ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО (ОЧНОГО) ЭТАПА ОЛИМПИАДЫ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА «ШАГ В БУДУЩЕЕ» ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ 8-10 КЛАССОВ 2013-2014 УЧЕБНОГО ГОДА.

ВАРИАНТ 1 (9 класс)

1. Последовательность строится по следующему закону. На первом месте стоит число 7, далее за каждым числом стоит сумма цифр его квадрата, увеличенная на 1. Какое число стоит на 2014 месте?

2. Дан параллелограмм *OACB*. Проведена прямая, отсекающая пятую часть стороны *OA* и четверть стороны *OB*, считая от вершины *O*. Какую часть эта прямая отсекает от диагонали *OC*?

3. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{\frac{(x-\sin^2 48^\circ-\cos^2 48^\circ)\left(x+2\cos 120^\circ\right)}{-x-2\sqrt{2}\cdot\sin 135^\circ}}.$$

4. Вторая машина догоняет первую, которая в начальный момент находится на некотором расстоянии *S*. Время, за которое вторая машина догонит первую на 1,5 часа больше времени, за которое первая машина может пройти путь *S*, и на 2 часа больше времени, за которое вторая машина может пройти этот путь. Найти время, за которое вторая машина догонит первую?

5. График квадратичной функции $y=x^2-2(b+2)x+b^2+3$ с вершиной в точке A пересекает ось OX в точках C и B, причем площадь треугольника ABC равна 125. Найдите *b*.

6. Найдите натуральное число, квадрат которого равен числу $\underbrace{11...1}_{1580}\underbrace{55...5}_{1580}+1$.

7. Решите уравнение $2\sqrt{x-1}+5x=\sqrt{(x^2+4)\cdot(x+24)}$.

8. Две окружности радиусов 8 и 5 пересекаются в точке *A*. Отрезок, соединяющий центры окружностей, равен 10, и пересекает большую окружность в точке *B*, меньшую окружность - в точке *C*. Найдите длину хорды большей окружности, проходящую через точки *A* и *B*, и длину хорды меньшей окружности, проходящую через точки *A* и *C*.

Задание	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Итого**

Баллы	10	10	10	10	12	16	16	16	**100**

ВАРИАНТ 2 (9 класс)

1. Последовательность строится по следующему закону. На первом месте стоит число 5, далее за каждым числом стоит сумма цифр его квадрата, уменьшенная на 1. Какое число стоит на 2014 месте?

2. Дан параллелограмм *OACB*. Проведена прямая, отсекающая седьмую часть стороны *OA* и треть стороны *OB*, считая от вершины *O*. Какую часть эта прямая отсекает от диагонали *OC*?

3. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{\frac{-\operatorname{tg}135^\circ\cdot x^2+8\sin 150^\circ\cdot x+4\sin^2 36^\circ+4\cos^2 36^\circ}{(x+\sin 90^\circ)}}.$$

4. Второй велосипедист догоняет первого, находящегося от него в начальный момент на некотором расстоянии *S*. Время, за которое второй велосипедист догонит первого на 1 минуту больше, чем время, затрачиваемое вторым на прохождение пути *S*, и на 8 минут меньше, чем время, за которое первый может проехать этот путь. Сколько времени требуется второму на прохождение пути *S*?

5. График квадратичной функции $y=x^2-2(b+3)x+b^2+5$ с вершиной в точке *K* пересекает ось *OX* в точках *M* и *N*, причем площадь треугольника *KMN* равна 64. Найдите *b*.

6. Найдите натуральное число, квадрат которого равен числу $\underbrace{44\ldots4}_{1580}\underbrace{88\ldots8}_{1580}+1$.

7. Решите уравнение $2\sqrt{x-2}+6x=\sqrt{\left(x^2+4\right)\cdot\left(x+34\right)}$.

8. Две окружности радиусов 5 и 3 пересекаются в точке *A*. Отрезок, соединяющий центры окружностей, равен 6, и пересекает большую окружность в точке *B*, меньшую окружность - в точке *C*. Найдите длину хорды большей окружности, проходящую через точки *A* и *B*, и длину хорды меньшей окружности, проходящую через точки *A* и *C*.

Задание	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Итого**

Баллы	10	10	10	10	12	16	16	16	**100**

Критерии оценивания заданий олимпиады 9 класс:

Для заданий 1-4

$+$ - 10 баллов - полное обоснованное решение задачи.

$\pm$ - 8 баллов - арифметическая ошибка в конце решения задачи; ошибка при выписывании ответа.

$\frac{1}{2}$ - 6 баллов - получены существенные промежуточные результаты.

$\mp$ - 2 балла - получены некоторые промежуточные результаты; арифметическая ошибка допущена вначале решения, которая, при правильном ходе решения задачи, возможно, привела к неверному ответу.

$-$ - 0 баллов- решение задачи неверно.

«нет» - решение задачи отсутствует.

Аналогично, для задания 5

$+$ - 12 баллов

$\pm$ - 9 баллов

$\frac{1}{2}$ - 6 баллов

$\mp$ - 3 балла

Аналогично, для заданий 6-8

$+$ - 16 баллов

$\pm$ - 12 баллов

$\frac{1}{2}$ - 8 баллов

$\mp$ - 4 балла

Решение задач (9 класс)

1а. Последовательность строится по следующему закону. На первом месте стоит число 7, далее за каждым числом стоит сумма цифр его квадрата, увеличенная на 1. Какое число стоит на 2014 месте?

Решение. Вычислим несколько первых членов последовательности: 7; 14; 17; 20; 5; 8; 11; 5; … — число 5 повторилось. Значит, у последовательности есть период длины 3: числа 5; 8; 11 далее будут повторяться. На пятом месте — пятерка, тогда для любого $k > 0$ на $(3k + 2)$-м месте также будет пятерка, на 3к+3 или на 3к-м (к>1) месте - будет 8, а на 3к+1-м (k>1) месте будет стоять 11. Так как $2014 = 3 \times 671 + 1$, то 2014-м месте стоит число 11. Ответ: 11.

1б. Последовательность строится по следующему закону. На первом месте стоит число 5, далее за каждым числом стоит сумма цифр его квадрата, уменьшенная на 1. Какое число стоит на 2014 месте?

Решение. Вычислим несколько первых членов последовательности: 5; 6; 8; 9; 8; 9; 8; … — число 8 повторилось. Значит, у последовательности есть период длины 2: числа 8; 9 далее будут повторяться. На третьем месте — восьмерка, тогда для любого $k > 0$ на $(2k + 1)$-м месте также будет восьмерка, на 2к+2 или на 2к - м, (к>1) месте - будет стоять 9. Так как $2014 = 2 \times 1007$, то 2014-м месте стоит число 9. Ответ: 9.

2а Дан параллелограмм *OACB*. Проведена прямая, отсекающая пятую часть стороны *OA* и четверть стороны *OB*, считая от вершины *O*. Какую часть эта прямая отсекает от диагонали *OC*?

Решение.

Через все точки деления на стороне *OA* и точку *A* проведем пять параллельных прямых, затем разделим сторону *AC* на четыре равные части и проведем еще три прямые. Диагонали *OC* разделится этими прямыми на 9 равных частей. Ответ: 1/9.

2б. Дан параллелограмм *OACB*. Проведена прямая, отсекающая седьмую часть стороны *OA* и треть стороны *OB*, считая от вершины *O*. Какую часть эта прямая отсекает от диагонали *OC*?

Решение.

Через все точки деления на стороне *OA* и точку *A* проведем семь параллельных прямых, затем разделим сторону *AC* на три равные части и проведем еще две прямые. Диагонали *OC* разделится этими прямыми на 10 равных частей. Ответ: 1/10.

3а. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{\frac{(x-\sin^2 48^\circ-\cos^2 48^\circ)\left(x+2\cos 120^\circ\right)}{-x-2\sqrt{2}\cdot\sin 135^\circ}}.$$

Решение. $\frac{(x-\sin^2 48^\circ-\cos^2 48^\circ)\left(x+2\cos 120^\circ\right)}{-x-2\sqrt{2}\cdot\sin 135^\circ}\geq 0\Leftrightarrow\frac{(x-1)^2}{-x-2}\geq 0$

Ответ: $(-\infty;-2)\cup\{1\}$.

3б. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{\frac{-\operatorname{tg}135^\circ\cdot x^2+8\sin 150^\circ\cdot x+4\sin^2 36^\circ+4\cos^2 36^\circ}{(x+\sin 90^\circ)}}.$$

Решение.

$$\frac{-\operatorname{tg}135^\circ\cdot x^2+8\sin 150^\circ\cdot x+4\sin^2 36^\circ+4\cos^2 36^\circ}{(x+\sin 90^\circ)}\geq 0\Leftrightarrow\frac{(x+2)^2}{x+1}\geq 0$$

Ответ: $(-1;+\infty)\cup\{-2\}$

4а. Вторая машина догоняет первую, которая в начальный момент находится на некотором расстоянии S. Время, за которое вторая машина догонит первую на 1,5 часа больше времени, за которое первая машина может пройти путь S, и на 2 часа больше времени, за которое вторая машина может пройти этот путь. Найти время, за которое вторая машина догонит первую?

Решение. x – скор 1 маш; y-скор 2 маш; $\frac{S}{y-x}>\frac{S}{x}$ на 1,5 ч; $\frac{S}{y-x}>\frac{S}{y}$ на 2 ч; $\frac{S}{y-x}=?$

$$\begin{cases}\frac{S}{y-x}-\frac{S}{x}=\frac{3}{2}\\ \frac{S}{y-x}-\frac{S}{y}=2;\end{cases}\quad\begin{cases}\frac{Sx-Sy+Sx}{x(y-x)}=\frac{3}{2}\\ \frac{Sy-Sy+Sx}{y(y-x)}=2;\end{cases}\quad\begin{cases}\frac{(2x-y)S}{x(y-x)}=\frac{3}{2}\\ \frac{Sx}{(y-x)y}=2;\end{cases}\quad\frac{(2x-y)\cdot(y-x)yS}{x(y-x)x}=\frac{3}{4};\ \frac{(2x-y)y}{x^2}=\frac{3}{4};$$

$3x^2-8xy+4y^2=0;\ x=\frac{4y\pm 2y}{3};\ x=\frac{2y}{3}$ или $x=3y-$ не подходит; S = y; $\frac{S}{y-x}=3$

Ответ: 3 ч

4б. Второй велосипедист догоняет первого, находящегося от него в начальный момент на некотором расстоянии S. Время, за которое второй велосипедист догонит первого на 1 минуту больше, чем время, затрачиваемое вторым на прохождение пути S, и на 8 минут меньше,

чем время, за которое первый может проехать этот путь. Сколько времени требуется второму на прохождение пути S?

Решение. x – скор 1-го; y-скор 2-го; $\frac{S}{y-x} > \frac{S}{y}$ на 1 мин; $\frac{S}{y-x} < \frac{S}{x}$ на 8 мин; $\frac{S}{y} = ?$

$$\begin{cases} \frac{S}{y-x} - \frac{S}{y} = 1, \\ \frac{S}{x} - \frac{S}{y-x} = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{Sy-Sy+Sx}{(y-x)y} = 1, \\ \frac{Sy-Sx-Sx}{(y-x)x} = 8; \end{cases} \quad \frac{S(y-2x)\cdot y(y-x)}{x(y-x)Sx} = 8;\ 8x^2 + 2xy - y^2 = 0;\ x = \frac{-y \pm 3y}{8};$$

$x = \frac{y}{4}$; $x = -\frac{y}{2}$ не подходит; $S = 3y$; $\frac{S}{y} = 3$. Ответ: 3 мин

5а. График квадратичной функции $y = x^2 - 2(b+2)x + b^2 + 3$ с вершиной в точке A пересекает ось OX в точках C и B, причем площадь треугольника ABC равна 125. Найдите b.

Решение. Высота треугольника ABC равна $y_в = \frac{-D}{4}$, основание $CB = x_2 - x_1 = \sqrt{D}$. Значит, площадь треугольника ABC равна $S = -\frac{D\sqrt{D}}{8}$.

$D = 4(b+2)^2 - 4(b^2+3) = 16b + 4$. Имеем $\frac{\sqrt{(16b+4)^3}}{8} = 125$, откуда $b = 6$.

Ответ: 6.

5б. График квадратичной функции $y = x^2 - 2(b+3)x + b^2 + 5$ с вершиной в точке K пересекает ось OX в точках M и N, причем площадь треугольника KMN равна 64. Найдите b.

Решение. Высота треугольника ABC равна $y_в = \frac{-D}{4}$, основание $CB = x_2 - x_1 = \sqrt{D}$. Значит, площадь треугольника ABC равна $S = -\frac{D\sqrt{D}}{8}$.

$D = 4(b+3)^2 - 4(b^2+5) = 24b + 16$. Имеем $\frac{\sqrt{(24b+16)^3}}{8} = 64$, откуда $b = 2$. Ответ: 2.

6а. Найдите натуральное число, квадрат которого равен числу $\underbrace{11\ldots1}_{1580}\underbrace{55\ldots5}_{1580} + 1$.

Решение. Выполним несколько преобразований и получим ответ.

$\underbrace{111\ldots1}_{n}\underbrace{55\ldots5}_{n} + 1 = \underbrace{111\ldots1}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{n} + 5\underbrace{11\ldots1}_{n} + 1 =$

$$= \underbrace{111\ldots1}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{n} - \underbrace{111\ldots1}_{n} + 6\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n} + 1 =$$

$$= \underbrace{11\ldots1}_{n}\cdot(10^n - 1) + 6\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n} + 1 = \left(\underbrace{33\ldots3}_{n}\right)^2 + 2\left(\underbrace{33\ldots3}_{n}\right) + 1 =$$

$$= \left(\underbrace{33\ldots3}_{n} + 1\right)^2$$

Ответ: $\underbrace{33\ldots3}_{1579}4$.

6б. Найдите натуральное число, квадрат которого равен числу $\underbrace{44\ldots4}_{1580}\underbrace{88\ldots8}_{1580} + 1$.

Решение. Выполним несколько преобразований и получим ответ.

$$\underbrace{444\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n} + 1 = 4\cdot\underbrace{111\ldots1}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{n} + 8\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n} + 1 =$$

$$= 4\cdot\underbrace{111\ldots1}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{n} + 12\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n} - 4\cdot\underbrace{111\ldots1}_{n} + 1 =$$

$$= 4\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n}\cdot(10^n - 1) + 12\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n} + 1 = \left(\underbrace{66\ldots6}_{n}\right)^2 + 2\left(\underbrace{66\ldots6}_{n}\right) + 1 =$$

$$= \left(\underbrace{66\ldots6}_{n} + 1\right)^2$$

Ответ: $\underbrace{66\ldots6}_{1579}7$.

7а. Решите уравнение $2\sqrt{x-1} + 5x = \sqrt{(x^2+4)\cdot(x+24)}$

Решение: Введем векторы:

$\overline{m} = (2; x)$; $\overline{n} = \left(\sqrt{x-1}; 5\right)$,

Тогда $|\overline{m}\cdot\overline{n}| = 2\sqrt{x-1} + 5x \le |\overline{m}|\cdot|\overline{n}| = \sqrt{(x^2+4)(x+24)}$

Так как равенство возможно лишь для коллинеарных векторов, то имеем уравнение

$\frac{\sqrt{x-1}}{2} = \frac{5}{x}$; $x = 5$. Ответ: 5

7б. Решите уравнение $2\sqrt{x-2} + 6x = \sqrt{(x^2+4)\cdot(x+34)}$

Решение: Введем векторы:

$\overline{m} = (2; x)$; $\overline{n} = \left(\sqrt{x-2}; 6\right)$, Тогда

$|\overline{m}\cdot\overline{n}| = 2\sqrt{x-2} + 6x \le |\overline{m}|\cdot|\overline{n}| = \sqrt{(x^2+4)(x+34)}$. Так как равенство возможно лишь для коллинеарных векторов, то имеем уравнение

$\frac{\sqrt{x-2}}{2} = \frac{6}{x}$; $x = 6$. Ответ: 6.

8а. Две окружности радиусов 8 и 5 пересекаются в точке *A*. Отрезок, соединяющий центры окружностей, равен 10, и пересекает большую окружность в точке *B*, меньшую окружность - в точке *C*. Найдите длину хорды большей окружности, проходящую через точки *A* и *B*, и длину хорды меньшей окружности, проходящую через точки *A* и *C*.

Решение. Сначала найдем длину отрезка AC. $O_1C = O_1O_2 - O_2C = 10 - 5 = 5$, следовательно, $BC = 3$, $O_1C = CO_2$ и отрезок AC является медианой треугольника O_1AO_2. По формуле для вычисления медианы $AC = \frac{\sqrt{78}}{2}$.

Треугольник ACO_2 равнобедренный, $AO_2 = O_2C = 5$, найдем $\cos\angle C = \frac{AC}{2 \cdot CO_2} = \frac{\sqrt{78}}{20}$. По теореме косинусов для треугольника ABC найдем $AB = \frac{2\sqrt{105}}{5}$.

Ответ: $AC = \frac{\sqrt{78}}{2}$, $AB = \frac{2\sqrt{105}}{5}$.

8б. Две окружности радиусов 5 и 3 пересекаются в точке A. Отрезок, соединяющий центры окружностей, равен 6, и пересекает большую окружность в точке B, меньшую окружность - в точке C. Найдите длину хорды большей окружности, проходящую через точки A и B, и длину хорды меньшей окружности, проходящую через точки A и C.

Решение аналогично решению 8а. Ответ: $AC = 2\sqrt{2}$, $AB = 2\sqrt{\frac{5}{3}}$.