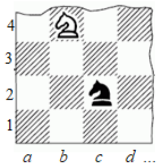
Второй (заключительный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету

«Математика», весна 2018 г.

Вариант № 11



1. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске, состоящей из 10×10 клеток двух коней – белого и черного так, чтобы они угрожали друг другу? (Конь ходит буквой «Г», т.е. он может пойти на одно из полей, ближайших к тому, на котором он стоит, но не на той же самой горизонтали, вертикали или диагонали). (12 баллов)

2. Решите неравенство $\dfrac{(|x-5|-|x-1|)\log_4(6-x)}{(9^x-12\cdot3^x+27)\log_3 x}\le0.$ (12 баллов)

3. Окружность радиуса 1 касается сторон *AB* и *BC* треугольника *ABC*, а окружность радиуса 3 внешним образом касается первой окружности и сторон *AC* и *BC* треугольника *ABC*. Общая касательная к этим окружностям, не содержащая сторону *BC*, пересекает отрезки *AB* и *AC* в точках *M* и *N* соответственно. Найдите длины сторон треугольника *ABC*, если $\angle AMN=30^\circ$, $\angle ANM=90^\circ$.

(16 баллов)

4. На произвольной параболе даны точки *A* и *B*. Точка *C* выбрана на дуге параболы между *A* и *B*, так, что треугольник *ABC* имеет максимальную площадь. Прямая, проходящая через точку *C* параллельно оси симметрии параболы, пересекает отрезок *AB* в точке *M*. Найдите отношение *AM* : *MB*. (20 баллов)

5. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}\log_{|x-1|}(ax)=2\log_{|x-1|}(x+y),\\ 3-x=\sqrt{x^2-6x+y+8}\end{cases}$$

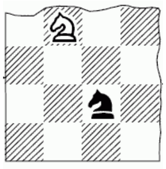
имеет единственное решение, и найдите это решение при каждом a. (20 баллов)

6. Найдите площадь сечения правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, которая параллельна диагонали AC_1 боковой грани AA_1C_1C, проходит через середину стороны AB основания ABC и точку M, лежащую на стороне B_1C_1, если $MC_1=3B_1M$, расстояние между AC_1 и секущей плоскостью равно 3, а сторона основания призмы равна $2\sqrt{14}$.

(20 баллов).

Решение варианта №11

1. Решение: Свяжем с доской $n\times n$ $(n>2)$ прямоугольную систему координат. Обозначим координаты двух коней через $(x_1;\, y_1)$ и $(x_2;\, y_2)$, где $x_k,\, y_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $k=1, 2$. Кони угрожают друг другу, если 1) $|x_1-x_2|=1$, $|y_1-y_2|=2$ или 2) $|x_1-x_2|=2$, $|y_1-y_2|=1$. В первом случае есть четыре такие возможности:



$1\le x_1\le n-1,\ x_2=x_1+1,\quad 1\le y_1\le n-2,\ y_2=y_1+2;$

$1\le x_1\le n-1,\ x_2=x_1+1,\quad 1\le y_2\le n-2,\ y_1=y_2+2;$

$1\le x_2\le n-1,\ x_1=x_2+1,\quad 1\le y_1\le n-2,\ y_2=y_1+2;$

$1\le x_2\le n-1,\ x_1=x_2+1,\quad 1\le y_2\le n-2,\ y_1=y_2+2.$

Каждому из этих подслучаев соответствуют по $(n-1)(n-2)$ позиции. Второй случай отличается от первого поворотом на 90°. При $n=10$ имеем $8(n-1)(n-2)=8\cdot 9\cdot 8=576$.

Ответ: 576.

2. Решение:

ОДЗ: $x>0,\ 6-x>0,\ x\ne 1,\ x\ne 2 \ \Rightarrow\ x\in(0;1)\cup(1;2)\cup(2;6)$.

Имеем $\dfrac{(\log_4(6-x)-\log_4 1)(|x-5|-|x-1|)}{(3^x-9)(3^x-3)(\log_3 x-\log_3 1)}\le 0.$

На **ОДЗ** исходное неравенство эквивалентно следующему

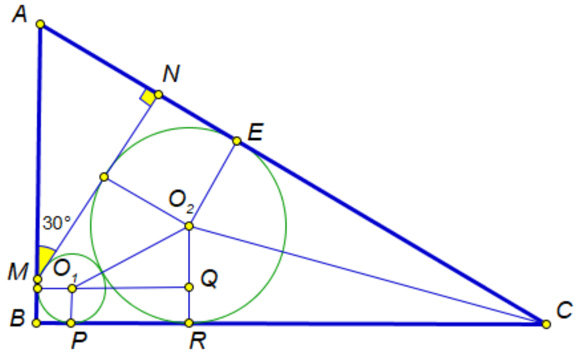
$$\frac{(5-x)(x-5-(x-1))(x-5+(x-1))}{(x-2)(x-1)^2}\le 0 \ \Rightarrow\ \frac{(x-5)(x-3)}{(x-2)}\le 0 \Rightarrow\ x\in(0;1)\cup(1;2)\cup[3;5].$$

Ответ: $x\in(0;1)\cup(1;2)\cup[3;5]$.

3. Решение:

Треугольник AMN прямоугольный, $\angle BAC=60^\circ$.

O_1, O_2 - центры окружностей, P, R - точки касания окружностей со стороной BC. В прямоугольном треугольнике O_1O_2Q с прямым углом Q, точка $Q\in O_2R$, имеем $O_1O_2^{\,2}=O_1Q^2+QO_2^{\,2}$, $4^2=O_1Q^2+2^2$,



$PR=O_1Q=2\sqrt{3}$, $\angle O_2O_1Q=30^\circ$, $\angle O_1O_2Q=60^\circ$.

Имеем

$$\angle RO_2C=\frac{1}{2}\angle RO_2E=\frac{1}{2}(360^\circ-90^\circ-2\cdot 60^\circ)=75^\circ,$$

$\angle O_2CR = 15°,\ \angle BCA = 30°,\ \angle ABC = 90°,$

$RC = 3\,\mathrm{ctg}\,15° = 3\sqrt{\dfrac{1+\cos 30°}{1-\cos 30°}} = 3\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = 3(2+\sqrt{3}) = 6+3\sqrt{3}$.

$BC = BP + PR + RC = 1 + 2\sqrt{3} + 6 + 3\sqrt{3} = 7 + 5\sqrt{3}$, $AC = BC/\sin 60° = (30+14\sqrt{3})/3$,

$AB = BC/\sin 60° = (15+7\sqrt{3})/3$.

Ответ: $BC = 7+5\sqrt{3}$, $AC = (30+14\sqrt{3})/3$, $AB = (15+7\sqrt{3})/3$.

4. Решение: Совместим начало координат с вершиной параболы, ось Oy проведем через ось симметрии параболы в направлении ее ветвей. Тогда уравнение параболы будет $y = kx^2,\ k > 0.$

Пусть $A(a;ka^2),\ B(b;kb^2),\ b > a.$ Составим уравнение прямой AB:

$y - ka^2 = \dfrac{kb^2 - ka^2}{b-a}(x-a) \Leftrightarrow y = ka^2 + k(b+a)(x-a)$. Поскольку площадь треугольника ABC можно вычислить по формуле $S = \dfrac{1}{2} AB \cdot CH$, где CH – высота, опущенная из вершины C на сторону AB. Длина стороны AB – величина постоянная, следовательно, площадь треугольника ABC будет принимать максимальное значение в том случае, если CH будет максимальной.

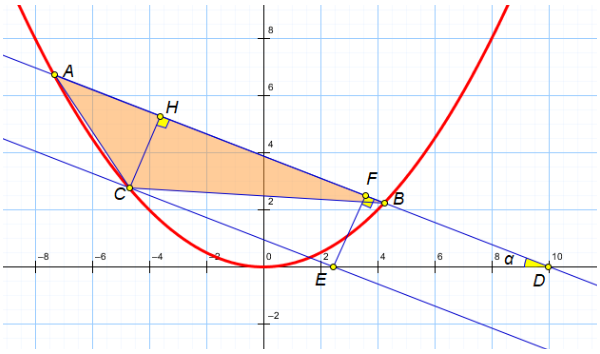
Пусть $C(c;kc^2),\ c \in (a;b).$ Проведем через точку C прямую, параллельную AB, ее уравнение

$y = kc^2 + k(b+a)(x-c)$. Найдем абсциссу x_E точки E пересечения этой прямой с осью Ox:

$x_E = -\dfrac{c^2}{b+a} + c.$ Найдем абсциссу точки D пересечения прямой AB с осью Ox:

$x_D = -\dfrac{a^2}{b+a} + a.$

Имеем $DE = |x_D - x_E| = \left| -\frac{a^2 - c^2}{b+a} + a - c \right| = \frac{|c^2 - (a+b)c + ab|}{b+a}$,



$CH = DE \sin\alpha = \frac{|c^2 - (a+b)c + ab| \sin\alpha}{b+a}$, угол α - угол наклона прямой *AB* к оси *Ox* (величина постоянная). Подмодульное выражение является квадратичной зависимостью относительно переменной *c*, оно отрицательно при $c \in (a; b)$ и достигает минимума при $c = \frac{a+b}{2}$. Величина *CH* при этом, а, следовательно, и площадь треугольника *ABC* будет принимать максимальное значение. Точка *C* есть точка пересечения параболы с прямой, параллельной ее оси симметрии и проходящей через середину отрезка *AB*. Таким образом, точка *M* совпадает с серединой отрезка *AB*, и *AM* : *MB*= 1: 1.

Ответ: 1: 1.

5. Решение: Рассмотрим второе уравнение системы $3 - x = \sqrt{x^2 - 6x + y + 8} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3, \\ y = 1. \end{cases}$

Следовательно, $\begin{cases} \log_{|x-1|}(ax) = 2\log_{|x-1|}(x+y), \\ 3 - x = \sqrt{x^2 - 6x + y + 8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (2-a)x + 1 = 0, \\ y = 1, \\ -1 < x \le 3,\ x \ne 0,\ x \ne 1,\ x \ne 2. \end{cases}$

Выясним, при каких значениях параметра *a* уравнение $x^2 + (2-a)x + 1 = 0$ (*) имеет единственное решение, если $-1 < x \le 3, x \ne 0, x \ne 1, x \ne 2.$

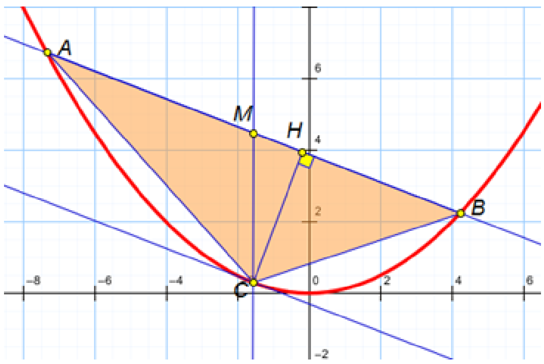
1) $D = a(a-4),\ D = a(a-4),\ x = \frac{a-2}{2}$. При $a = 0$ корень $x = -1$ не подходит; при $a = 4$ корень $x = 1$ не подходит.

2) Выясним, при каких *a* точки $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ являются решениями уравнения (*).

$x = 0$ не является решением ни при каком *a*;

$x = 1$является единственным решением уравнения (*) при $a = 4$;

$x = 2$ является решением (*) при $a = 4{,}5$, поскольку при подстановке $x = 2$ в уравнение (*) имеем $2^2 + (2-a)2 + 1 = 0,\ 2a = 9.$ Однако, при $a = 4{,}5$ уравнение (*) имеет второе решение $x = 0{,}5$, удовлетворяющее поставленным условиям.



Следовательно, при $a = 4{,}5$ система имеет единственное решение $x = 0{,}5,\ y = 1$.

3) Если дискриминант уравнения (*) больше нуля, то уравнение имеет два различных решения, но при условии $f(-1)f(3) < 0$, где $f(x) = x^2 + (2-a)x + 1,$ один корень будет посторонним, а один будет удовлетворять неравенству $-1 < x < 3$. Имеем $f(-1) = a$, $f(3) = 16 - 3a$, приходим к неравенству $a(16-3a) < 0$, и $a \in (-\infty;\, 0) \cup (16/3;\, +\infty)$. Если $a \in (-\infty;\, 0)$, то

$$x = \frac{a - 2 + \sqrt{a^2 - 4a}}{2}.$$

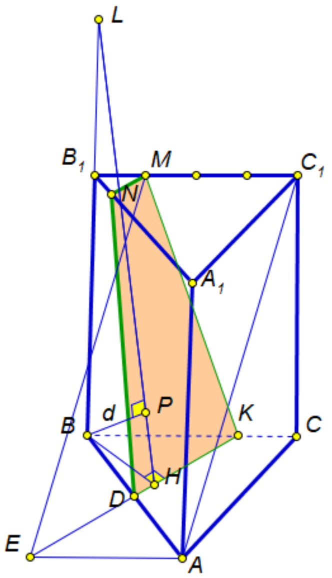
Если $a \in (16/3;\, +\infty)$, то $x = \dfrac{a - 2 - \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$.

4) Проверим случаи, когда $f(-1) = 0$ и $f(3) = 0$. Первое равенство выполняется при $a = 0$, уравнение (*) не имеет решений, удовлетворяющих поставленным условиям. Второе равенство справедливо при $a = 16/3$. В этом случае уравнение (*) имеет вид $x^2 + \dfrac{10}{3}x + 1 = 0,$ и имеет два решения $x = 1/3$ и $x = 3$, которые оба подходят.

Ответ: при $a = 4{,}5$ $\quad x = 0{,}5,\ y = 1$, при $a \in (-\infty;\, 0)$ $\quad x = \dfrac{a - 2 + \sqrt{a^2 - 4a}}{2},\ y = 1,$

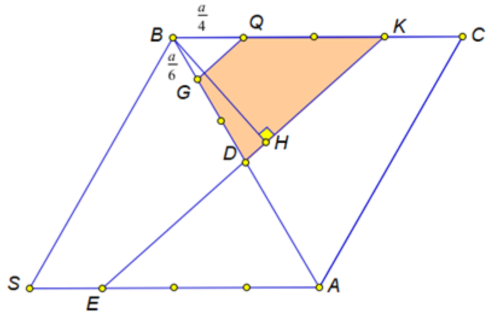
при $a \in (16/3;\, +\infty)$ $\quad x = \dfrac{a - 2 - \sqrt{a^2 - 4a}}{2},\ y = 1.$

6. Решение: 1) Построение сечения. В плоскости основания ABC проводим прямую $EA \parallel B_1C_1$,



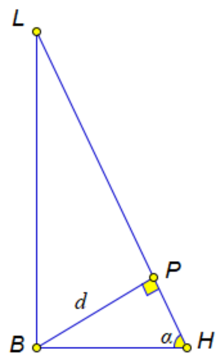
$EA = MC_1$, $ME \parallel AC_1$, ME лежит в плоскости сечения. В плоскости основания ABC проводим прямую, соединяющую точку E с серединой D стороны AB, точка K - точка пересечения этой прямой со стороной BC. В плоскости основания $A_1B_1C_1$ проводим прямую MN, параллельную DK. Точка N - точка пересечения прямой MN со стороной A_1B_1. Трапеция $DKMN$ - искомое сечение.

2) Найдем площадь проекции сечения на плоскость основания призмы. Обозначим сторону основания через a. Тогда $BK = 3a/4$, $BD = a/2$. Пусть Q - проекция точки M на основание ABC, $BQ = a/4$. Пусть G - проекция точки N на основание ABC. Поскольку $GQ \parallel DK$, то $BQ : BK = BG : BD$, и $BG = a/6$. Проекцией сечения на плоскость основания ABC является трапеция $DKQG$, ее площадь $S_{пр} = S_{BDK} - S_{BGQ} = S_{ABC}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} = \frac{14\sqrt{3}}{3}$.



3) Найдем косинус угла α наклона плоскости сечения к плоскости основания призмы. Расстояние d от прямой AC_1 до плоскости сечения равно расстоянию от точки A до плоскости сечения, которое, в свою очередь, равно расстоянию от точки B до плоскости сечения ($AD = DB,$ D принадлежит плоскости сечения).

Строим плоскость BHL, проходящую через точку B и перпендикулярную DK линии пересечения основания и плоскости сечения ($BH \perp DK, LH \perp DK$). Проведем $BP \perp LH$, расстояние d равно BP. Угол наклона плоскости сечения к плоскости основания равен углу BHL.



$$DK = \sqrt{DQ^2 + QK^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}/4\right)^2 + \left(a/2\right)^2} = a\sqrt{7}/4 = 7\sqrt{2}/2,$$

$$BH \cdot DK = BD \cdot BK \sin 60°,\ BH = \frac{3a\sqrt{3}}{4\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

В треугольнике BPH имеем $\sin\alpha = d/BH = 2/\sqrt{6}$, $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$.

4) $S_{сеч} = S_{пр}/\cos\alpha = 14$.

Ответ: 14.