I. МАТЕРИАЛЫ ПО ПОДГОТОВКЕ К ОЛИМПИАДАМ ПО МАТЕМАТИКЕ

1. Содержание варианта задания олимпиады по математике в МГТУ им. Н.Э. Баумана

Задания олимпиады разработаны на основе Федерального компонента государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования. Тексты заданий в целом соответствуют формулировкам, принятым в учебниках и учебных пособиях, включенных в Федеральный перечень.

Контрольно - диагностические материалы (КДМ) позволяют установить уровень усвоения выпускниками федерального компонента государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования, а также позволяют проявить творческий потенциал, способность к самостоятельному мышлению, необходимые для успешного освоения вузовской программы технического профиля.

Каждый вариант по математике состоит из 10 заданий: четырех заданий первого уровня сложности, двух заданий второго уровня и четырех задач третьего уровня сложности.

Все задания требуют от участников развернутого ответа, т.е. должно быть записано полное обоснованное решение задачи. Задачи одного билета охватывают все основные разделы школьного курса математики.

ЗАДАЧИ ПЕРВОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ требуют знания алгоритмов решения задач из одного или двух разделов математики. Для их решения требуются простые математические преобразования и вычисления. Это могут быть текстовые задачи: задачи на движение, производительность, на пропорции и процентные отношения, на прогрессии; тригонометрические уравнения или системы уравнений, примеры на тождественные преобразования тригонометрических выражений; рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические уравнения, и их системы; задачи, связанные со свойствами геометрических фигур, в том числе, задачи по планиметрии и простейшие стереометрические задачи.

2. Примеры задач первого уровня сложности:

Текстовые задачи

1. На расстоянии 100 км первый автомобиль расходует бензина на 2 л больше, чем второй. Расходуя 1 л бензина, он проходит по такой же дороге на 2,5 км меньше, чем второй.

Каков расход бензина каждого автомобиля на расстоянии 100 км? Ответ:10 и 8 л.

2. Два экскаватора, работая одновременно, могут вырыть котлован за 4 часа. Один первый экскаватор затратит на эту работу на 6 ч больше, чем один второй. За какое время может вырыть котлован каждый экскаватор, работая отдельно? Ответ:12 и 6 ч.

3. Расстояние между станциями А и В равно 103 км. Из А в В вышел поезд и, пройдя некоторое расстояние, был задержан, а потому оставшийся путь до В проходил со скоростью, на 4 км/ч больше прежней. Найти первоначальную скорость поезда, если известно, что оставшийся путь до В был на 23 км длиннее пути, пройденного до задержки, и на прохождение пути после задержки было затрачено на 15 мин больше, чем на прохождение пути до задержки. Ответ: 80 км/ч , 8 км/ч.

4. Два лыжника стартовали друг за другом с интервалом в 6 минут. Второй лыжник догнал первого в двух километрах от точки старта. Дойдя до отметки 5 км, второй лыжник повернул обратно и встретил первого на расстоянии 1 км от точки поворота. Найдите скорости лыжников. Ответ: 10 и 20 км/ч.

5. Один велосипедист проходит за час на 6 *км* больше, чем другой, так как один километр он проходит на 20 секунд быстрее. Найдите скорости велосипедистов. Ответ: 36 и 30 км/ч.

6. Если сначала половину заказа выполнит один рабочий, а потом другую половину – второй рабочий, то весь заказ будет выполнен за 2 часа. Если же первый рабочий выполнит одну треть заказа, а потом оставшуюся часть выполнит второй, то весь заказ будет сделан за 2 ч 10 мин. За сколько времени каждый рабочий отдельно может выполнить весь заказ? Ответ: 1.5 и 2.5 ч.

7. Поезд вышел из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 230 км. Через час навстречу ему вышел из пункта второй поезд, скорость которого на 15 км/ч больше, чем у первого. Определите скорости поездов, если известно, что они встретились на расстоянии 120 км от пункта А. Ответ:40 и 55 км/ч.

8. Рабочий должен был по плану изготовить за несколько дней 72 детали. Так как рабочий каждый день изготавливал на 2 детали меньше плана, то закончил работу через 3 дня после срока. Сколько деталей в день должен был изготовлять рабочий по плану? Ответ: 8 деталей.

9. Вкладчик взял из банка сначала 1/4 своих денег, а потом 4/9 оставшихся и еще 64 тыс. руб. После этого у него осталось на вкладе 3/20 всех его денег. Какова сумма вклада? Ответ:240 тыс. руб.

10. Найти сумму трех чисел, зная, что третье относится к первому как 4,5: 3,75 и составляет 40 % второго, а сумма первого и второго равна 400. Ответ: 520.

11. Кусок сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45% меди. Какую массу меди нужно

добавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал 60% меди? Ответ: 13,5 кг.

Прогрессии

1. Укажите все значения n, при которых сумма n последовательных членов арифметической прогрессии 31, 28, 25,…, начиная с первого, не меньше 84. Ответ: $3 \le n \le 18$, $n \in N$.

2. Сколько членов содержится в возрастающей арифметической прогрессии с положительными членами, у которой сумма членов с нечетными номерами составляет 52% суммы членов всей прогрессии? Ответ: 25.

3. Укажите все значения n, при которых сумма n последовательных членов арифметической прогрессии 25, 22, 19,…, начиная с первого, не меньше 66. Ответ: $3 \le n \le 14$, $n \in N$

4. Сколько последовательных членов арифметической прогрессии 36, 33, 30, …, начиная с первого, надо сложить, чтобы получить сумму, большую 201? Ответ: $8 \le n \le 17$, $n \in N$.

5. Какое наибольшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии 68, 65, 62...? Ответ: 805.

6. В арифметической прогрессии 10 членов, их сумма равна 245. Сумма членов с четными номерами относится к сумме членов с нечетными номерами, как 27: 22. Определите первый член и разность прогрессии. Ответ: $a_1 = 2$, $d = 5$.

7. Найти три числа, которые образуют возрастающую арифметическую прогрессию, если известно, что сумма их равна 30, и что если к ним прибавить соответственно 1, 2, 9, то новые три числа образуют геометрическую прогрессию. Ответ: 5, 10, 15.

8. Три числа образуют арифметическую прогрессию. Если вместо третьего числа поставить сумму трех чисел, а остальные числа оставить без изменения, то получится геометрическая прогрессия. Найдите эти числа, если второе число равно 12. Ответ: 4; 12; 20.

9. Сумма первых девяти членов арифметической прогрессии равна 117, а сумма последовательных членов этой прогрессии, начиная с десятого номера и до пятнадцатого включительно, равна 213. Найдите четвертый член прогрессии. Ответ: 10.

Логарифмические и показательные уравнения

1. Решите уравнение $3^{1+\sqrt{x}} + 3^{2-\sqrt{x}} = 28$. Ответ: $x = 4$.

2. Решите уравнение $8\cdot 64^{\frac{1}{x}}-3\cdot 2^{\frac{3x+3}{x}}+16=0$. Ответ: 3.

3. Решите уравнение $2^{\frac{3x+2}{2x+3}}-2^{\frac{1-x}{2x+3}}=1$. Ответ: 1.

4. Решите уравнение $64\cdot 9^{x}+12^{x+1}-27\cdot 16^{x}=0$. Ответ: 2.

5. Решите уравнение $9^{|x^2-4x|+1}-81^{|x-4|}=12\cdot 3^{|x^2-4x|}-4\cdot 9^{|x-4|}$. Ответ: $1-2\sqrt{2}$, $3-\sqrt{2}$, 4.

6. Решите уравнение $2x^2\cdot 2^{\sqrt{x+2}}+x\cdot 2^{x+1}=2x^2\cdot 2^{x}+x\cdot 2^{1+\sqrt{x+2}}$. Ответ: 0; 1; 2.

7. Решите уравнение $x^{\log_2 9}-8\cdot 3^{\log_2 x}=9$. Ответ: 4.

8. Решите уравнение $2^{x}\cdot 9^{\frac{x}{x-1}}=\frac{3}{2}$. Ответ: -1; $1-\log_2 3$.

9. Решите уравнение $x^{\log_{64}(3x)}=3^{\frac{1}{\log_3 2}}$. Ответ: 9; $\frac{1}{27}$.

10. Решите уравнение $3^{1-2|x|}+9^{1+|x|}=28$. Ответ: $x=\pm\frac{1}{2}$.

11. Решите уравнение $2^{1+\sqrt{x}}+4=9\sqrt{2^{\sqrt{x}}}$. Ответ: 16.

12. Решите уравнение $2\log_{0,25}^{2}16x+\log_2\frac{x^2}{64}+8=0.$ Ответ: $\frac{1}{1024}$, $\frac{1}{4}$.

13. Решите уравнение $\sqrt{\log_{0,5}(x^2-5x+6)+1}=x-4+\sqrt{\log_3(x-1)-1}$. Ответ: 4.

14. Решите уравнение $\log_2\left(3\left|x-\frac{17\pi}{6}\right|+4\right)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$. Ответ: $\frac{17\pi}{6}$.

15. Решите уравнение $\left(1+\log_2\left(\frac{3}{2}-x\right)\right)\cdot\log_x\frac{1}{2}=1.$ Ответ: $x=1/2$.

16. Решите уравнение $\log_{x/9}x^2+5\log_{9x}x^3-12\log_{3x}\sqrt{x}=0$. Ответ: 1; 3; $3^{-\frac{2}{11}}$.

17. Решите уравнение $(\log_2(7-6x))\cdot\log_x(1/2)=1$. Ответ: $x=1/6$.

18. Решите уравнение $(\log_2 x+\log_x 2+2)(\log_2 x-\log_{2x}x)=6$. Ответ: 4; $\frac{1}{8}$.

ЗАДАЧИ ВТОРОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ содержат рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические неравенства, смешанные неравенства и их системы; задачи, связанные с исследованием функций, проверяющие умение выполнять действия с функциями, строить их графики, использовать основные свойства элементарных функций, а именно: находить области определения и множества значений, учитывать непрерывность, монотонность.

3. Примеры задач второго уровня сложности:

Неравенства

1. Решите неравенство $\dfrac{3^{-\frac{1}{x}}-3}{\lg\left(\frac{1}{2}-x\right)} \ge 0.$ Ответ: $x \in [-1;-0{,}5) \cup (0;\, 0{,}5).$

2. Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{2\sqrt{x}-8}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-3}}.$

Ответ: $x \in [0;\, 9) \cup (16;\, 25].$

3. Решите неравенство $\left(\log_2 \dfrac{3x+2}{2x}\right)\sqrt{x^4-3x^2+2} < 0.$ Ответ: $x \in (-2;-\sqrt{2}) \cup (-1;-\frac{2}{3}).$

4. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}} \ge \dfrac{2\sqrt{x}+11}{x-7\sqrt{x}+10}.$ Ответ: $x \in [0;\, 4) \cup (4;\, 16]$

5. Найдите область определения функции $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{x}{4-x}\right)+\sqrt{x^2-4x+3}.$

Ответ: $x \in (0;1] \cup [3;\, 4).$

6. Решите неравенство $\dfrac{x-7\sqrt{x}+10}{2-\sqrt{x}} \ge \dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}.$ Ответ: $x \in [0;\, 4) \cup (4;\, 16].$

7. Решите неравенство $(\cos x-1)(1-\sqrt{x+5}) \le 0.$ Ответ: $x \in [-5;-4] \cup \{2\pi n,\, n=0,1,2,\ldots\}.$

8. Найдите область определения функции $y=\dfrac{\log_3(2^x+4^x-2)}{x-3}.$ Ответ: $x \in (0;3) \cup (3;+\infty).$

9. Решите неравенство $(\lg(x+1)-1)\sqrt{x^2-3x+2} \le 0.$ Ответ: $x \in (-1;\, 1] \cup [2;\, 9].$

10. Решите неравенство $\dfrac{6-x}{\sqrt{x-1}-1} \le 1.$ Ответ: $x \in [1;\, 2) \cup [5;\, \infty).$

11. Решите неравенство $\dfrac{(4^x-12\cdot 2^x+32)(x-1)}{\sqrt{x}-1} > 0.$ Ответ: $x \in [0;\, 1) \cup (1;\, 2) \cup (3;\, +\infty).$

12. Решите неравенство $(\sqrt{4-x^2}-2)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2x+2}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}\right) \ge 0.$ Ответ: $x \in [1;\, 2] \cup \{0\}.$

13. Решите неравенство $\dfrac{x-3\sqrt{x-3}-1}{4\sqrt{x-3}-x} \le 0.$ Ответ: $x \in [3;\, 4) \cup (4;\, 7] \cup (12;\, \infty).$

14. Решите неравенство $\dfrac{5}{x-4\sqrt{x}+3} \le \dfrac{3}{x-2\sqrt{x}+1}.$ Ответ: $x \in [0;\, 1) \cup (1;\, 9).$

15. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{20-x^2+x}}{2x-3} \le \dfrac{\sqrt{20-x^2+x}}{x-6}$. Ответ: $x \in \{-4; 5\} \cup [-3; 1{,}5)$.

16. Решите неравенство $\sqrt{x^2-3x-18} \le \dfrac{9\sqrt{x^2-3x-18}}{x-2}$. Ответ: $x \in \{-3\} \cup [6; 11]$.

17. Решите неравенство $(3^x-1)\sqrt{x^2-4x+3} \ge 0$. Ответ: $x \in \{1\} \cup [2; +\infty)$.

18. Решите неравенство $(x-1)\sqrt{1-x^2} \ge (3x-2)\sqrt{1-x^2}$. Ответ: $x \in \{1\} \cup [-1; 0{,}5]$.

19. Решите неравенство $\sqrt{2\sqrt{x+1}-2} > \sqrt{1+x}-5$. Ответ: $x \in [0; 80)$.

20. Решите неравенство $\dfrac{x^2-9}{x^3-27} > \dfrac{1}{x+2}$. Ответ: $x \in (-\infty;-2) \cup (1{,}5;3) \cup (3;+\infty)$.

21. Решите неравенство $\left(\log_2 \dfrac{5x+4}{4x}\right)\sqrt{x^4-5x^2+4} < 0$. Ответ: $x \in (-4;-2) \cup (-1;-\dfrac{4}{5})$.

22. Решите неравенство $(\log_x 4)(\log_{8x} 0{,}25)(\log_7 32x) \ge \log_7\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{16}}\right)$.

Ответ: $x \in (0; 2^{-\sqrt{15}}] \cup (1/8; 1) \cup [2^{\sqrt{15}}; +\infty)$.

23. Решите неравенство $\dfrac{5}{3+\sqrt{x+1}} \ge \dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1}$. Ответ: $x \in [-1; 0) \cup [3; \infty)$.

Тригонометрия

1. Решите уравнение $\sqrt{2}\sin x + \sqrt{1-\cos x-\cos 2x-\cos 3x} = 0$. Ответ: $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$, $x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $x = -\dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

2. Решите уравнение $\cos 2x + 5\sin|x| = 3$. Ответ: $x = \pm\left((-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n\right)$, $n \in Z$, $n \ge 0$.

3. Решите уравнение $3 + 2\sin 2x = \mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x$. Ответ: $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

4. Решите уравнение $\cos(3x+\pi) - \cos 5x + \sqrt{2}\sin\left(4x + \dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$. Укажите его корни, лежащие в промежутке $[\pi/2; \pi]$.

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4}$, $x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$; $x_1 = \dfrac{5\pi}{8}$, $x_2 = \dfrac{7\pi}{8}\pi$, $x_3 = \dfrac{3\pi}{4}$.

5. Решите уравнение $\sin 9x - 2\sin 3x = 0$. Ответ: $x = \dfrac{\pi n}{3}$, $x = \pm\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.

6. Решите уравнение $\sin^2 4x - \sin^2 x = \sin^2 3x$. Ответ: $x_1 = \dfrac{\pi n}{3}$, $x_2 = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4}$, $n \in Z$.

7. Решите уравнение $|\cos 3x| + \sin 6x = 0$. Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \quad x = -\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, \ n \in Z$.

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \cos^2 x + \sin^2 y = 1. \end{cases}$

Ответ: $(\pi n; 2\pi k)$, $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $n \in Z$, $k \in Z$.

9. Решите уравнение $3\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{6}\sin x = 0$. Ответ: $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad x = 2\pi n, \quad n \in Z$.

10. Решите уравнение $\sin(4\sqrt{x}) + 2\cos^2 \sqrt{x} = 1$.

Ответ: $x = \left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}\right)^2, n \in Z, n \geq 1; \ x = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right)^2, k \in Z, k \geq 0.$

11. Решите уравнение $(1 + \mathrm{tg}^2 x)(1 + \cos 2x)\mathrm{ctg} x + 4\cos x = 0$.

Ответ: $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

12. Решите уравнение $2\cos^2 x + 2\sqrt{2}\cos x \cos^2 4x + \cos^2 4x = 0$. Ответ: $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in Z$.

13. Решите уравнение $\cos 2x = 2\cos x \cos 5x - 1$. Ответ: $x = \frac{\pi n}{3}, \ x = \frac{\pi n}{2}, \ n \in Z$.

14. Решите уравнение $\sin^4 9x + \cos^7 15x \cos^2 9x = 1$. Ответ: $x = \frac{2\pi n}{3}, \ x = \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{9}, \ n \in Z$.

15. Решите уравнение $\cos x\sqrt{16(\mathrm{tg}x + 1)|\mathrm{tg}x - 1| + 9} = 4\sin x + \cos x$.

Ответ: $x = \mathrm{arctg}\frac{3}{4} + \pi n, \ n \in Z$

16. Решите уравнение $\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{2}\sin x = 0$. Ответ: $\sin x = (-1)^{n+1}\pi/6 + n\pi, \ n \in Z$.

17. Решите уравнение $\sqrt{2}\cos^2 \mathrm{x} + 2\sqrt{2}\sin^2 \mathrm{x} = 3\sin \mathrm{x}$. Укажите его корни, лежащие в промежутке $[-2\pi; \pi/2]$. Ответ: $x = (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z; \ x_1 = -\frac{7\pi}{4}, \ x_2 = -\frac{5\pi}{4}, \ x_3 = \frac{\pi}{4}$.

Множества значений функций

1. Найдите множество значений функции $f(x) = \log_{0,5}(3 + \sin x)$. Ответ: $E = [-2; -1]$.

2. Найдите множество значений функции $f(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\sin(x^2 + 2x + 2)\right)$.

Ответ: $[\sqrt{2}; 2]$.

3. Найдите множество значений функции $f(x) = \log_{0,25}(5 - \log_3 x) + \log_{0,25}(\log_3 x - 1)$.

Ответ: $[-1; +\infty)$.

4. Найдите множество значений функции $f(x) = 4\cdot 0{,}5^{(2-\log_3 x)\log_3 x}$. Ответ: $[2; +\infty)$.

5. Найдите множество значений функции $f(x) = \log_{0,5}\left(\dfrac{\sin x}{\sin x + 7}\right)$. Ответ: $[3; +\infty)$.

6. Найдите множество значений функции $f(x) = \arccos\left(\dfrac{\cos x}{\cos x + 2}\right)$.

Ответ: $[\arccos 1/3; \pi]$.

7. Найдите множество значений функции $f(x) = \arcsin(\sqrt{x^2 - 4} - \frac{1}{2})$. Ответ: $\left[-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

8. Найдите множество значений функции $f(x) = 4\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{7\pi}{12}(\sqrt{4 - x^2} - 1)^2\right)$.

Ответ: $\left[-2\sqrt{2}; 2\sqrt{3}\right]$.

9. Найдите множество значений функции $f(x) = 15 - x^2 - 4\sqrt{9 - x^2}$. Ответ: $E_f = [2; 6]$.

10. Найдите множество значений функции $f(x) = 2^{-(2\arccos x)/\pi}$, если $x \geq -1/\sqrt{2}$.

Ответ: $[1/\sqrt{8}; 1]$.

11. Найдите множество значений функции $f(x) = \log_{0,2}\left(\dfrac{80}{13 + \log_5(125 + x^4)}\right)$. Ответ: $[-1; +\infty)$.

12. Найдите множество значений функции $f(x) = \log_{0,5}(3 + \cos x)$. Ответ: $E = [-2; -1]$.

13. Найдите множество значений функции $f(x) = \dfrac{\cos 2x + 2\sin^2 x}{1 - \sin 3x}$. Ответ: $E_f = \left[\dfrac{1}{2}; \infty\right)$.

ЗАДАЧИ ТРЕТЬЕГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ включают задания по планиметрии на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей), проверяющие знания основных свойств и соотношений в треугольниках, четырехугольниках, многоугольниках, свойств окружностей и их касательных, умение выполнять геометрические построения. Так же предлагается задача на использование производной, которая проверяет умение выполнять действия с функциями, вычислять производные, использовать геометрический смысл производной, составлять уравнения касательных к графикам функций, находить экстремумы функций, наибольшие и наименьшие значения на отрезке и владеть основами аналитической геометрии (выполнять действия с координатами и векторами на плоскости). К этой группе относится и задача, которая требует умения решать алгебраические уравнения, неравенства или системы уравнений с параметрами при наличии ограничений на неизвестные. Умение решать подобные задачи показывает уровень логического мышления участника, его способность находить выход из нестандартной ситуации. Последней задачей является задача по стереометрии. Для ее решения необходимо владеть методикой построения стереометрических чертежей и навыками применения теорем планиметрии и стереометрии для вычисления требуемых элементов. Успешное решение данной задачи показывает уровень пространственного воображения школьника, которое необходимо будущему инженеру.

4. Примеры задач третьего уровня сложности:

Планиметрия

1. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, его диагонали AC и BD пересекаются в точке F, причем $AB = 3$, $CD = 2$, периметр ΔCDF равен 5, площадь ΔABF равна $9\sqrt{15}/16$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ADF. Ответ: $\dfrac{8}{\sqrt{15}}$ или $\dfrac{4}{\sqrt{15}}$

2. В равностороннем треугольнике ABC на сторонах $AB,$ BC и AC выбраны точки $K,$ L и M так, что $AK : KB = 3:5,$ $BL : LC = 1:7,$ $AM : MC = 3:1.$ Площадь круга, описанного около треугольника KLM равна $\dfrac{91}{9}\pi.$ Найдите длину стороны треугольника $ABC.$ Ответ: 8.

3. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота $CK.$ Медиана CM треугольника ACK равна 3, а медиана CN треугольника BCK равна $2\sqrt{3}$. Найдите площадь треугольника $ABC.$ Ответ: $6\sqrt{2}.$

4. Окружность с центром O касается сторон угла B в точках A и C. Лучи AO и BC пересекаются в точке M, $OM = 5,$ $\angle CAM = 0{,}5 \arccos 0{,}6.$ Найдите площадь треугольника $BOM.$ Ответ: 15.

5. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка $K.$ Известно, что $\angle B + \angle C = \angle AKB,$ $AK = 5,$ $BK = 16,$ $KC = 2.$ Найдите площадь круга, вписанного в треугольник $ABC.$ Ответ: $\dfrac{243}{52}\pi.$

6. Площадь прямоугольного треугольника равна 12, а его гипотенуза равна $2\sqrt{13}$. Найдите косинус острого угла между медианами данного треугольника, проведенными к его катетам. Ответ: $\dfrac{13\sqrt{10}}{50}$.

7. Один из углов трапеции $ABCD$ равен 30°, а прямые, содержащие боковые стороны AB и CD, пересекаются в точке M под прямым углом. Радиус вписанной в треугольник AMD окружности равен $2(\sqrt{3}-1)$, а площадь трапеции $ABCD$ равна $\frac{15\sqrt{3}}{2}$. Найдите длины оснований трапеции. Ответ: 2, 8.

8. Около окружности радиуса 2 описана равнобокая трапеция $ABCD$ с углом A, равным 60°. Точки K и N - точки касания окружности с боковыми сторонами AB и CD, соответственно. Найдите площадь четырехугольника $KBCN$. Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

9. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 28, угол A составляет 120°, BK и BN - высоты параллелограмма, проведенные к прямым, содержащим стороны AD и CD соответственно. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если длина отрезка KN равна $\sqrt{111}$. Ответ: $S=24\sqrt{3}$.

10. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, его диагонали AC и BD пересекаются в точке F, причем $AF:FC=3:1$, $BF:FD=4:3$, угол $\angle \mathrm{AFD}=\arccos\frac{1}{4}$. Найдите радиус описанной около треугольника AFD окружности, если $AC=4$. Ответ: $\frac{6}{\sqrt{15}}$.

11. В равнобедренном треугольнике ABC вписанная окружность касается основания AC в точке D, а боковой стороны AB в точке E. Отрезок FD, где F – середина стороны AB, пересекает вписанную окружность в точке G, причем G не совпадает с D. Через точку G проведена касательная к окружности, пересекающая сторону AB в точке H. Найдите величину угла BCA, если $FH:HE=2:3$. Ответ: $\arccos\frac{3}{4}$.

12. В трапеции $ABCD$ основания $AD=9, BC=2$, углы A и D при основании равны $\operatorname{arctg} 4$ и $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$, соответственно. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник CBE, где E – точка пересечения диагоналей трапеции. Ответ: $\frac{2}{4+\sqrt{5}}$.

13. В треугольнике ABC со сторонами $AB=\sqrt{13}$ и $BC=\sqrt{6}$ проведена медиана BD. Окружности, вписанные в треугольники ABD и DBC, касаются отрезка BD в точках M и N. Найдите длину отрезка MN. Ответ: $\frac{\sqrt{13}-\sqrt{6}}{2}$.

14. На стороне AC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AB и BC в точках D и E соответственно. Угол $\angle EDC$ равен $30°$, площадь треугольника AEC равна $\sqrt{3}/2$, а площадь треугольника DBE относится к площади треугольника ABC как $1:2$. Найдите стороны треугольника ABC.

Ответ: $2;\ \sqrt{6};\ \sqrt{3}+1$.

15. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CK. Медиана CM треугольника ACK равна $\sqrt{13}$, а медиана CN треугольника BCK равна $\sqrt{21}$. Найдите площадь треугольника ABC. Ответ: $8\sqrt{3}$.

16. Площадь треугольника ABC равна $16\sqrt{3}$, сторона $AB=8$, угол $\angle B=60°$. На сторонах AB, BC и AC выбраны точки K, L и M так, что $AK:KB=3:5$, $BL:LC=1:7$, $AM:MC=3:1$. Найдите площадь круга, описанного около треугольника KLM. Ответ: $\frac{91}{9}\pi$.

Задачи на производную

1. Какая наибольшая площадь может быть у равнобедренного треугольника, основание которого параллельно оси x, а координаты вершин удовлетворяют уравнению $|y|=9-(x-2)^2$? Ответ: $\max S(x)=12\sqrt{6}\approx 29{,}39$.

2. Разность одной стороны треугольника и половины второй равна 3, а угол между ними равен $\arccos\frac{4}{5}$. Какую наименьшую длину может иметь третья сторона этого треугольника? Ответ: $\frac{6}{\sqrt{5}}$.

3. На кривой $y=x^2+x$ найдите точку, расстояние от которой до точки $M(-1;1)$ является наименьшим. Найдите это расстояние.

Ответ: точка $A(-1{,}5;\ 0{,}75)$, наименьшее расстояние $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

4. Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка $M(0;3)$, а его катеты лежат на прямых $x=-1$ и $y=0$.

Ответ: 6.

5. Какую наибольшую площадь может иметь плоский треугольник, ограниченный осью Ox прямой $x=\frac{3}{2}$ и касательной к графику функции $y=2x^2$ в точке с абсциссой x_0, если $0<x_0<3$? Ответ: 2.

6. Найдите наибольший и наименьший периметры, которые могут быть у прямоугольника, две вершины которого лежат на оси x, а две другие – на графике функции $y=2\sqrt{2}(1+\sin x), \quad -\pi/2 \le x \le 3\pi/2$.

Ответ: $P_{\max}=4\left(\frac{\pi}{4}+\sqrt{2}+1\right)\approx 12{,}8$, $P_{\min}=4\left(\frac{3\pi}{4}+\sqrt{2}-1\right)\approx 11{,}1$.

7. Какую наибольшую площадь может иметь треугольник, две вершины которого лежат на графике функции $y=\sqrt{4x-x^2-3}$, $x\in(1;3)$, одна вершина находится в начале координат, а сторона параллельна оси x? Ответ: 0,5.

8. Составьте уравнения общих касательных к графикам функций $y=\frac{32}{9}x^3$ и $y=(x+1)^2$.

Ответ: $y=0; \quad y=6x-3; \quad y=\frac{8}{3}x+\frac{8}{9}$.

9. Какое наибольшее значение может принимать площадь прямоугольного треугольника, одна вершина которого совпадает с началом координат, другая лежит на кривой $(x-1)^2+(y-1)^2=2$, а вершина прямого угла расположена на прямой $y=x$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

10. Найдите угол между касательными к графику функции $y=\frac{x^2}{12}$, проходящими через точку $M(2\sqrt{3};-3)$. Ответ: 90°.

11. Траектории, по которым двигаются снаряды зенитного орудия, задаются уравнением $y=px-0{,}5\left(1+p^2\right)x^2, x\ge 0, y\ge 0$, где параметр p $(0<p<+\infty)$ определяется наклоном траектории в начальной точке. Может ли снаряд попасть в точку $M\left(3/4;1/4\right)$? Укажите на плоскости xy все точки, через которые проходят траектории. Ответ: точка M лежит над границей области достижимости, снаряд не может попасть в нее ни при каком значении p.

12. Найдите площадь треугольника, одна сторона которого лежит на касательной к графику функции $y=0{,}25x^2-x+4$ в точке с абсциссой $x_0=4$, а две стороны – на касательных к этому графику, проходящих через точку $A(5;\ 3)$. Ответ: 3.

Задачи с параметрами

1. Укажите все значения a, при которых система уравнений $\left(x-a\right)^2=8(y-x+a-2),\ \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{y}}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}=1$ имеет два различных решения. Найдите эти решения.

Ответ: $a\in(2;10)\bigcup(10;+\infty),\ x=y=a\pm\sqrt{8a-16}$.

2. Найдите все значения a, при которых уравнение $(x-a)^2+a-12=\sqrt{\dfrac{|x|-x}{x-6}}$ имеет единственное решение, и решите его при каждом a.

Ответ: $a\in(-4;3)\bigcup\{8;12\}\quad x=a+\sqrt{12-a}$.

3. Найдите все значения a, при которых уравнение $(x+a)^2+2a=\dfrac{7x-9|x|}{x-|x|}$ имеет единственное решение, и решите его при каждом a.

Ответ: $a\in(-4;2]\bigcup\{4\}\quad x=-a-\sqrt{8-2a}$.

4. Найдите все значения a, при которых уравнение $(x+2)^2+(a+\dfrac{|x-1|}{x-1})^2=25$ имеет два различных решения, и решите его при каждом a.

Ответ: $a=-4\quad x_1=-2,\ x_2=2,\ a\in\left[-3;3\right)\quad x_1=-2-\sqrt{25-(a-1)^2},x_2=-2+\sqrt{25-(a+1)^2}$,

$a\in(5;6)\quad x_{1,2}=-2\pm\sqrt{25-(a-1)^2}$.

5. Найдите все значения a, при которых уравнение $x^2+x|x|=4(3+2ax-5a)$ имеет два различных решения, и решите его при каждом a.

Ответ: $a\in(0;\dfrac{3}{5}\Big]\quad x_1=2a+2\sqrt{(a-1)(a-\dfrac{3}{2})},x_2=\dfrac{5a-3}{2a}$,

$a\in(\dfrac{3}{5};1)\bigcup(\dfrac{3}{2};+\infty)\quad x_{1,2}=2a\pm2\sqrt{(a-1)(a-\dfrac{3}{2})}$.

6. Укажите все значения a, при которых уравнение $64a(x-10)+384=\left(x+|x|\right)^2$ имеет хотя бы одно решение, и решите его при каждом a.

Ответ: при $a\in[3/5;1)\bigcup(3/2;+\infty)\quad x_{1,2}=8a\pm4\sqrt{4a^2-10a+6}$;

при $0<a<3/5\quad x_1=\dfrac{10a-6}{a},x_2=8a+4\sqrt{4a^2-10a+6}$;

при $a\in(-\infty;0]\bigcup\{1\}\bigcup\{3/2\}\quad x=8a+4\sqrt{4a^2-10a+6}$

7. Найдите все значения параметра p, при которых система уравнений

$\begin{cases} y^2 - 28y + 195 = 3\dfrac{|x|}{x}, \\ y - 4p = 4(x-1)^2, \end{cases}$ имеет ровно два различных решения, и решите ее при каждом p.

Ответ: $p \in (-\infty; 2]$ $x_1 = 1 + \sqrt{4-p},\ x_2 = 1 + \sqrt{3-p},$ $p \in (3, 4)$ $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{4-p},$ $p = 3$ $x_1 = 1,\ x_2 = 2$

Стереометрия

1. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник. Все боковые рёбра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°, а угол между одним из них и гипотенузой основания равен 60°. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через гипотенузу основания, если гипотенуза основания пирамиды равна d ? Ответ: $S = \dfrac{d^2}{4\sqrt{3}}$.

2. Цилиндр с высотой h и радиусом основания $\sqrt{2}h$ вписан в конус так, что одно из оснований лежит в плоскости основания конуса, а окружность другого основания — на боковой поверхности. В свою очередь, конус должен быть вписан в сферу возможно меньшего радиуса. При какой высоте конуса радиус описанной около него сферы будет наименьшим? Найдите значение радиуса. Ответ: $3h,\quad R_{\min} = \dfrac{9}{4}h$.

3. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида, у которой высота относится к боковому ребру, как $\sqrt{2} : \sqrt{3}$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через высоту основания? Найдите отношения объемов частей, на которые секущая плоскость разбивает пирамиду в этом случае.

Ответ: $S_{\min} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{33}}R^2$, $3:19$.

4. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны $\sqrt{3}$, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной медиане основания AD, пересекающей ребро AB в точке M, так что $MB = 2AM$, и проходящее через центр сферы, описанной около пирамиды, если радиус сферы равен $5/2$. Ответ: $22\sqrt{3}/15$.

5. Основанием пирамиды $TABC$ служит прямоугольный треугольник ABC. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $45°$, а угол между боковым ребром TB и гипотенузой основания AC равен $60°$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ребро TB и точку M на стороне

AC, если высота пирамиды равна h? Найдите расстояние от середины гипотенузы AC до точки M, когда площадь сечения наименьшая?

Ответ: $\frac{h^2}{\sqrt{6}}, \frac{h\sqrt{2}}{3}$.

6. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны $\sqrt{14}$, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через середины стороны основания AC и бокового ребра TB и параллельной медиане TD боковой грани BTC, если расстояние от вершины A до секущей плоскости равно $\sqrt{3}$. Ответ: $\frac{21\sqrt{3}}{4}$.

7. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны $4\sqrt{7}$, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины стороны основания AC и бокового ребра TB и параллельной медиане BD боковой грани BTC, если расстояние от вершины пирамиды T до секущей плоскости равно $\sqrt{2}$. Ответ: 21.

8. Шар радиуса 6 с центром в точке O вписан в правильную треугольную пирамиду со стороной основания, равной 36. Через точку O проходит плоскость, параллельная стороне основания пирамиды и апофеме, проведенной к другой стороне основания. Найдите площадь сечения пирамиды указанной плоскостью. Ответ: $35\sqrt{39}$.

9. На высоте TO правильной треугольной пирамиды $TABC$ выбрана точка M, так что $TM = 3 \cdot OM$. Через точку M проходит плоскость, параллельная стороне основания пирамиды и апофеме, проведенной к другой стороне основания. Найдите объемы частей, на которые делит пирамиду указанная плоскость, если сторона основания пирамиды равна 8, а высота пирамиды равна $2\sqrt{3}$. Ответ: $V_1 = \frac{121}{8}, \quad V_2 = \frac{135}{8}$.

10. В правильной четырехугольной пирамиде *TABCD* с высотой, равной 9, и стороной основания, равной 4, проведена плоскость, проходящая через апофему *TK* боковой грани *TAB* и параллельная медиане *CM* боковой грани *TCD*. На каком расстоянии от этой плоскости находится центр основания пирамиды? Ответ: $\frac{18}{11}$.

11. Правильная треугольная призма с высотой h и стороной основания $\sqrt{6}h$ вписана в конус так, что одно из оснований лежит в плоскости основания конуса, а вершины другого основания – на боковой поверхности. В свою очередь, конус должен быть вписан в сферу возможно меньшего радиуса. При какой высоте конуса радиус описанной около

него сферы будет наименьшим? Найдите это значение радиуса. Ответ: $R_{\min} = \dfrac{9}{4}h$.

12. Найдите площадь сечения правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через центр описанной около призмы сферы и вершину основания A и пересекающей сторону основания BC в точке F так, что $CF = 2BF$, если стороны основания призмы равны 6, а расстояние от центра основания призмы до секущей плоскости равно $\sqrt{3}/3$. Ответ: $5\sqrt{6}$.

Типовые задания для самостоятельного решения

Вариант № 1

1. По плану одной бригаде нужно изготовить на 900 изделий больше, чем другой за то же время. Чтобы каждая бригада выполнила свой план на 2 дня раньше, в первую бригаду добавили 3 человека, а во вторую 2. Сколько рабочих было в каждой бригаде во время работы, если каждый из них изготовлял в среднем по 15 изделий в день? (8 баллов). Ответ: 18 и 12 рабочих.

2. Сколько членов содержится в возрастающей арифметической прогрессии, у которой сумма членов с четными номерами составляет 90% суммы членов с нечетными номерами? (8 баллов). Ответ:19.

3. Решите уравнение $\left(x^{\log_{\sqrt{x}}|3-x|} - 4\right)^2 + \sqrt{(2^x - 6x - 2)(2^x - x - 1)} = 0$. (8 баллов)

Ответ: 5.

4. Решите уравнение (8 баллов)

Ответ: $arctg\dfrac{7}{8} + \pi n,\ n \in Z$.

5. Решите неравенство $\dfrac{10(x^3 - 27)\sqrt{x^2 + 10x + 25}}{(x^2 + 3x + 9)(x^2 + 2x - 15)} \geq x - 3$. (10 баллов)

Ответ: $(-\infty; -7] \cup (-5; 3) \cup (3; 13]$.

6. Найдите множество значений функции $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \log_{0,5}\left(\dfrac{\sqrt{4 - \mathrm{x}^2}}{\sqrt{4 - \mathrm{x}^2} + 14}\right)$. (10 баллов)

Ответ: $\mathrm{E}(\mathrm{y}) = [3; +\infty)$.

7. Окружность радиуса $R_1 = \sqrt{3}$ касается сторон AB и BC треугольника ABC, а окружность радиуса $R_2 = 3\sqrt{3}$ внешним образом касается первой окружности и сторон AC и BC треугольника ABC. Общая касательная к этим окружностям, не содержащая сторону BC, пересекает отрезки AB и AC в точках M и N соответственно. Найдите

длины сторон треугольника ABC, если $\angle AMN = 30°$, $\angle ANM = 90°$.(12 баллов). Ответ: $7\sqrt{3}+15$, $5\sqrt{3}+7$, $10\sqrt{3}+14$.

8. Какую наименьшую длину может иметь отрезок AB, если точка A принадлежит кривой $x^2+4x+y^2-20y+103=0$, а точка B − графику функции $y=3|x|$? (12 баллов). Ответ: $(4/\sqrt{10})-1$.

9. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} \sqrt{y+a} = 2x - x^2, \\ y + x^2 = 2x + a^2 \end{cases}$ имеет ровно 4 различных решения. Найдите эти решения при каждом из полученных a. (12 баллов). Ответ: $a \in (-1; -0{,}5) \cup (-0{,}5; 0)$,

$$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{a+1}, \quad y_{1/2} = a^2 - a; \ x_{3/4} = 1 \pm \sqrt{-a}, \quad y_{3/4} = a^2 + a + 1.$$

10. Основанием пирамиды $TABCD$ является трапеция $ABCD$, стороны BC и AD которой лежат на параллельных прямых, $BC=4$, $BC<AD$, а радиус вписанной в трапецию $ABCD$ окружности равен $\sqrt{6}$. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания пирамиды под одним и тем же углом. Расстояние между медианой AM боковой грани TAB и высотой TK боковой грани TBC равно $\sqrt{3}/2$. Найдите объем пирамиды $TABCD$, если известно, что вокруг нее можно описать сферу (12 баллов). Ответ: 20.

Вариант № 2

1. Один рабочий за два часа делает на 5 деталей больше, чем другой, соответственно на изготовление 100 деталей он затрачивает на 2 ч меньше. Какое время тратит каждый рабочий на изготовление 100 деталей? (8 баллов)

2. Сколько последовательных членов арифметической прогрессии 32, 28, 24, …, начиная с первого, надо сложить, чтобы получить сумму, равную 132? (8 баллов)

3. Решите уравнение $9^{1+2\sqrt{x}} - 28 \cdot 9^{\sqrt{x}} + 3 = 0$. (8 баллов)

4. Найдите все корни уравнения $\cos 3x = \sqrt{3}\sin 4x + \cos 5x$, принадлежащие промежутку $[\pi/2; \pi]$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{x-3\sqrt{x-1}+1}{4\sqrt{x-1}-2-x} \le 0.$ (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x) = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{2}(\sqrt{4-x^2}-1)^2\right)$. (10 баллов)

7. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 28, его площадь равна $24\sqrt{3}$, угол A составляет 60°, BK и BN – высоты параллелограмма, проведенные к прямым, содержащим стороны AD и CD соответственно. Найдите длину отрезка KN. (12 баллов)

8. Найдите угол между касательными к графику функции $y = x^2\sqrt{3}/24$, проходящими через точку $M\left(4;-2\sqrt{3}\right)$. (12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых уравнение $(x-a)^2 = \dfrac{x}{|x|} + a + 1$

имеет хотя бы одно решение, и решите его при каждом a. (12 баллов)

10. Расстояние между диагональю прямоугольного параллелепипеда и не пересекающей ее диагональю основания равно $\boldsymbol{l}$, а диагональ параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом 30°. Плоскость, проходящая через диагональ параллелепипеда и параллельная диагонали основания, образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью. (12 баллов)

Ответы. 1. 8 и 10 ч. **2.** 6 или 11. **3.** $x = 1/4$. **4.** $x \in \{\pi/2; 3\pi/4; \pi; 2\pi/3\}$. **5.** $x \in [1;\ 2) \cup (2;\ 5] \cup (10;\ \infty)$. **6.** $E_f = \left[-1; \sqrt{3}\right]$. **7.** $\sqrt{39}$. **8.** 90°. **9.** Ответ: при $a \in (-1;0] \cup [1;2]$ $x = a + \sqrt{a+2}$; при $(0;1)$ $x_1 = a + \sqrt{a+2},\ x_2 = a - \sqrt{a}$; при $a \in (2;+\infty)$ $x_{1,2} = a \pm \sqrt{a+2}$. **10.** $S = 4\sqrt{6}l^2$.

Вариант № 3

1. Партию обуви, купленную за 180 тыс. рублей, в первую неделю продавали по цене, большей закупочной на 25%, затем наценка была снижена до 16% от закупочной цены; а вся партия обуви была продана на 20% дороже, чем куплена. На какую сумму продали обуви в первую неделю? (8 баллов)

2. Решите уравнение $|\cos x| + \sin 2x = 0$. (8 баллов)

3. Какое наибольшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии 100, 97, 94,…? (8 баллов)

4. Решите уравнение $\left(\log_3 x\right) \cdot \log_4 \left(x/3\right) = \log_2 3$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x}+4}{1-\sqrt{x}} \geq \dfrac{2\sqrt{x}+13}{x-5\sqrt{x}+4}$. (10 баллов)

6. Функция $f(x) = c/(x-c)$ определена на отрезке $[1;3]$. Найдите все значения c, при которых наименьшее значение функции на этом отрезке меньше $-0,25$. (10 баллов)

7. Площадь треугольника ABC равна $49\sqrt{3}/4$, сторона $AB = 7$, угол $\angle B = 60°$. На сторонах AB, BC и AC выбраны точки K, L и M так, что $AK : KB = 2 : 5$, $BL : LC = 1 : 6$, $AM : MC = 4 : 3$. Найдите площадь круга, описанного около треугольника KLM. (12 баллов)

8. Какую наибольшую площадь может иметь фигура на плоскости xy, расположенная между прямыми $x = -3$ и $x = 1$ и ограниченная снизу осью x, а сверху – касательной к графику функции $y = x^2 + 16$ с абсциссой x_0 точки касания, лежащей в промежутке $-3 \le x_0 \le 1$? (12 баллов)

9. Укажите все значения параметра p, при которых система уравнений $y^2 - 6y + 10 = 5|x|/x$, $y + 1 - p = (x - p)^2$ имеет ровно два различных решения. Найдите эти решения. (12 баллов)

10. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида, у которой высота равна $4R/3$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через медиану основания? Найдите отношение объёмов частей, на которые секущая плоскость разбивает пирамиду в этом случае. (12 баллов)

Ответы. 1. 100 тыс. рублей. **2.** $\left\{\frac{\pi}{2} + n\pi; -\frac{\pi}{6} + k\pi \,\middle|\, n, k \in Z\right\}$. **3.** 1717. **4.** $\{1/3; 9\}$. **5.** $x \in [0;1) \cup (1;16)$. **6.** 7π. **7.** $c \in (-\infty; -1/3) \cup (3; +\infty)$. **8.** 68. **9.** $-2 < p \le 1$, $x_1 = p + \sqrt{6-p}$, $y_1 = 5$; $x_2 = p + \sqrt{2-p}$, $y_2 = 1$; $p = 2$, $x_1 = 4$, $y_1 = 5$; $x_2 = 2$, $y_2 = 1$; $2 < p < 6$, $x_{1,2} = p \pm \sqrt{6-p}$, $y_{1,2} = 5$. **10.** $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{33}} R^2$; $3:19$.

Вариант № 4

1. Два тела движутся равномерно по окружности в одну сторону. Первое тело проходит окружность на 3 с быстрее второго и догоняет второе тело каждые полторы минуты. За какое время каждое тело проходит окружность? (8 баллов)

2. Решите уравнение $\sqrt{1 - \cos x} = \sqrt{2}\cos x$. (8 баллов)

3. Решите уравнение $(\log_2 x) \cdot \log_{81}(8x) = \log_3 2$. (8 баллов)

4. Решите неравенство $\frac{6}{3^x - 1} > 3^x$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\sqrt{x^2 + 3x - 18} \le \frac{6\sqrt{x^2 + 3x - 18}}{x + 2}$.(10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x)=\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{5\sin x-3}{\sin x+1}}$.(10 баллов)

7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, его диагонали AC и BD пересекаются в точке F, причем $AF:FC=3:1,\ BF:FD=4:3$, угол $\angle AFD=\arcsin\left(\sqrt{15}/4\right)$. Найдите радиус вписанной в треугольник CFD окружности, если $BD=3{,}5$. (12 баллов)

8. На плоскости xOy прямые $y=3x-2$ и $x=-1$ пересекаются в точке B, а прямая, проходящая через начало координат, пересекает заданные прямые соответственно в точках A и C. При каком положительном значении абсциссы точки A площадь треугольника ABC будет наименьшей? Найдите эту площадь. (12 баллов)

9. Найдите все значения *a*, при которых система уравнений

$(x-a)^2=9(y-x+a-2),\quad \frac{1-\log_2 y}{1-\log_2 x}=1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (12 баллов)

10. Найдите площадь сечения правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, параллельной диагонали BC_1 боковой грани BCC_1B_1 и проходящей через центр описанного около призмы шара и вершину основания A, если стороны основания призмы равны 3, а высота призмы равна $10/3$. (12 баллов)

Ответы. 1. 15 с и 18 с. **2.** $x=\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi,\ n\in Z$. **3.** $\{1/16;2\}$. **4.** $0<x<1$.

5. $x\in\{-6\}\cup[3;4]$. **6.** $E(y)=[0{,}1;+\infty)$. **7.** $\sqrt{15}/12$. **8.** 1; $S_{\min}=4$.

9. $a\in(2;3)\cup(6;11)\cup(11;+\infty),\ x=y=a\pm3\sqrt{a-2}$; $a\in[3;6]\cup\{11\},\ x=y=a+3\sqrt{a-2}$.

10. $19\sqrt{3}/5$

Вариант № 5

1. Двое рабочих одновременно приступили к изготовлению одинаковых партий деталей. Когда первый рабочий сделал половину деталей, второму оставалось изготовить 24 детали, а когда второй выполнил половину работы, первому оставалось сделать 15 деталей. Сколько деталей осталось изготовить второму рабочему, когда первый выполнил свою работу? (8 баллов)

2. Решите уравнение $\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{2}\sin x=0$. (8 баллов)

3. Решите уравнение $\log_4(10x+46)=1+\log_2(2-x)$. (8 баллов)

4. Решите неравенство $\log_x(4x-3)>2$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $(x-2)\sqrt{6-x-x^2}\geq(2-3x)\sqrt{6-x-x^2}$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x)=\sin\left(\sqrt{\pi^2-x^2}-\dfrac{\pi}{3}\right)$. (10 баллов)

7. Какой наибольший угол может быть между гипотенузой прямоугольного треугольника и медианой, проведенной из острого угла? (12 баллов)

8. Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка $M(0;1)$, а его катеты лежат на прямых $x=-2$ и $y=0$. (12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений $(x-a)^2=8(y-x+a-2)$, $\dfrac{1-\log_2 y}{1-\log_2 x}=1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (12 баллов)

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны $2\sqrt{14}$, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA. Найдите объемы частей, на которые делит пирамиду плоскость, проходящая через середины стороны основания AC и бокового ребра TB и параллельная медиане TD боковой грани ATB, если расстояние от вершины пирамиды T до секущей плоскости равно 1. (12 баллов)

Ответы: **1.** 8 деталей. **2.** $x_1=\pi+2n\pi,\ x_2=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\ n, k\in Z$. **3.** $x=-1$.
4. $x\in(3/4;1)\cup(1;3)$. **5.** $x\in\{-3\}\cup[1;2]$. **6.** $\left[-\sqrt{3}/2;1\right]$. **7.** $\arcsin(1/3)$. **8.** 4 ед^2.
9. $a\in(2;4)\cup(4;10)\cup(10;+\infty)$, $x=y=a\pm\sqrt{8a-16}$; $a=4,\ x=8,\ y=8$; $a=10,\ x=18,\ y=18$. **10.** 14.

Вариант № 6

1. Из пункта *A* в пункт *B* вышел один пешеход, и с некоторым опозданием – второй. Когда первый прошёл половину пути, второй прошел 15 *км*, а когда второй прошёл половину пути, первый прошел 24 *км*. В пункт *B* пешеходы пришли одновременно. Чему равно расстояние между пунктами *A* и *B*? (8 баллов)

2. Какое наибольшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии 100, 97, 94,…? (8 баллов)

3. Решите уравнение $5\cdot 2^{2x+1}-21\cdot 10^x-2\cdot 5^{2x+1}=0$. (8 баллов)

4. Решите уравнение $\sqrt{\sin^2 3x+\cos^2 2x}=\cos x$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{\log_x(x^2-3x+3)-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}\geq 0$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x)=\log_{0,1}(25-5^x)-\lg(5^x-5)$. (10 баллов)

7. Из точки C проведена касательная к окружности радиуса $\sqrt{3/2}$ с центром в точке O, точка A является точкой касания. Отрезок CO пересекает окружность в точке B. Из точки B восстановлен перпендикуляр к прямой BC до пересечения с прямой AC в точке F. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если $BF=1$. (12 баллов)

8. Какую наименьшую площадь может иметь фигура на плоскости xy, расположенная между прямыми $x=-5$ и $x=1$ и ограниченная снизу осью x, а сверху – касательной к графику функции $y=7-6x-x^2$ с абсциссой x_0 точки касания, лежащей в промежутке $-5\leq x_0\leq 1$? (12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$x-4=a(y-2),\quad \dfrac{2x}{|y|+y}=\sqrt{x}$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (12 баллов)

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны 4, а высота пирамиды, равная 1, совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной медиане основания AD, пересекающей ребро AB в точке M, так что $MB=2AM$, и проходящей через центр сферы, описанной около пирамиды. (12 баллов)

Ответы: 1. 40 км. **2.** 1717. **3.** -1. **4.** $x=2\pi n$, $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$, $x=\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$.

5. $x\in(0;1)\cup(1;2)\cup[3;+\infty)$. **6.** $E(y)=[-2;+\infty)$. **7.** $\sqrt{15}$. **8.** 90 кв. ед..

9. $a\in(-\infty;0)\cup\{4\}$, $x_1=0,\ y_1=2-4/a$; $x_2=4,\ y_2=2$; $a\in[0;2]$, $x=4,\ y=2$;

$a\in(2;4)\cup(4;+\infty)$, $x_1=0,\ y_1=2-4/a$; $x_2=4,\ y_2=2$; $x_3=(a-2)^2$, $y_3=a-2$.

10. $11\sqrt{3}/9$