Таким образом, минимальное значение z равно $\frac{1}{2}$, оно достигается в точке $t = -1$, и функция $z = \frac{1}{1-t}$ на промежутке $[-1; 1)$ принимает все значения из промежутка $\left[\frac{1}{2}; \infty\right)$. Функция $y = \log_2 z$ на промежутке $\left[\frac{1}{2}; \infty\right)$ возрастает и принимает все значения из промежутка $\left[\log_2 \frac{1}{2}; \infty\right) = [-1; \infty)$. Ответ: $E_f = [-1; \infty)$.

7. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны 2 и 4, углы A и D острые. Биссектрисы углов A и B трапеции пересекаются в точке M , а биссектрисы углов C и D – в точке N . Длина отрезка MN равна 5. Найдите длины оснований BC и AD , если площадь трапеции $ABCD$ равна $4\sqrt{15}$.

Решение. Проведем биссектрисы углов AM и BM углов A и B соответственно. Так как $\angle A + \angle B = 180^\circ$, то треугольник ABM прямоугольный, $\angle AMB = 90^\circ$. Пусть L – точка пересечения BM с основанием AD . Тогда треугольник ABL равнобедренный, так как AM является биссектрисой и высотой, $AB = AL = 2$. Пусть P – точка пересечения биссектрисы CN с основанием AD . Тогда, рассуждая аналогично, получаем, что треугольник DCP равнобедренный, $CD = DP = 4$. Точка L лежит между точками A и P , поскольку в противном случае $AL + DP \leq 6$, при этом $AL + DP \geq 2MN = 10$ (углы A и D острые). Так как $BM = ML$, а $CN = NP$, то MN – средняя линия трапеции $BLPC$.

Средняя линия трапеции $ABCD$ равна $\frac{AL}{2} + MN + \frac{DP}{2} = 8$. Пусть высота трапеции $ABCD$ равна h . По условию имеем $S_{ABCD} = 8h = 4\sqrt{15}$, $h = \frac{\sqrt{15}}{2}$. Пусть BK и CS – высоты трапеции $ABCD$. Тогда $AK = \sqrt{4 - h^2} = \frac{1}{2}$, $DS = \sqrt{16 - h^2} = \frac{7}{2}$. Пусть $BC = x$,

$AD = AK + x + DS = 4 + x$. С другой стороны, $AD = AL + 2MN - x + DP = 16 - x$. Имеем $4 + x = 16 - x \Rightarrow x = 6$. Итак, $BC = 6$, $AD = 4 + x = 10$. Ответ: 6 и 10.

8. Какую наибольшую площадь может иметь фигура на плоскости xOy , расположенная между прямыми $x = -3$ и $x = 1$ и ограниченная снизу осью x , а сверху – касательной к графику функции $y = x^2 + 16$ с абсциссой x_0 точки касания, лежащей в промежутке $-3 \leq x_0 \leq 1$?

Решение. $y = x^2 + 16$, $x_1 = -3$, $x_2 = 1$.

Уравнение касательной:

$$y = x_0^2 + 16 + 2x_0(x - x_0),$$

или

$$y = -x_0^2 + 16 + 2x_0x.$$

$$y_1 = y(x_1) = -x_0^2 + 16 + 2x_0(-3);$$

$$y_2 = y(x_2) = -x_0^2 + 16 + 2x_0 \cdot 1. \text{ Так как}$$

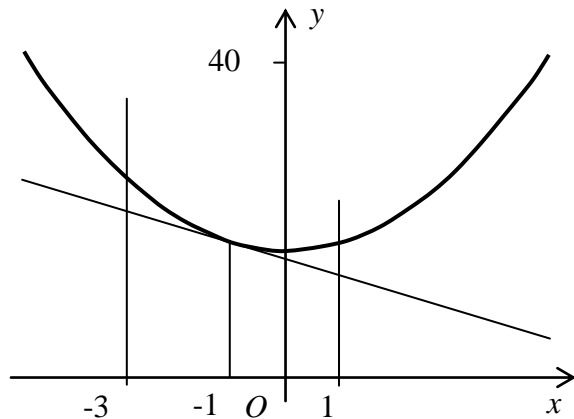
$$\min y_1 = y_1(x_2) = -1 + 16 - 6 = 9 > 0;$$

$$\min y_2 = y_2(x_1) = -9 + 16 - 6 = 1 > 0,$$

полученная фигура – трапеция, площадь которой равна

$$S(x_0) = 0,5(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) = (-x_0^2 + 16 - 2x_0)4. S'(x_0) = 4(-2x_0 - 2) = 0, \quad x_0 = -1.$$

$$\max S(x_0) = S(-1) = 4(-1 + 16 + 2) = 68$$



9. Укажите все значения a , при которых система уравнений

$$y - 4 = a(x - 2), \quad \frac{2y}{|x| + x} = \sqrt{y} \text{ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом } a.$$

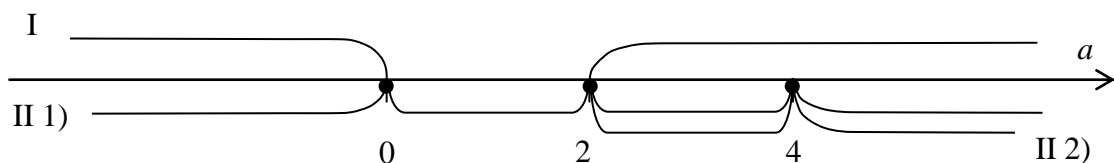
Решение. ОДЗ: $x > 0$, $y \geq 0$.

В ОДЗ второе уравнение системы принимает вид: $y = x\sqrt{y}$.

I. $y = 0$, $x = 2 - \frac{4}{a} = \frac{2a - 4}{a} > 0$, отсюда $\begin{cases} a < 0, \\ a > 2. \end{cases}$

II. $y > 0$, $y = x^2$, $x > 0$; $(x - 2)(x + 2) = a(x - 2)$. 1) $x = 2$, $y = 4$, $a \in \mathbb{R}$.

2) $x + 2 = a$, $x = a - 2 > 0$, $a > 2$. Найденное решение $x = a - 2$, $y = (a - 2)^2$ совпадает с предыдущим, если $2 = a - 2$, $a = 4$. Итак, при $a \in (2; 4) \cup (4; +\infty)$ $x = a - 2$, $y = (a - 2)^2$.



Ответ: $a \in (-\infty; 0) \cup \{4\}$, $x_1 = 2 - 4/a$, $y_1 = 0$; $x_2 = 2$, $y_2 = 4$; $a \in [0; 2]$, $x = 2$, $y = 4$;

$a \in (2; 4) \cup (4; +\infty)$, $x_1 = 2 - 4/a$, $y_1 = 0$; $x_2 = 2$, $y_2 = 4$; $x_3 = a - 2$, $y_3 = (a - 2)^2$.

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC , все стороны которого равны $\sqrt{3}$, а высота пирамиды, равная 1, совпадает с боковым ребром TA . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, которая проходит через центр описанной около пирамиды сферы, параллельна медиане AD основания и образует с плоскостью основания угол 60° .

Решение. Центр сферы O лежит на перпендикуляре к плоскости основания, проведенном через центр основания E ; $OE = AT/2$. Расстояние от точки E до линии пересечения секущей плоскости с плоскостью основания $EL = OE \cdot \text{ctg} \angle OLE$. Во всех вариантах условия подобраны так, что $EL = AB/6$, т.е., длина EL равна расстоянию от точки E до прямой MP , а тогда линия пересечения секущей плоскости с плоскостью основания есть MP , причем $MP \parallel AD$. Проведем $ON \parallel AD$, $N \in TA$, $TN = AN$. Так как $ON \parallel MP$, ON лежит в секущей плоскости. Продолжим MP до пересечения с прямой AC в точке F , затем FN – до пересечения с ребром TC в точке Q . Четырехугольник $MNPQ$ – искомое сечение. Для определения положения точки Q проведем $AG \parallel NQ$, $G \in TC$; из $TN = AN$ следует $TQ = QG$. Так как $AF = AM = 1/3 AC$, $QG = 1/3 CG$. Следовательно, $TQ = 1/5 TC$ и $AN = 1/5 AC$, где H – проекция Q на плоскость основания. Обозначим $AB = a$, $TA = h$. Из подобия $FN : FQ = AN : HQ$ получим $FN : FQ = (1/2 h) : (4/5 h) = 5 : 8$. Пусть $AK \perp FM$, тогда $NK \perp FM$. Из $FK = KM = 1/2 MP$ следует $FM = 1/2 FP$. Площадь треугольника FNM $S_{\Delta FNM}$ составляет $(5/8) \cdot (1/2) = 5/16$ площади треугольника FQP $S_{\Delta FQP}$, следовательно, площадь сечения $S_{MNQP} = 11/5 S_{\Delta FNM}$. Так как $AK = PD = 1/6 a$, $FM = 2\sqrt{3} AK = a\sqrt{3}/3$ и $NK = \sqrt{AK^2 + AN^2} = \sqrt{(a/6)^2 + (h/2)^2} = \sqrt{a^2 + 9h^2}/6$,

$$S_{\Delta FNM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + 9h^2}}{6} = \frac{a\sqrt{a^2 + 9h^2}}{12\sqrt{3}} \text{ и } S_{MNQP} = \frac{11a\sqrt{a^2 + 9h^2}}{60\sqrt{3}}.$$

Решение с помощью проектирования сечения на основание пирамиды. Площадь проекции сечения

