Второй (заключительный) этап академического соревнования Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», весна 2018 г.

Вариант № 16

1. Найдите наименьшее натуральное число, имеющее ровно 42 натуральных делителя (включая единицу и само число). (12 баллов)

2. Решите неравенство $\frac{(x+9-4\sqrt{x+6})\log_2(x+1)}{(4^x-3\cdot 2^x+2)\log_5(5-x)}\geq 0.$ (12 баллов)

3. Окружность радиуса 4 касается сторон AB и BC треугольника ABC, а окружность радиуса 12 внешним образом касается первой окружности и сторон AC и BC треугольника ABC. Общая касательная к этим окружностям, не содержащая сторону BC, пересекает отрезки AB и AC в точках M и N соответственно. Найдите площадь треугольника AMN, если $\angle AMN=30°$, $\angle ANM=90°$.

(16 баллов)

4. Найдите площадь плоской фигуры, которая на координатной плоскости Oxy задана системой неравенств $x^2+y^2+2(y-x)\leq 23,\ \ y+|x-2|+1\leq 0$. (20 баллов)

5. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$\begin{cases}\log_{|x+4|}(ax+5a)=2\log_{|x+4|}(x+y),\\ x+2+\sqrt{x^2+4x+y-2}=0\end{cases}$ имеет два различных решения, и найдите эти решения

при каждом a. (20 баллов)

6. Найдите объемы частей, на которые делит правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ плоскость, параллельная диагонали AC_1 боковой грани AA_1C_1C, проходящая через середину стороны AB основания ABC и точку M, лежащую на стороне B_1C_1, если $MC_1=3B_1M$, расстояние от точки C до секущей плоскости равно $\sqrt{2}$, а сторона основания призмы равна $4\sqrt{7}$.

(20 баллов)

Решение варианта №16

1. Решение: Пусть n – искомое натуральное число, $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$ - разложение числа n на простые сомножители. Любой натуральный делитель этого числа имеет вид $d = p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{l_m}$, где $l_i \in \{0, 1, \ldots, k_i\}$, $i = 1, \ldots, m.$ Число делителей числа n равно $(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_m+1) = 42.$ Разложим число 42 на неединичные сомножители всеми возможными способами и выберем наименьшее число n. Поскольку $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7,$ то имеем пять случаев:

1) $42 = 42$, наименьшее число $n = 2^{41} > 3000$;
2) $42 = 21 \cdot 2$, наименьшее число $n = 2^{20} \cdot 3^1 > 3000$;
3) $42 = 14 \cdot 3$, наименьшее число $n = 2^{13} \cdot 3^2 > 3000$;
4) $42 = 7 \cdot 6$, наименьшее число $n = 2^6 \cdot 3^5 = 64 \cdot 243 > 3000$;
5) $42 = 7 \cdot 3 \cdot 2$, наименьшее число $n = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 2880$.

Ответ: 2880.

2. Решение:

ОДЗ: $x+6 \geq 0,\ x+1>0,\ 5-x>0,\ x \neq 0,\ x \neq 1,\ x \neq 4 \quad \Rightarrow \quad x \in (-1;\,0) \cup (0;\,1) \cup (1;\,4) \cup (4;\,5)$.

Имеем $\dfrac{(\sqrt{x+6}-1)(\sqrt{x+6}-3)(\log_2(x+1)-\log_2 1)}{(2^x-1)(2^x-2)(\log_5(5-x)-\log_5 1)} \geq 0.$

На **ОДЗ** исходное неравенство эквивалентно следующему

$$\frac{(x+5)(x-3)x}{x(x-1)(4-x)} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-3)}{(x-1)(4-x)} \geq 0 \quad \Rightarrow x \in (-1;\,0) \cup (0;\,1) \cup [3;\,4).$$

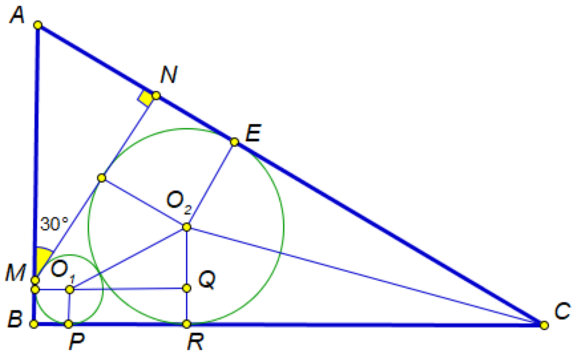
Ответ: $x \in (-1;\,0) \cup (0;\,1) \cup [3;\,4)$.

3. Решение:

Треугольник AMN прямоугольный, $\angle BAC = 60°$.

O_1, O_2 - центры окружностей, P, R - точки касания окружностей со стороной BC. В прямоугольном треугольнике O_1O_2Q с прямым углом Q, точка $Q \in O_2R$, имеем $O_1O_2^{\,2} = O_1Q^2 + QO_2^{\,2}$, $(16)^2 = O_1Q^2 + (8)^2$,

$PR = O_1Q = 8\sqrt{3}$, $\angle O_2O_1Q = 30°$, $\angle O_1O_2Q = 60°$.



Имеем $\angle RO_2C = \frac{1}{2}\angle RO_2E = \frac{1}{2}(360° - 90° - 2\cdot 60°) = 75°$, $\angle O_2CR = 15°$, $\angle ACB = 30°$,

$\angle ABC = 90°$, $RC = 12\,\mathrm{ctg}\,15° = 12\sqrt{\frac{1+\cos 30°}{1-\cos 30°}} = 12\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = 12(2+\sqrt{3}) = 24 + 12\sqrt{3}$.

$BC = BP + PR + RC = 4 + 8\sqrt{3} + 24 + 12\sqrt{3} = 28 + 20\sqrt{3}$, $AC = BC/\sin 60° = (120 + 56\sqrt{3})/3$,

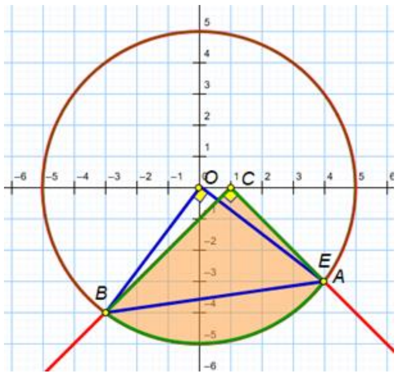
$AN = AC - CE - NE = (120 + 56\sqrt{3} - 72 - 36\sqrt{3} - 36)/3 = (12 + 20\sqrt{3})/3$,

$MN = AN/\mathrm{tg}\,30° = (12\sqrt{3} + 60)/3 = 4\sqrt{3} + 20$.

Вычислим площадь треугольника *AMN*:

$S = AN\cdot MN/2 = (12 + 20\sqrt{3})(4\sqrt{3} + 20)/6 = (224\sqrt{3} + 240)/3.$

Ответ: $(224\sqrt{3} + 240)/3.$



4. Решение: Преобразуем первое неравенство к виду $(x-1)^2 + (y+1)^2 \le 25,$ сделаем замену $\tilde{x} = x - 1,\ \tilde{y} = y + 1.$ Данная замена эквивалентна преобразованию параллельного переноса и не меняет площадь фигуры. В системе $O\tilde{x}\tilde{y}$ (см. рис.) рассмотрим фигуру, заданную системой неравенств $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \le 25,\ \tilde{y} \le -|\tilde{x} - 1|.$

Найдем точки пересечения прямого угла $\tilde{y} = -|\tilde{x} - 1|$ с вершиной $C(1;\,0)$ с окружностью $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 25.$ Подставим $\tilde{y} = -|\tilde{x} - 1|$ в уравнение окружности. Получим $\tilde{x}^2 + (\tilde{x} - 1)^2 = 25$, $\tilde{x}^2 - \tilde{x} - 12 = 0,\ \tilde{x} = 4,$ или $\tilde{x} = -3.$ Итак, точки пересечения $A(4;\,-3)$ и $B(-3;\,-4)$. Тогда $AC = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2},$ $CB = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}.$ Треугольник ABC прямоугольный, $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = 5\sqrt{2}$. Тогда треугольник AOB тоже прямоугольный, поскольку $AO^2 + OB^2 = AB^2,\ AO = OB = 5.$ Следовательно, площадь S_1 кругового сектора, отсекаемого хордой AB равна разности площади четверти круга и площади треугольника AOB, т.е. $S_1 = \frac{25\pi}{4} - \frac{25}{2}$. Вычислим площадь S_2 треугольника ABC: $S_2 = \frac{AC\cdot CB}{2} = 12$. Искомая площадь $S = S_1 + S_2 = 6{,}25\pi - 0{,}5$.

Ответ: $6{,}25\pi - 0{,}5$.

5. Решение: Рассмотрим второе уравнение системы $x+2+\sqrt{x^2+4x+y-2}=0 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x\le -2, \\ y=6. \end{cases}$ Следовательно, $\begin{cases} \log_{|x+4|}(ax+5a)=2\log_{|x-4|}(x+y), \\ x+2+\sqrt{x^2+4x+y-2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-(a-12)x+36-5a=0, \\ y=6, \\ -6<x\le -2,\ x\ne -5,\ x\ne -4,\ x\ne -3. \end{cases}$

Выясним, при каких значениях параметра a уравнение $x^2-(a-12)x+36-5a=0$ (*) имеет два различных решения, если $-6<x\le -2,\ x\ne -5,\ x\ne -4,\ x\ne -3.$

1) Выясним, при каких a точки $x=-5$, $x=-4$, $x=-2$ являются решениями уравнения (*).

$x=-5$ не является решением ни при каком a;

$x=-4$ является единственным решением уравнения (*) при $a=4$, поскольку

$D=a(a-4)=0$;

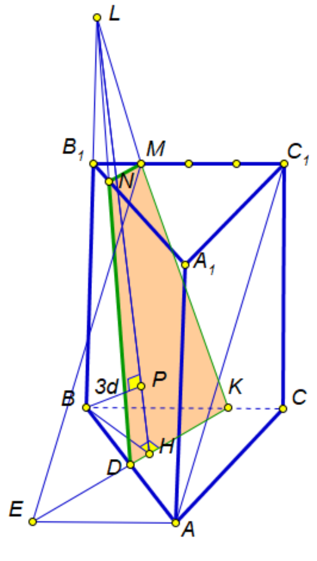
$x=-3$ является решением (*) при $a=4{,}5,$ поскольку при подстановке $x=-3$ в уравнение (*) имеем $3^2+3a-36+36-5a=0,\ 2a=9.$ При $a=4{,}5$ уравнение (*) имеет второе решение $x=-4{,}5,$ удовлетворяющее поставленным условиям. Следовательно, при $a=4{,}5$ система имеет единственное решение.

2) Пусть $a\ne 4{,}5$ и $D=a(a-4)>0$. При этом уравнение (*) будет иметь два различных решения, удовлетворяющих условию $-6<x\le -2,$ если $-6<\dfrac{a-12}{2}<-2,\ f(-6)>0,\ f(-2)\ge 0,$ где $f(x)=x^2-(a-12)x+36-5a$. Имеем $f(-6)=a$, $f(-2)=16-3a$, приходим к системе неравенств

$\begin{cases} a(a-4)>0, \quad a\ne 4{,}5, \\ 0<a<8, \\ a>0, \\ 16-3a\ge 0, \end{cases}$, и $a\in(4;\,4{,}5)\cup(4{,}5;\,16/3].$

Ответ: при $a\in(4;\,4{,}5)\cup(4{,}5;\,16/3]$ два решения

$x_{1/2}=\dfrac{a-12\pm\sqrt{a^2-4a}}{2}$, $y_{1/2}=6.$

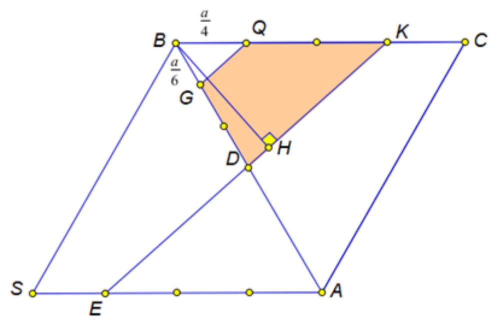


6. Решение: 1) Построение сечения. В плоскости основания ABC проводим прямую $EA \parallel B_1C_1$,

$EA=MC_1$, $ME \parallel AC_1$, ME лежит в плоскости сечения. В плоскости основания ABC проводим прямую, соединяющую точку E с серединой D стороны AB, точка K - точка пересечения этой прямой со стороной BC. В плоскости основания $A_1B_1C_1$ проводим прямую MN, параллельную DK. Точка N - точка пересечения прямой MN со стороной A_1B_1. Трапеция $DKMN$ - искомое сечение.

2) Спроецируем сечение на плоскость основания призмы. Обозначим сторону основания через a. Тогда $BK = 3a/4$, $BD = a/2$. Пусть Q - проекция точки M на основание ABC, $BQ = a/4$. Пусть G - проекция точки N на основание ABC. Поскольку $GQ \parallel DK$, то $BQ : BK = BG : BD$, и $BG = a/6$. Следовательно, $B_1N : BD = B_1M : BK = NM : DK = 1:3$.

3) Найдем косинус угла α наклона плоскости сечения к плоскости основания призмы. Расстояние d от точки C до плоскости сечения равно трети расстояния от точки B до плоскости сечения ($BK = 3CK$, K принадлежит плоскости сечения).



Строим плоскость BHL, проходящую через точку B и перпендикулярную DK линии пересечения основания и плоскости сечения ($BH \perp DK, LH \perp DK$). Проведем $BP \perp LH$, расстояние $3d$ равно BP. Угол наклона плоскости сечения к плоскости основания равен углу BHL.

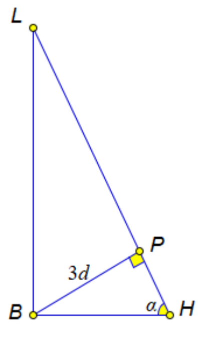
$$DK = \sqrt{DQ^2 + QK^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}/4\right)^2 + \left(a/2\right)^2} = a\sqrt{7}/4 = 7,$$

$$BH \cdot DK = BD \cdot BK \sin 60°,\ BH = \frac{3a\sqrt{3}}{4\sqrt{7}} = 3\sqrt{3}.$$

В треугольнике BPH имеем $\sin\alpha = 3d/BH = 2/\sqrt{6}$, $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$,

$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$, $BL = BH \cdot \operatorname{tg}\alpha = 3\sqrt{6}$.

4) $$V_{LBDK} = \frac{1}{3} S_{BDK} \cdot BL = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} S_{ABC} \cdot BL = \frac{a^2\sqrt{3}}{32} \cdot BL = \frac{63\sqrt{2}}{2}.$$



$$V_{LB_1NM} = \frac{1}{27} V_{LBDK},\ V_{BDKB_1NM} = \frac{26}{27} V_{LBDK} = \frac{91\sqrt{2}}{3},$$

$$V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot BB_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{3} BL = 168\sqrt{2},$$

$$V_{ACKDA_1C_1MN} = 168\sqrt{2} - \frac{91\sqrt{2}}{3} = \frac{413\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\frac{91\sqrt{2}}{3}$, $\frac{413\sqrt{2}}{3}$.