МГТУ им. Н.Э.Баумана
Олимпиада школьников «Шаг в будущее»
9 класс, 1 тур 2013-2014 учебного года.

Задача 1.Вычислите без помощи калькулятора $\sqrt{2007\cdot 2009\cdot 2011\cdot 2013+16}$.
Задача 2.Остаток от деления числа a на 6 и 7 равен 2 и 3, соответственно. Найдите остаток от деления числа a на 42.
Задача 3. Из пункта по одному шоссе выезжают одновременно 2 автомобиля, а через час вслед за ними выезжает третий. Еще через час расстояние между третьим и первым автомобилем уменьшилось в два раза, а между третьим и вторым - в три раза. Во сколько раз скорость первого автомобиля больше скорости второго? (Известно, что третий автомобиль не обогнал первых двух.)
Задача 4. В треугольник, две из трёх сторон которого равны 9 и 15, вписан параллелограмм так, что одна из его сторон, равная 6, лежит на третьей стороне треугольника, а диагонали параллелограмма параллельны двум данным сторонам треугольника. Найдите другую сторону параллелограмма и третью сторону треугольника.
Задача 5. Известно, что прямая l проходит через точку с координатами $(2;1)$, и площадь треугольника, ограниченного прямой l, прямой $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ и осью OX равна 4. Найдите уравнение прямой l.
Задача 6. Действительные числа x, y, a таковы, что $x+y=a+1$ и $xy=a^2-7a+16$. При каком значении параметра a сумма x^2+y^2 принимает наибольшее значение?

Решения заданий 9-го класса

Задача 1. Вычислите без помощи калькулятора $\sqrt{2007\cdot 2009\cdot 2011\cdot 2013+16}$.

Решение. Пусть 2010=a, тогда

$$\sqrt{2007\cdot 2009\cdot 2011\cdot 2013+16}=$$
$$\sqrt{(a-3)(a-1)(a+1)(a-3)+16}=\sqrt{(a^2-9)(a^2-1)+16}=\sqrt{a^4-10a^2+25}=$$
$$\sqrt{(a^2-5)^2}=\left|a^2-5\right|=\left|2010^2-5\right|=4040095.$$

Ответ: 4040095.

Задача 2.Остаток от деления числа a на 6 и 7 равен 2 и 3, соответственно. Найдите остаток от деления числа a на 42.

Решение. Пусть x - наименьшее натуральное число такое, что $a+x$ делится на 6 и на 7. Тогда $\begin{cases} a = 6q + 2 \\ a = 7m + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + x = 6q + 2 + x \\ a + x = 7m + 3 + x \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$.

Так как числа 6 и 7 взаимно просты, то $a+x$ делится на 42, то есть $a + x = 42k \Leftrightarrow a = 42k - x = 42k - 4 = 42k - 42 + 38 = 42(k-1) + 38$.

Получаем, что остаток от деления числа a на 42 равен 38.

Ответ: 38.

$S_{13}(t)$

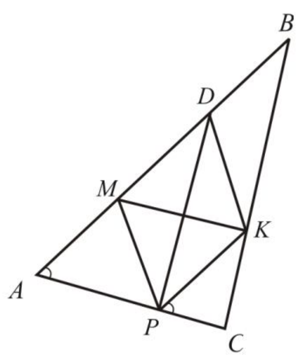
$S_{12}(t)$ $S_{13}(1) = x$

$S_{12}(1) = y$ $S_{13}(2) = 2x - z$ $S_{12}(2) = 2y - z$ $S_{13}(1) = 2S_{13}(2)$

$S_{12}(1) = 3S_{12}(2)$ $x = 2(2x - z)$ $y = 3(2y - z)$ $x = \frac{2}{3}z$ $y = \frac{3}{5}z$

$\frac{x}{y} = \frac{10}{9}$

Задача 4. В треугольник, две из трёх сторон которого равны 9 и 15, вписан параллелограмм так, что одна из его сторон, равная 6, лежит на третьей стороне треугольника, а диагонали параллелограмма параллельны двум данным сторонам треугольника.



Найдите другую сторону параллелограмма и третью сторону треугольника.

Решение. Пусть в треугольнике ABC сторона BC=15, сторона AC=9, сторона MD=6 параллелограмма $PMDK$ лежит на стороне AB треугольника, диагональ DP параллелограмма параллельна стороне BC треугольника ABC, а диагональ MK - стороне AC. Тогда MD=PK=6, четырехугольники $AMKP$ и $DBKP$ являются параллелограммами, значит, AM=PK=6 и DB=PK=6. Имеем AB=18.

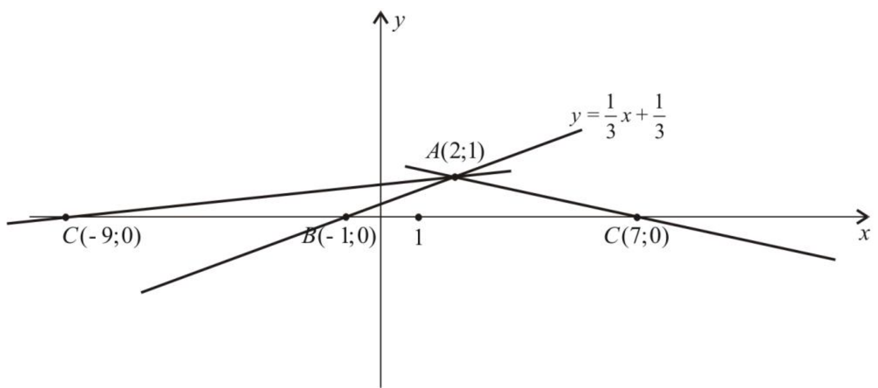
Треугольники CKP и ABC подобны по двум углам (угол C – общий, углы BAC и KPC равны как соответственные углы при параллельных прямых AB, PK и секущей AC). Значит, $\frac{KC}{BC}=\frac{PK}{AB}$, откуда $KC=\frac{PK}{AB}\cdot BC=\frac{6}{18}\cdot 15=5$ и $\frac{PC}{AC}=\frac{PK}{AB}$ откуда $PC=\frac{PK}{AB}\cdot AC=\frac{6}{18}\cdot 9=3$ и AP=AC-PC=9-3=6.

Из треугольника CPK по теореме косинусов имеем $\cos\angle KPC=\frac{PK^2+PC^2-KC^2}{2\cdot PK\cdot PC}=\frac{5}{9}$. Из треугольника PAM по теореме косинусов имеем $MP^2=AP^2+AM^2-2AP\cdot AM\cdot\cos\angle MAP=36+36-2\cdot 6\cdot 6\cdot\frac{5}{9}=32$, значит, $MP=4\sqrt{2}$.

Ответ: 18, $4\sqrt{2}$.

Задача 5. Известно, что прямая l проходит через точку с координатами $(2;1)$, и площадь треугольника, ограниченного прямой l, прямой $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ и осью OX равна 4. Найдите уравнение прямой l.

Решение.



Пусть $A(2;1)$, прямая l пересекает ось OX в точке $C(x;0)$. Найдем координаты точки пересечения прямой $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ с осью OX: B(-1;0). Тогда треугольником, ограниченным на плоскости прямой l, прямой $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ и осью OX является треугольник ABC с высотой, проведенной к основанию BC, равной 1. Значит, $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot BC$, откуда BC=8, следовательно, C(7;0) или C(-9;0). Соответственно, получаем два уравнения прямой l: $y=-\frac{1}{5}x+\frac{7}{5}$, $y=\frac{1}{11}x+\frac{9}{11}$.

Ответ: $y=-\frac{1}{5}x+\frac{7}{5}$, $y=\frac{1}{11}x+\frac{9}{11}$.

Задача 6. Действительные числа x, y, a таковы, что $x+y=a+1$ и $xy=a^2-7a+16$. При каком значении параметра a сумма x^2+y^2 принимает наибольшее значение?

Решение. Выразим x^2+y^2 через $x+y$ и xy:

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(a+1)^2-2\left(a^2-7a+16\right)=$$

$$=-a^2+16a-31=-(a-8)^2+33.$$

Полученное выражение, очевидно, принимает свое наибольшее значение при $a=8$.

Для ответа на вопрос задачи необходимо ещё учесть условие существования действительных чисел x и y, удовлетворяющих двум данным в условии уравнениям. Решая систему данных уравнений, например, относительно x, приходим к квадратному уравнению $x^2-(a+1)x+a^2-7a+16=0$.

Требование неотрицательности его дискриминанта приводит к ограничениям на значения параметра a:

$(a+1)^2 - 4\left(a^2 - 7a + 16\right) \geq 0$, или $-3a^2 + 30a - 63 \geq 0$, отсюда $3 \leq a \leq 7$.

На промежутке [3; 7] функция $f(a) = -(a-8)^2 + 33$ возрастает, и поэтому её наибольшее значение достигается при $a = 7$.

Ответ: 7.

Критерии проверки заданий 9-го класса

Задача 1.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	Получен правильный ответ без указания модуля буквенного выражения при извлечении корня из полного квадрата.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 2.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	Правильный ответ недостаточно обоснован, например, получено разложение числа $a/42$ без выделения целой части в явном виде.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 3.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	Соотношения для расстояний составлены верно, решение содержит арифметическую ошибку.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 4.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	Решение содержит арифметическую ошибку или найдено только значение AB.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 5.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
15	Рассмотрен только один из двух возможных случаев.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 6.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	Решение не учитывает условие существования действительных чисел x и y, удовлетворяющих двум данным в условии уравнениям.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.