Второй (заключительный) этап олимпиады школьников

«Шаг в будущее» для 8-10 классов по общеобразовательному предмету

«Математика», 8 класс, весна 2018 г.

Вариант №3

Задача 1. (15 баллов) Найти все натуральные значения n, для которых число $n^4 - n^3 + n^2 + 2$ является простым.

Задача 2. (15 баллов) Может ли дискриминант квадратного уравнения с целыми коэффициентами быть равным 7?

Задача 3. (15 баллов) Найдите все такие k и b, при которых система уравнений

$\begin{cases} y + 2|x| = 2 \\ y = \kappa x + в \end{cases}$ имеет бесконечно много решений.

Задача 4. (20 баллов) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и BP. На высоте AD взята точка M, а на высоте BP - точка N так, что $\angle BMC = \angle ANC = 90°$, $MN = 4 + 2\sqrt{3}$, $\angle MCN = 60°$. Найдите биссектрису угла C треугольника MCN.

Задача 5. (15 баллов) Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 70 км, выехал велосипедист, а через некоторое время — мотоциклист, двигавшийся со скоростью 50 км/ч. Мотоциклист догнал велосипедиста на расстоянии 20 км от пункта A. Прибыв в пункт B, мотоциклист через 48 мин выехал обратно в пункт A и встретился с велосипедистом спустя 2 ч 40 мин после выезда велосипедиста из пункта A. Найдите скорость велосипедиста.

Задача 6. (20 баллов) Винни-Пух и Пятачок делят конфеты. Если Винни возьмет у Пятачка несколько конфет, то у него станет конфет в 4 раза больше, чем у Пятачка. Если же Пятачок заберет у Винни 90 конфет из его первоначального количества, то у Пятачка станет конфет в 5 раз больше, чем у Винни. Какое минимально возможное количество конфет могло быть у Пятачка и Винни-Пуха первоначально?

Решение варианта №3, 8 класс

1. Решение:

Разложим данное выражение на множители

$$n^4 - n^3 + n^2 + 2 = n^4 - n^3 - n + 1 + n^2 + n + 1 =$$
$$= n^3(n-1) - (n-1) + (n^2 + n + 1) =$$
$$= (n-1)(n^3 - 1) + (n^2 + n + 1) = (n^2 + n + 1)((n-1)^2 + 1)$$

Данное число будет простым, когда один из множителей равен 1, а другой множитель – простое число.

Так как $(n^2 + n + 1) \geq 3$ для всех натуральных n, то $((n-1)^2 + 1) = 1$, решение которого $n = 1$. При этом значении первый множитель равен 3- простому числу. Ответ $n = 1$

2. Решение

Пусть квадратное уравнение имеет вид $ax^2 + вx + c$=0, при условии a, b, с целые числа. Тогда дискриминант $D = в^2 - 4ac$, является целым числом, которое при делении на 4 дает тот же остаток, что и $в^2$,т. е 0 или 1. Число 7 при делении на 4 дает остаток 3. Ответ: нет, не может.

1. Найдите все такие k и b, при которых система уравнений $\begin{cases} y + 2|x| = 2 \\ y = кx + в \end{cases}$ имеет бесконечно много решений.

3. Решение

Уравнение $y + 2|x| = 2$ задаёт на координатной плоскости прямые: y=-2x+2, при x≥0 и y=2x+2, при x<0. Для того, чтобы система имела бесконечное множество решений необходимо, чтобы прямая y= k x+ b совпадала с одной из этих прямых. Ответ k =±2; b =2.

4. Решение

В треугольниках MCB и MDC $\cos\angle MCB = \frac{MC}{BC} = \frac{DC}{MC}$, следовательно, $MC^2 = DC \cdot BC$.

В треугольниках APN и ANC $\cos\ \angle PAN = \frac{AP}{AN} = \frac{AN}{NC}$, следовательно, $AN^2 = AP \cdot AC$.

$$\cos\angle BCA = \frac{PC}{BC} = \frac{DC}{AC} \Leftrightarrow PC \cdot AC = DC \cdot BC \Longrightarrow MC^2 = NC^2 \Leftrightarrow MC = NC.$$

Значит, треугольник MCN равнобедренный. Проведем в нем CL – биссектрису, медиану и высоту.

Тогда $\angle MCL = 30°, CL = \frac{ML}{tg\angle MCL} = \frac{(2+\sqrt{3})3}{\sqrt{3}} = 3 + 2\sqrt{3}.$

5. Решение

Возможное решение:

Пусть y есть время, через которое выехал мотоциклист после выезда велосипедиста.

$v_в = x$ км/ч и $v_м = 50$ км/ч скорости велосипедиста и мотоциклиста соответственно.

$t_{мотоциклиста} = 2\frac{40}{60} - \frac{70}{50} - \frac{4}{5} = \frac{7}{15}$ ч; —> получим систему:

$$\begin{cases} \frac{20}{x} - \frac{20}{50} = y \\ 70 - \frac{8}{3}x = 50 * (\frac{7}{15} - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{20}{x} - \frac{2}{5} = y \\ 70 - \frac{8}{3}x = \frac{70}{3} - 50y \end{cases}$$

$$70 - \frac{8}{3}x = \frac{70}{3} - 50 * (\frac{20}{x} - \frac{2}{5})$$

$x^2 - 10x - 375 = 0$

$D = 400$

$X1 = 25$ км/ч

$X2 = -15$ км/ч - не подходит по условию задачи => $x = 25$ км/ч

Ответ: 25 км/ч

6. Решение

Пусть x конфет у Пятачка, y - у Винни, n несколько конфет, которые Винни взял бы у Пятачка. Получим систему.

$\begin{cases} y + n = 4(x - n) \\ x + 90 = 5(y - 90), \end{cases} \begin{cases} x = 5y - 540 \\ y + n = 20y - 2160 - 4n, \end{cases}$ откуда $y = 113 + \frac{5n+13}{19}$. Так как y минимально и принимает натуральные значения, то это возможно при n=5, тогда $\begin{cases} y = 115 \\ x = 35 \end{cases}$

Ответ: у Винни было 115 конфет, у Пятачка 35 конфет.

Критерии проверки вариант №3, 8 класс

Задача 1

Баллы	
15	Обоснованно получен правильный ответ.
10	Выражение разложено на множители
2	Подбором найдено верное решение
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Задача 2

Баллы	
15	Обоснованно получен правильный ответ.
10	Применили сведения об остатках при делении квадрата числа на 4.
5	Сделан вывод о равных остатках D и b.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Задача 3

Баллы	
15	Обоснованно получен правильный ответ.
10	Проведен анализ количества решений системы.
5	Правильно расписано уравнение с модулем
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Задача 4

Баллы	
20	Обоснованно получен правильный ответ.
15	При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка.
10	Доказано, что треугольник MCN равнобедренный.
5	Верное формулирование некоторых геометрических фактов.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Задача 5

Баллы	
15	Обоснованно получен правильный ответ.
10	При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка.
5	Правильно составлена система уравнений.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Задача 6

Баллы	
20	Обоснованно получен правильный ответ.

15	При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка.
10	Проведен анализ возможных значений переменных.
5	Условие задачи представлено в виде системы условий.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Второй (заключительный) этап олимпиады школьников
«Шаг в будущее» для 8-10 классов по общеобразовательному предмету
«Математика», 8 класс, весна 2018 г.

Вариант №9

Задача 1. (10 баллов) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+2y+1=0 \\ y^2+2z+1=0 \\ z^2+2x+1=0 \end{cases}$$

Задача 2. (15 баллов) В вершинах куба расставлены последовательные нечетные натуральные числа от 1 до 15. На каждой грани записана сумма чисел, расставленных в ее вершинах. Может ли оказаться так, что на гранях записано шесть последовательных четных чисел? Ответ обоснуйте.

Задача 3. (15 баллов) Найдите двузначное число $\overline{xy}$, квадрат суммы цифр которого на 8 больше суммы произведения цифр числа и квадрата единиц этого числа, увеличенной в 7 раз.

Задача 4. (15 баллов) В одной коробке лежат два ботинка 42 размера, в другой – два ботинка 43 размера, а в третьей – один ботинок 42, а другой 43 размера. Каждая коробка подписана (указан размер 42, 43 или 42-43), но надпись неправильно указывает содержимое коробки. Неверная информация написана на всех коробках. Из какой коробки, не глядя, надо вынуть ботинок, чтобы можно было определить содержимое каждой коробки.

Задача 5. (25 баллов) При каких целых значениях параметра «а» выражение $\frac{x_1+x_2-2x_1x_2}{x_1x_2}$ принимает целые значения, если x_1 и x_2 – различные корни уравнения

$$(a-3)x^2-12x+a-11=0.$$

Задача 6. (20 баллов) В равнобедренном треугольнике ABC (AB=BC) биссектрисы BD и AF пересекаются в точке O. Площади треугольников DOA и BOF относятся как 3:8. Найдите отношение AC : AB.

Решение варианта №9, 8 класс

1. Решение

Пусть (x;y;z)-возможное решение. Сложив все три уравнения получаем $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=0$, откуда следует, что x=y=z=-1. Проверка показывает, что данная тройка является решением системы.

Ответ: (-1;-1;-1).

2. Решение

Пусть на гранях записано шесть последовательных четных чисел и n – наименьшее из них. Тогда их сумма $S = n + (n+2) + \cdots + (n+10) = 6n + 30$

Так как каждое из чисел от 1 до 15 входит в три суммы, записанные на гранях, то $S = (1 + 3 + \cdots + 15) \cdot 3 = 64 \cdot 3 = 192$

Тогда $6n + 30 = 192$ $n = 27$, но n четно, следовательно, не может.

3. Решение

Найдите двузначное число $\overline{xy}$, квадрат суммы цифр которого на 8 больше суммы произведения цифр числа и квадрата единиц этого числа, увеличенной в 7 раз.

Возможное решение.

Составим уравнение: $(x+y)^2 - 8 = 7 * (xy + y^2)$, преобразуем:

$(x+y)^2 - 7 * (xy + y^2) = 8;$

$(x+y)^2 - 7y(x+y) = 8;$

$(x+y-7y)(x+y) = 8;$

$(x+y-7y)(x+y) = 8;$

$(x-6y)(x+y) = 8;$

Число 8 можно представить в виде произведения двух целых чисел, учитывая порядок множителей, четырьмя способами, причём $x + y > 0$, тогда и $x - 6y > 0$

$\begin{cases} x+y=1 \\ x-6y=8 \end{cases} <=> \begin{cases} y=-1 \\ x=2 \end{cases} -$ не подходит

$\begin{cases} x+y=2 \\ x-6y=4 \end{cases} <=> \begin{cases} y=\frac{-2}{7} \\ x=2\frac{2}{7} \end{cases} -$ не подходит

$\begin{cases} x+y=4 \\ x-6y=2 \end{cases} <=> \begin{cases} y=\frac{2}{7} \\ x=1\frac{5}{7} \end{cases} -$ не подходит

$\begin{cases} x+y=8 \\ x-6y=1 \end{cases} <=> \begin{cases} y=1 \\ x=7 \end{cases} \rightarrow$ искомое число 71

Ответ: 71.

4. Решение

Так как надписи неверны, то в коробке, где подписано 42 – 43 лежат ботинки или только 42 размера, или только 43 размера. Выбираем эту коробку и если достаем ботинок 42 размера то в коробке с надписью 42 находим ботинки 43 размера, а в коробке с надписью 43 лежат ботинки разных размеров. А если достанем ботинок 43 размера то в коробке с надписью 43 найдем ботинки 42 размера, а в коробке 42 лежат разные ботинки.

5. Решение

Уравнение $(a-3)x^2-12x+a-11=0$ имеет два различных корня, если

$$D>0; a-3\neq 0$$

$D=6^2-(a-3)*(a-11)=-a^2+14a+3; a\neq 3.$

По теореме Виета: $\begin{cases} x_1+x_2=\frac{12}{a-3} \\ x_1x_2=\frac{a-11}{a-3} \end{cases}$ тогда:

$\frac{x_1+x_2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}-2=\frac{12*(a-3)}{(a-3)(a-11)}-2=\frac{12}{(a-11)}-2$ —> будет целым, если $a-11$ делитель числа 12.

Т.е. $(a-11)$ = $\pm1; \pm2; \pm3; \pm4; \pm6; \pm12;$ —>

Тогда, при условии что $D>0$, «а» может принимать следующие значения: 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13,14.

Ответ: $a\in\{5,7,8,9,10,12,13,14\}$

6. Решение

Примем площадь треугольника ABC за 1.

$\frac{S_{DOA}}{S_{BOF}}=\frac{3x}{8x}$, тогда $S_{AOB}=\frac{1}{2}-3x, S_{DOFC}=\frac{1}{2}-8x.$

(по свойствам равнобедренного треугольника)

$\frac{AB}{AC}=\frac{BF}{FC}=\frac{S_{ABF}}{S_{AFC}}=\frac{\frac{1}{2}-3x+8x}{\frac{1}{2}-8x+3x}=\frac{\frac{1}{2}+5x}{\frac{1}{2}-5x}.$ (по свойству биссектрисы угла и свойству площадей треугольников с равной высотой)

$$\frac{AB}{AD}=\frac{BO}{OD}=\frac{S_{ABO}}{S_{AOD}}=\frac{\frac{1}{2}-3x}{3x}, \frac{AB}{AC}=\frac{AB}{2AD}=\frac{\frac{1}{2}-3x}{6x}.$$

Получим $\frac{\frac{1}{2}+5x}{\frac{1}{2}-5x}=\frac{\frac{1}{2}-3x}{6x}, 15x^2+7x-\frac{1}{4}=0, x=\frac{1}{30}.$ Тогда $\frac{AB}{AC}=\frac{\frac{1}{2}-3x}{6x}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{10}}{\frac{1}{5}}=\frac{2}{1}.$

Критерии проверки вариант №9, 8 класс

Задача 1

Решение выполнено обосновано и верно.	10
В решении отсутствует проверка.	5
Решение выполнено е верно.	0

Задача 2

Решение выполнено обосновано и верно.	15
Найдено хотя бы одно из чисел.	10
Записана формула суммы и найдено её значение.	5

Задача 3

Решение выполнено обоснованно и верно найдено число.	15
Уравнение составлено верно, но не рассмотрены все случаи.	10
Уравнение составлено верно, но не найдено решение.	2

Задача 4

Решение выполнено обосновано и верно.	15
Составлена верная логическая цепочка.	10
Решение не удовлетворяет выше перечисленным пунктам.	0

Задача 5

Решение выполнено обоснованно и найдены все числовые ответы.	25
Решение выполнено частично, не рассмотрены все случаи	15
Рассмотрены все случаи, но не проверены подстановкой в дискриминант.	10
Записана верно теорема Виета, правильно записана дробь через параметр «а».	5

Задача 6

Решение выполнено верно и обосновано.	20
Ход решения верный, но допущена вычислительная ошибка.	15
Верно выражены площади фигур, но уравнения не составлены.	10
Верно выражена площадь одной из фигур.	5