Решение варианта №20

1. Имеется 5 кусков прозрачного стекла одинакового размера и одинаковой формы — равносторонних треугольников. Каждый треугольник отрезками, соединяющими его центр с вершинами, условно разделен на 3 одинаковые части (равнобедренные треугольники), и одна из этих частей закрашена непрозрачной краской (цвета закраски частей различных стекол различны). Затем все эти стекла укладываются друг на друга в стопку (с точным выравниванием границ и вершин по вертикали), причем закрашенными поверхностями вверх. Сколько существует различных способов укладки стекол в стопку так, чтобы вся эта стопка в итоге оказалась хотя бы частично прозрачной в вертикальном направлении. (12 баллов)

Решение. Сначала рассмотрим некоторый один фиксированный вертикальный порядок укладки стекол (снизу вверх). Ясно, что, повернув всю укладку целиком на какой-то угол, мы укладку не изменим (не получим новой укладки). Поэтому можно считать, что нижнее стекло укладки всегда зафиксировано (не поворачивается). Тогда различные укладки (с фиксированным вертикальным порядком стекол) будут отличаться друг от друга поворотом на $0°$, $120°$, и $240°$ каждого из последующих 4-х верхних стекол по отношению к фиксированному нижнему стеклу. Поэтому получим всего $3^4 = 81$ вариантов укладки с фиксированным вертикальным порядком стекол. Учитывая теперь всевозможные вертикальные перестановки пяти стекол (5! = 120 вариантов), получим общее количество возможных укладок стекол в стопку: $5!\cdot 3^4 = 120\cdot 81 = 9720$ штук. Но не все эти укладки удовлетворяют условию задачи. Условию задачи удовлетворяют все укладки, кроме тех, при которых вся стопка оказывается полностью вертикально непрозрачной. Найдем предварительно количество таких укладок.

Для этого рассмотрим столбики из равнобедренных треугольников (частей, находящихся над каждым из трех фиксированных равнобедренных треугольников нижнего стекла. Определим количество таких укладок, при которых каждый из этих четырех столбиков является непрозрачным. При этом один из этих столбиков уже заведомо непрозрачен (тот, что стоит на нижнем закрашенном равнобедренном треугольнике). Рассмотрим упорядоченный набор (вектор) из возможных углов поворота (для определенности, по часовой стрелке) закрашенных равнобедренных треугольников на каждом из 4-х верхних стекол по отношению к нижнему закрашенному равностороннему треугольнику: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, где $\alpha_k \in \{0°, 120°, 240°\}$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Все «столбики» из стеклянных равнобедренных треугольников окажутся непрозрачными, если в этом наборе углов поворота обязательно встретится хотя бы один раз угол $120°$ и обязательно встретится хотя бы один раз угол $240°$ (а вот угол $0°$ не обязан встречаться, хотя и не помешает, если встретится). Остальные два места в наборе могут занимать любые значения из трех возможных $\{0°, 120°, 240°\}$, т.е. $0°$ и $120°$, или $0°$ и $240°$, или $120°$ и $240°$, а также $0°$ и $0°$, или $120°$ и $120°$, или $240°$ и $240°$. Поэтому, чтобы посчитать общее количество таких наборов (а значит, и количество укладок с фиксированным вертикальным порядком стекол), разобьем их на следующие шесть групп:

— если двумя дополнительными значениями являются $0°$ и $120°$, то получим наборы, в которых углы поворота $0°$ и $240°$ встречаются по одному разу, а угол $120°$ встречается 2 раза, всего таких наборов (за счет перестановок) будет 6·2 = 12 штук (здесь 6 — это количество способов выбора мест в векторе для двух углов по $120°$, а 2 — количество способов перестановки углов $0°$ и $240°$ в двух оставшихся местах);

— если двумя дополнительными значениями являются $0°$ и $240°$, то получим наборы, в которых углы поворота $0°$ и $120°$ встречаются по одному разу, а угол $240°$ встречается 2 раза, аналогично предыдущему случаю, всего таких наборов (за счет перестановок) будет 6·2 = 12 штук ;

— если двумя дополнительными значениями являются 120° и 240°, то получим наборы, в которых углы поворота 120° и 240° встречаются по два раза; всего таких наборов (за счет перестановок) будет 6 · 1 = 6 штук (здесь 6 — количество способов выбора двух мест из четырех для размещения двух углов 120°, а 1 — единственный способ размещения двух углов 240° в двух оставшихся местах);

— если двумя дополнительными значениями являются 0° и 0°, то мы получим наборы, в которых углы поворота 120° и 240° встречаются по одному разу, а угол 0° встречается 2 раза, всего таких наборов (за счет перестановок) будет 6·2 = 12 штук (здесь 6 — количество способов выбора двух мест из четырех для размещения двух углов 0°, а 2 — количество способов перестановки углов 120° и 240° в двух оставшихся местах);

— если двумя дополнительными значениями являются 120° и 120°, то мы получим наборы, в которых угол поворота 240° встречается один раз, а угол 120° встречается 3 раза, всего таких наборов будет 4·1 = 4 штуки (здесь 4 — количество способов выбора одного места из четырех для размещения угла 240°, а 1 — единственный способ размещения одинаковых углов 120° в трех оставшихся местах);

— если двумя дополнительными значениями являются 240° и 240°, то мы получим наборы, в которых угол поворота 120° встречается один раз, а угол 240° встречается 3 раза, аналогично предыдущему случаю, всего таких наборов будет 4·1 = 4 штуки.

В итоге, получаем всего 12 + 12 + 6 + 12 + 4 + 4 = 50 упорядоченных наборов углов поворота, удовлетворяющих нужному условию. Это и есть общее количество укладок с фиксированным вертикальным порядком стекол, при которых итоговая стопка оказывается непрозрачной. Переставив стекла (в вертикальном направлении) 5! = 120 способами, получим общее количество 120·50 = 6000 укладок, при котором итоговая стопка оказывается непрозрачной. Наконец, вычтя из общего количества различных укладок 9720 найденное число 6000 ненужных нам укладок, окончательно получаем 9720 − 6000 = 3720 способов укладки частично прозрачной стопки из пяти стекол.

Ответ: 3720 способов.

2. Решите уравнение $\sin^4(2019x)+\cos^{2019}(2022x)\cdot\cos^{2018}(2019x)=1$. (12 баллов)

Решение:

$\sin^4 2019x+\cos^{2019}2022x\cdot\cos^{2018}2019x=1 \Leftrightarrow (1-\cos^2 2019x)^2+\cos^{2019}2022x\cdot\cos^{2018}2019x=1$

$\Leftrightarrow \cos^4 2019x-2\cos^2 2019x+\cos^{2019}2022x\cdot\cos^{2018}2019x=0 \Leftrightarrow$

$\cos^2 2019x(\cos^2 2019x+\cos^{2019}2022x\cdot\cos^{2016}2019x-2)=0 \Leftrightarrow$

1) $\cos 2019x=0$, $x=\dfrac{\pi}{4038}+\dfrac{\pi n}{2019}$, $n\in Z$ или 2) $\cos^2 2019x+\cos^{2019}2022x\cdot\cos^{2016}2019x=2 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\cos^2 2019x=1,\\ \cos^{2019}2022x\cdot\cos^{2016}2019x=1,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2019x=0,\\ \cos 2022x=1,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{\pi n}{2019}, n\in Z,\\ x=\dfrac{\pi m}{1011}, m\in Z,\end{cases}$$

$\dfrac{n}{2019}=\dfrac{m}{1011}$, $n=\dfrac{2019m}{1011}=\dfrac{673m}{337}$, $n\in Z$, $m\in Z \Rightarrow m=337k$, $x=\dfrac{\pi k}{3}$, $k\in Z$.

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{4038}+\dfrac{\pi n}{2019}$, $n\in Z$, $x=\dfrac{\pi k}{3}$, $k\in Z$.

3. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки D и E так, что площадь треугольника ADE равна $1/18$. Вписанная в четырехугольник $BDEC$ окружность касается стороны AB в точке K, причем $AK=1$. Найдите тангенс угла BAC, если около четырехугольника $BDEC$ можно описать окружность, и $BC=5$. (16 баллов)

Решение: Пусть O_1 - центр вписанной в треугольник ABC окружности, R - ее радиус, O_2 - центр вписанной в треугольник ADE окружности, r - ее радиус. Обозначим p_1 полупериметр треугольника ABC, p_2 полупериметр треугольника ADE. Тогда $AK=p_2$, $AK=p_1-BC$. Действительно, по свойствам касательных к окружности имеем (см. рис.)

$$2AK = AK + AH = AD + DK + EH + AE = AD + (DM + ME) + AE = 2p_2,$$

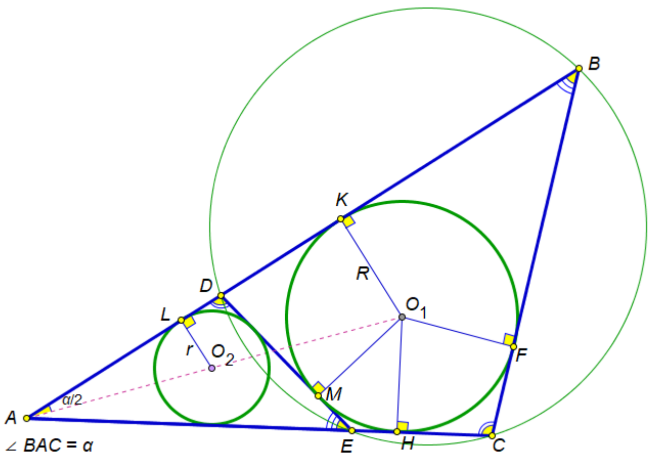
$$2AK = (AB - BK) + (AC - CH) = AB + AC + (BF + CF) - 2(BF + CF) = 2(p_1 - BC).$$

Тогда $r = S_{ADE}/p_2 = S_{ADE}/AK = 1/18$.

Поскольку около четырехугольника $BDEC$ можно описать окружность, то $\angle ABC + \angle DEC = 180°$, и $\angle AED = \angle ABC$. Следовательно, треугольники ADE и ACB подобны, и $\dfrac{r}{R}=\dfrac{p_2}{p_1}$, $R=\dfrac{r(AK+BC)}{AK}=\dfrac{1+5}{18}=\dfrac{1}{3}$.

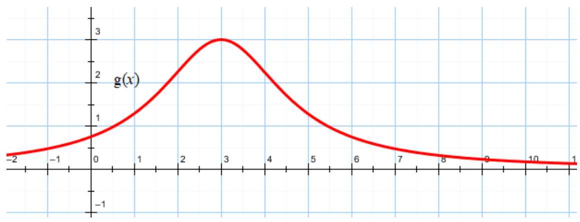
Пусть $\angle BAC=\alpha$. Тогда $\operatorname{tg}(\alpha/2)=R/AK=1/3$, и $\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}(\alpha/2)/(1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)) = 3/4$.

Ответ: $3/4$.



4. Решите неравенство $\dfrac{7}{9}g\left(\dfrac{g(x)}{3}\right)+2\sqrt{2-\dfrac{3}{g(x)}} \geq 13g(g^2(x))$, где $g(x)=\dfrac{9}{x^2-6x+12}$. (20 баллов)

Решение:



1) Функция $g(x)=\dfrac{9}{x^2-6x+12}=\dfrac{9}{(x-3)^2+3}$ определена на всей числовой оси и принимает все значения из промежутка $(0;3]$. Функция $g(x)$ достигает максимального значения в точке $x=3$, $g_{\max}=g(3)=3$, на промежутке $(-\infty;3)$ функция $g(x)$ возрастает, на промежутке $(3;+\infty)$ – убывает.

2) Функция $z=\dfrac{g(x)}{3}$ принимает все значения из промежутка $(0;1]$, причем $z=\dfrac{g(x)}{3}=1 \Leftrightarrow x=3$. Рассмотрим функцию $f(z)=\dfrac{7}{9}g(z)+2\sqrt{2-\dfrac{1}{z}}$ на промежутке $(0;1]$. Второе

слагаемое имеет смысл, если $2-\dfrac{1}{z}\ge 0$, т.е. при $z\in[1/2;1]\subset(0;1]$. Функции $\dfrac{7}{9}g(z)$ и $2\sqrt{2-\dfrac{1}{z}}$ являются возрастающими на отрезке $[1/2;1]$, и их сумма $f(z)$ также возрастает на этом отрезке, свое наибольшее значение принимает в точке 1. Итак, $f(z)\le f(1)=\dfrac{7}{9}g(1)+2\sqrt{2-1}=3,\ \ f(z)=3\Leftrightarrow z=1\Leftrightarrow x=3.$

3) Функция $g^2(x)$ принимает все значения из промежутка $(0;9]$, поскольку $t=g(x)\in(0;3]$, а функция t^2 возрастает в этом промежутке. Для нахождения множества значений функции $\varphi(x)=13g(g^2(x))$ достаточно найти множество значений функции $13g(x)$ на промежутке $(0;9]$. На указанном промежутке $13g(x)$ принимает все значения из множества $[13g(9);13g(3)]=[3;39]$. Таким образом, $3\le\varphi(x)=13g(g^2(x))$, причем $\varphi(x)=3\Leftrightarrow g(x)=3\Leftrightarrow x=3$.

4) Исходное неравенство эквивалентно $f(g(x)/3)\ge\varphi(x)$. Поскольку $f(g(x)/3)\le 3$, $\varphi(x)\ge 3$, то исходное неравенство будет справедливо только в том случае, когда $f(g(x)/3)=3$ и $\varphi(x)=3$, т. е. при $x=3$. **Ответ:** $x=3$.

5. Найдите все значения параметров *a* и *b*, при которых уравнение $2a-ab\widetilde{\mathrm{ctg}}x+2\sqrt{2(x+\left|x+b\widetilde{\mathrm{ctg}}x\right|+b\widetilde{\mathrm{ctg}}x)}=6+ax$ имеет единственное решение, если $\widetilde{\mathrm{ctg}}x=\mathrm{ctg}\,x$ при $x\ne\pi n$, и $\widetilde{\mathrm{ctg}}x=0$ при $x=\pi n,\ n\in Z$. Укажите это решение при каждом из найденных значений *a* и *b.*

Решение: $2a-ab\widetilde{\mathrm{ctg}}x+2\sqrt{2(x+\left|x+b\widetilde{\mathrm{ctg}}x\right|+b\widetilde{\mathrm{ctg}}x)}=6+ax\ \Leftrightarrow$

$2\sqrt{2(x+b\widetilde{\mathrm{ctg}}x+\left|x+b\widetilde{\mathrm{ctg}}x\right|)}=6-2a+a(x+b\widetilde{\mathrm{ctg}}x)$. Сделаем замену $y=x+b\widetilde{\mathrm{ctg}}x$. Получим уравнение $2\sqrt{2(y+|y|)}=6-2a+ay$. Пусть при некотором значении параметра *a* это уравнение имеет **единственное** решение y_0. Приходим к уравнению $y_0=x+b\widetilde{\mathrm{ctg}}x$. Если $b\ne 0$, то функция $g(x)=x+b\widetilde{\mathrm{ctg}}x=x+b\,\mathrm{ctg}\,x$ на каждом промежутке $(\pi n;\pi+\pi n),\ n\in Z,$ принимает все значения из интервала $(-\infty;+\infty)$ (на каждом из указанных промежутков функция $\phi(x)=b\,\mathrm{ctg}\,x,\ b\ne 0,$ принимает все значения, принадлежащие $(-\infty;+\infty)$, а функция $h(x)=x$ ограничена). Таким образом, уравнение $y_0=x+b\widetilde{\mathrm{ctg}}x$ при $b\ne 0$ будет иметь бесконечно много решений, что не удовлетворяет условию задачи. При $b=0$ имеем $y_0=x$, решение единственное.

Итак, $b=0$, и необходимо выяснить, при каких *a* уравнение $2\sqrt{2(x+|x|)}=6-2a+ax$ имеет единственное решение.

1. $x<0,\ 0=6-2a+ax,\ x=\dfrac{2a-6}{a}<0.$ Следовательно, при $a\in(0;3)$ уравнение имеет **один отрицательный корень** $x=\dfrac{2a-6}{a}$.

2. $x\ge 0,\ 4\sqrt{x}=6-2a+ax.$ Сделаем замену $\sqrt{x}=t\ge 0,$ приходим к уравнению

$at^2-4t+6-2a=0.\quad (*)$

1) $a=0,\ t=1{,}5,\ x=2{,}25$ - **единственное решение**.

2) $a\ne 0,$ имеем квадратное уравнение, которое будет иметь **два различных неотрицательных решения** при следующих условиях

$$\begin{cases} D/4=4-6a+2a^2>0, \\ \dfrac{4}{a}>0, \\ \dfrac{6-2a}{a}\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow a\in(0;1)\cup(2;3].$$

3) Уравнение (*) будет иметь **одно неотрицательное решение,** если

3.1. $D/4=4-6a+2a^2=0,\quad t=\dfrac{2}{a}\ge 0.$ Имеем $a=1, a=2$.

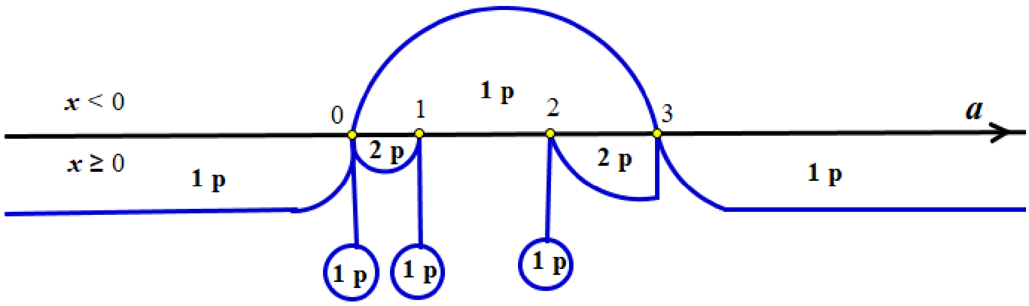
3.2. $\dfrac{6-2a}{a}<0,\ a\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty).$

3.3. $\dfrac{6-2a}{a}=0,\ \dfrac{4}{a}<0,$ таких a нет.

Итак, при $a\in(-\infty;0)$ уравнение (*) имеет ровно **один неотрицательный корень**

$t=\dfrac{2-\sqrt{4-6a+2a^2}}{a},$ и $x=\left(\dfrac{2-\sqrt{4-6a+2a^2}}{a}\right)^2$. При $a\in\{1,2\}\cup(3;+\infty)$ уравнение (*) имеет ровно **один неотрицательный корень** $t=\dfrac{2+\sqrt{4-6a+2a^2}}{a},$ и $x=\left(\dfrac{2+\sqrt{4-6a+2a^2}}{a}\right)^2$.

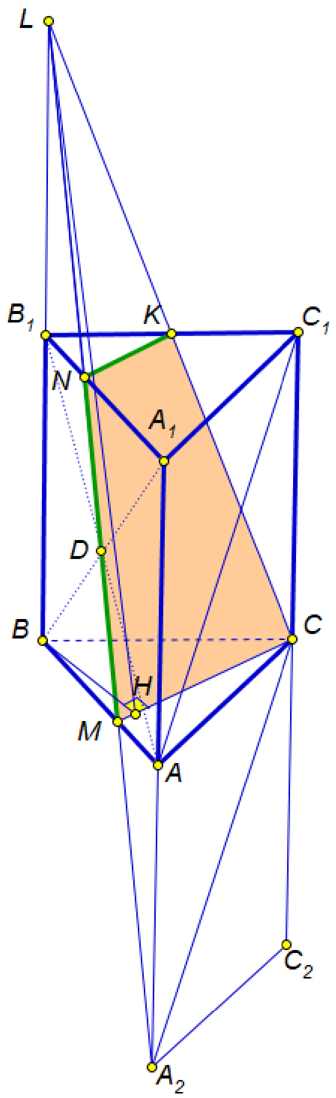
Совместим рассмотренные случаи:



Ответ: при $b=0, a\in(-\infty;0)$ $x=\left(\dfrac{2-\sqrt{4-6a+2a^2}}{a}\right)^2$; при $b=0, a=0$ $x=2{,}25$;

при $b=0, a\in(1;2)$ $x=\dfrac{2a-6}{a}$; при $b=0, a\in(3;+\infty)$

$x=\left(\dfrac{2+\sqrt{4-6a+2a^2}}{a}\right)^2$.

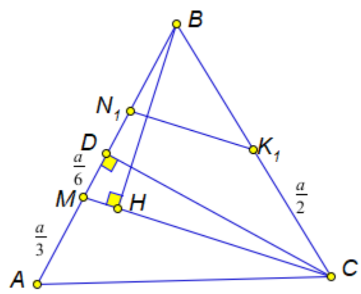


6. Найдите объемы частей, на которые делит правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ плоскость, параллельная диагонали AC_1 боковой грани AA_1C_1C, проходящая через вершину C и центр симметрии боковой грани AA_1B_1B, если площадь сечения призмы этой плоскостью равна $7\sqrt{3}/4$, а сторона основания призмы равна $\sqrt{14/3}$. (20 баллов)

Решение:

1) Построение сечения.

В плоскости боковой грани AA_1C_1C через точку C проведем прямую A_2C, параллельную AC_1, точка A_2 - точка пересечения AA_1 и A_2C, $AA_1=AA_2$.
Пусть D – центр симметрии боковой грани AA_1B_1B.
Через точку D проводим прямую A_2D, принадлежащую плоскости сечения. Точка M - точка пересечения AB и A_2D, точка N - точка пересечения A_1B_1 и A_2D, точка L - точка пересечения прямой BB_1 и A_2D, $AM=NB_1$, $BM=NA_1=2AM$, $AA_2=BB_1=B_1L$. Если обозначить сторону основания призмы через a, высоту призмы через h, то $AM=B_1N=a/3$, $BM=NA_1=2a/3$, $BB_1=B_1L=h$.
В плоскости основания $A_1B_1C_1$ через точку N проведем прямую NK, параллельную MC, точка K - точка пересечения NK и B_1C_1.
Трапеция $MNKC$ - искомое сечение.



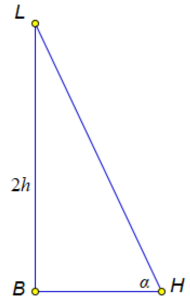
2) Спроецируем сечение на плоскость основания ABC призмы. Пусть N_1 и K_1 - проекции точек N и K на плоскость ABC. Тогда $N_1K_1 \parallel MC$, $BK_1=K_1C$. Проекцией

сечения на плоскость основания ABC является трапеция CMN_1K_1, ее площадь

$$S_{пр} = S_{BMC} - S_{BN_1K_1} = S_{ABC}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} = \frac{7\sqrt{3}}{12}.$$

3) Найдем косинус угла α наклона плоскости сечения к плоскости основания призмы. $S_{сеч} = S_{пр}/\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = S_{пр}/S_{сеч} = 1/3$.

4) Найдем высоту призмы h. Построим плоскость BHL, проходящую через точку B и перпендикулярную MC линии пересечения основания и плоскости сечения ($BH \perp MC, LH \perp MC$).Угол α наклона плоскости сечения к плоскости основания равен углу BHL, $BL = 2h$.



5) $$BH \cdot CM = BM \cdot CD,\ BH = \frac{BM\cdot CD}{CM} = \frac{\frac{2a}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}a}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{6}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \sqrt{2},$$

$\cos\alpha = 1/3$, $\sin\alpha = 2\sqrt{2}/3$, $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$, $2h = BL = BH\operatorname{tg}\alpha = 4$, $h = 2$.

6) $$V_{LBMC} = \frac{1}{3}S_{BMC}\cdot BL = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}S_{ABC}\cdot BL = \frac{a^2\sqrt{3}}{18}\cdot BL = \frac{28\sqrt{3}}{27}.$$

$$V_{LB_1NK} = \frac{1}{8}V_{LBMC},\ V_{BMCB_1NK} = \frac{7}{8}V_{LBMC} = \frac{49\sqrt{3}}{54},\ V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{ABC}\cdot BB_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot h = \frac{7\sqrt{3}}{3},$$

$$V_{AMCA_1NKC_1} = \frac{7\sqrt{3}}{3} - \frac{49\sqrt{3}}{54} = \frac{77\sqrt{3}}{54}.$$

Ответ: $\frac{49\sqrt{3}}{54}, \frac{77\sqrt{3}}{54}$.