МГТУ им. Н.Э.Баумана
Олимпиада школьников «Шаг в будущее»
8 класс, 1 тур 2013-2014 учебного года.

Задача 1. Сравнить числа $\dfrac{29^{1563}+1}{29^{1564}+1}$ и $\dfrac{29^{1564}+1}{29^{1565}+1}$.

Задача 2. Сумма положительных чисел $a+b+c=1580$. Вычислите значение суммы $\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{c+b}$, если $\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{a}{b+c}=76$.

Задача 3. В школе 400 учащихся ежедневно покупают завтрак, стоимость которого 30 рублей. Если столовая поднимет цену на завтрак, то повышение на каждые 5 рублей приведет к тому, что 10 школьников начнут носить завтрак из дома. Если, однако, цена станет выше 100 рублей, то никто из учащихся не будет завтракать в столовой. Когда цена была поднята, столовая получила за день на 3200 рублей больше, чем обычно. Сколько школьников перестали покупать завтрак в столовой?

Задача 4. Решите в целых числах уравнение $x^3-y-2013=yx^2+x$.

Задача 5. Известно, что прямая l проходит через точку с координатами $(2;1)$ и площадь треугольника, ограниченного на плоскости прямой *l*, прямой $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$ и осью *OX* равна 4. Найдите уравнение прямой *l*.

Задача 6. На сторонах *AB* и *CB* произвольного треугольника *ABC* построили произвольные параллелограммы *ABQG* и *CBEF* так, что прямые *GQ* и *EF* пересекаются в точке *X*. Докажите, что сумма площадей этих параллелограммов равна площади параллелограмма, одна сторона которого совпадает с отрезком *AC*, а другая параллельна и равна отрезку *BX*.

Решения и критерии проверки заданий заочного тура олимпиады школьников «Шаг в будущее» МГТУ им. Н. Э. Баумана для 8-10 классов 2013-2014 учебного года

Решения заданий 8-го класса

Задача 1. Сравните числа $\dfrac{29^{1563}+1}{29^{1564}+1}$ и $\dfrac{29^{1564}+1}{29^{1565}+1}$.

Решение. $\dfrac{29^{1563}+1}{29^{1564}+1}>\dfrac{29^{1564}+1}{29^{1565}+1}\Leftrightarrow 1+29^2>2\cdot 29\Leftrightarrow 28^2>0$.

Ответ: первое число больше.

Задача 2. Сумма положительных чисел $a+b+c=1580$. Вычислите значение суммы $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+b}$, если $\frac{c}{a+b}+\frac{b}{a+c}+\frac{a}{b+c}=76$.

Решение. $$(a+b+c)\cdot\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+b}=\frac{c}{a+b}+\frac{b}{a+c}+\frac{a}{b+c}+3.$$

Следовательно, $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+b}=\frac{79}{1580}=0{,}05$.

Ответ: 0,05.

Задача 3. В школе 400 учащихся ежедневно покупают завтрак, стоимость которого 30 рублей. Если столовая поднимет цену на завтрак, то повышение на каждые 5 рублей приведет к тому, что 10 школьников начнут носить завтрак из дома. Если, однако, цена станет выше 100 рублей, то никто из учащихся не будет завтракать в столовой. Когда цена была поднята, столовая получила за день на 3200 рублей больше, чем обычно. Сколько школьников перестали покупать завтрак в столовой?

Решение. Пусть стоимость завтрака поднялась на x рублей. Тогда перестанут покупать завтрак $2x$ школьников, а новая выручка составит $(400-2x)(x+30)$ рублей. Составим и решим уравнение:

$$(400-2x)(x+30)-12000=3200 \Leftrightarrow x^2-170x+1600=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=10 \\ x=160. \end{array}\right.$$

Корень $x=160$ не подходит (завтракать никто не будет), поэтому $x=10$, а число школьников, переставших покупать завтрак, равно 20.

Ответ: 20 школьников.

Задача 4. Решите в целых числах уравнение $x^3-y-2013=yx^2+x$.

Решение.

$$x^3+y-2013=yx^2+x \Leftrightarrow x^3+y-yx^2-x=2013 \Leftrightarrow (x-y)(x^2-1)=2013.$$

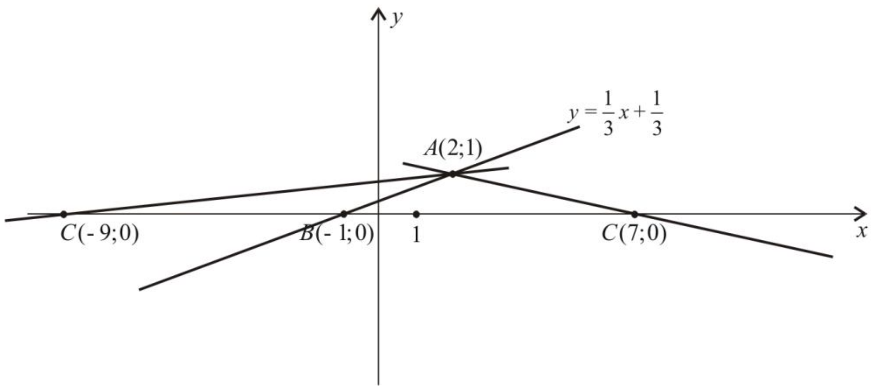
Делителями числа 2013 являются целые числа $\pm1, \pm3, \pm11, \pm61, \pm671, \pm2013$.

Из условия, что x^2-1 является делителем числа 2013 и x - целое, получаем: $x^2-1=-1$ (при этом $x-y=-2013$) или $x^2-1=3$(при этом $x-y=671$). Таким образом, решениями уравнения являются пары $(0;2013),(2;-669),(-2;-673)$.

Ответ: $(0;2013),(2;-669),(-2;-673)$.

Задача 5. Известно, что прямая l проходит через точку с координатами (2;1) и площадь треугольника, ограниченного на плоскости прямой *l*, прямой $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ и осью *OX* равна 4. Найдите уравнение прямой *l*.

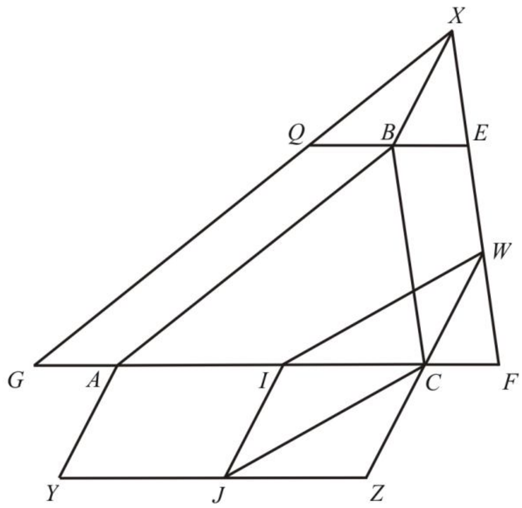
Решение. Пусть *A*(2;1), прямая *l* пересекает ось *OX* в точке *C*(*x*;0).



Найдем координаты точки пересечения прямой $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ с осью *OX*: *B*(-1;0). Тогда треугольником, ограниченным на плоскости прямой *l*, прямой $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ и осью *OX* является треугольник *ABC* с высотой, проведенной к основанию *BC*, равной 1. Значит, $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot BC$, откуда *BC*=8, следовательно, *C*(7;0) или *C*(-9;0). Соответственно, получаем два уравнения прямой l: $y=-\frac{1}{5}x+\frac{7}{5}$, $y=\frac{1}{11}x+\frac{9}{11}$.

Ответ: $y=-\frac{1}{5}x+\frac{7}{5}$, $y=\frac{1}{11}x+\frac{9}{11}$.

Задача 6. На сторонах AB и CB произвольного треугольника ABC построили произвольные параллелограммы $ABQG$ и $CBEF$ так, что прямые GQ и EF пересекаются в точке X. Докажите, что сумма площадей этих параллелограммов равна площади параллелограмма, одна сторона которого совпадает с отрезком AC, а другая параллельна и равна отрезку BX.



Решение.

1. Построим на стороне AC параллелограмм такой, что $AY=CZ=BX$ и $AY \| CZ \| BX$.

2. $BX \cap AC = I$, $BX \cap YZ = J$, $CZ \cap XF = W \Rightarrow BXWC$ - параллелограмм.

3. $S_{BXWC} = S_{IJZC}$, $S_{BXWC} = S_{BEFC}$, следовательно, $S_{BEFC} = S_{IJZC}$.

4. Аналогично доказываем, что $S_{ABQG} = S_{AIJY}$.

5. Из п. 3 и п. 4 имеем $S_{BEFC} + S_{ABQG} = S_{AYZC}$, что и требовалось доказать.

Критерии проверки заданий 8-го класса

Задача 1.

Баллы	
15	Обоснованно получен правильный ответ.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 2.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	Получена верная связь трех буквенных выражений, при вычислении допущена арифметическая ошибка.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 3.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	Уравнения составлены верно, решение содержит арифметическую ошибку.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 4.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	Получено две пары целых решений.
5	Получена только одна пара целых решений.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 5.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
15	Получен правильный ответ только в одном из двух возможных случаев.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 6.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	В решении получены существенные промежуточные результаты, необходимые для решения задачи.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.