

**Второй (заключительный) этап олимпиады школьников**  
**«Шаг в будущее» для 8-10 классов по общеобразовательному предмету**  
**«Математика», 10 класс, весна 2018 г.**

**Вариант №1**

**Задача 1.** (10 баллов) Сравните числа:  $99!$  и  $50^{99}$  (напомним:  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ ).

**Задача 2.** (10 баллов) Можно ли из 37 ниток сплести сетку так, чтобы каждая нитка была связана ровно с пятью другими?

**Задача 3.** (10 баллов) Решить неравенство:

$$\frac{\left(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{3 - x}\right)^2 \left(x^2 - 4\sqrt{x^2 - 6x + 9}\right)}{x^2 + 2\sqrt{x^2 - 8x + 16}} \geq 0$$

**Задача 4.** (10 баллов) Решить уравнение:

$$\sqrt{x-15} + \sqrt{x+80} + 2\sqrt{x-15}\sqrt{x+80} = 315 - 2x.$$

**Задача 5.** (15 баллов) Назовем число «Новогодним», если в нем все цифры различные, оно не начинается с цифры 2 и при вычеркивании некоторого числа его цифр можно получить 2018. Сколько существует различных семизначных «Новогодних» чисел?

**Задача 6.** (15 баллов) Спортсмены студенческой команды должны были выйти на спортивный праздник прямоугольным строем по 45 человек в ряд. По прибытии выяснилось, что не все спортсмены взяли с собой нужную спортивную форму и, следовательно, они не смогут принять участие в празднике. Оставшихся спортсменов перестроили так, что число рядов стало на два меньше, а число спортсменов в каждом ряду стало на 48 больше числа новых рядов. Известно, что если бы все спортсмены приняли бы участие в празднике, то их можно было бы выстроить прямоугольным строем так, что число спортсменов в каждом ряду равнялось числу рядов. Сколько спортсменов планировали принять участие в спортивном празднике?

**Задача 7.** (15 баллов) Найти все значения параметра  $b$ , при которых неравенство  $2b + b^2 - 2b \sin x > \cos^2 x + 2$  выполняется при любом значении  $x$ .

**Задача 8.** (15 баллов) Через центр  $O$  вписанной в треугольник  $ABC$  окружности проведена прямая, параллельная  $AC$ , которая пересекает его боковые стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $K$  соответственно. Вторая окружность вписана в треугольник  $MVK$  и касается его боковой стороны  $MK$  в точке  $E$ , а первая окружность касается стороны  $AB$  в точке  $F$ . Найдите длину отрезка  $EF$ , если периметр треугольника  $MVK$  равен 6, а  $AC=3$ .

## Решение варианта №1, 10 класс

**Задача 1.** (10 баллов) Сравните числа:  $99!$  и  $50^{99}$  (напомним:  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ ).

**1. Решение:**

$$99! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 50 \cdot \dots \cdot 98 \cdot 99 = (50-49)(50-48) \cdot \dots \cdot (50-1) \cdot 50 \cdot (50+1) \cdot \dots \cdot (50+49) =$$

$$= 50 \cdot (50^2 - 1^2)(50^2 - 2^2) \cdot \dots \cdot (50^2 - 49^2) < 50 \cdot (50^2)^{49} = 50^{99}. \text{ Следовательно: } 99! < 50^{99}.$$

**Ответ:**  $99! < 50^{99}$ .

**Задача 2.** (10 баллов) Можно ли из 37 ниток сплести сетку так, чтобы каждая нитка была связана ровно с пятью другими?

**2. Решение:** Предположим, что такую сетку сплести можно, тогда количество узлов

(пересечений двух ниток) равно  $\frac{37 \cdot 5}{2}$ , а это число не является целым.

**Ответ:** нет, нельзя.

**Задача 3.** (10 баллов) Решить неравенство:

$$\frac{(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{3 - x})^2 (x^2 - 4\sqrt{x^2 - 6x + 9})}{x^2 + 2\sqrt{x^2 - 8x + 16}} \geq 0$$

**3. Решение:**

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ 3 - x \geq 0 \\ x^2 - 6x + 9 \geq 0 \\ x^2 - 8x + 16 \geq 0 \\ x^2 + 2 \cdot \sqrt{x^2 - 8x + 16} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) \cdot (x-3) \geq 0 \\ x \leq 3 \\ (x-3)^2 \geq 0 \\ (x-4)^2 \geq 0 \\ x^2 + 2 \cdot \sqrt{(x-4)^2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x \in (-\infty; 1] \cup \{3\}.$$

$$\text{На ОДЗ } \sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3| = 3-x;$$

$$\sqrt{x^2 - 8x + 16} = \sqrt{(x-4)^2} = |x-4| = 4-x. \text{ Получили:}$$

$$\frac{(\sqrt{(x-1) \cdot (x-3)} + \sqrt{3-x})^2 \cdot (x^2 - 4(3-x))}{x^2 + 2(4-x)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{(x-1) \cdot (x-3)} + \sqrt{3-x})^2 \cdot (x+6) \cdot (x-2)}{x^2 - 2x + 8} \geq 0 \Leftrightarrow x \in$$

$$(-\infty; -6] \cup \{3\}.$$

**Ответ:**  $(-\infty; -6] \cup \{3\}$ .

**Задача 4.** (10 баллов) Решить уравнение:

$$\sqrt{x-15} + \sqrt{x+80} + 2\sqrt{x-15}\sqrt{x+80} = 315 - 2x.$$

**4. Решение:** Сделаем замену  $t = \sqrt{x-15} + \sqrt{x+80}$ , тогда

$t^2 = 2x + 65 + 2\sqrt{x-15}\sqrt{x+80}$  и уравнение примет вид:  $t^2 + t - 380 = 0$ . Корни  $t_1 = 19$

и  $t_2 = -20$ , учтём, что  $t \geq 0$ , тогда получим:  $\sqrt{x-15} + \sqrt{x+80} = 19$ . Слева две монотонно возрастающие функции, следовательно, уравнение имеет не более одного корня, подбором находим, что  $x = 64$ .

**Ответ:** 64.

**Задача 5.** (15 баллов) Назовем число «Новогодним», если в нем все цифры различные, оно не начинается с цифры 2 и при вычеркивании некоторого числа его цифр можно получить 2018. Сколько существует различных семизначных «Новогодних» чисел?

**5. Решение:** Для правильного счета вариантов, необходимо соблюдать правило: перед цифрой 2 должна быть одна из шести цифр – 3, 4, 5, 6, 7 или 9.

Пусть для определенности – это 3, тогда еще две различные цифры из оставшихся пяти ( $5 \cdot 4 = 20$  вариантов) могут находиться в местах, отмеченных точками:  $\dots 32 \dots 0 \dots 1 \dots 8 \dots$ , т.е. на двух из десяти позиций: таких вариантов  $C_6^2 = 15$ . Поэтому всего различных вариантов равно  $20 \cdot 15 = 300$ .

Аналогично вычисляются варианты для пар 42, 52, 62, 72 и 92, т.е. окончательно получаем:  $6 \cdot 300 = 1800$  вариантов.

**Ответ:** 1800.

**Задача 6.** (15 баллов) Спортсмены студенческой команды должны были выйти на спортивный праздник прямоугольным строем по 45 человек в ряд. По прибытии выяснилось, что не все спортсмены взяли с собой нужную спортивную форму и, следовательно, они не смогут принять участие в празднике. Оставшихся спортсменов перестроили так, что число рядов стало на два меньше, а число спортсменов в каждом ряду стало на 48 больше числа новых рядов. Известно, что если бы все спортсмены приняли бы участие в празднике, то их можно было бы выстроить прямоугольным строем так, что число спортсменов в каждом ряду равнялось числу рядов. Сколько спортсменов планировали принять участие в спортивном празднике?

**6. Решение:** Пусть первоначально должно было быть  $n$  рядов. Тогда спортсменов было  $45n$ . Стало рядов  $n - 2$ , число спортсменов в каждом ряду будет  $n - 2 + 48 = n + 46$ . При этом спортсменов стало меньше. Поэтому получаем неравенство:  $(n - 2) \cdot (n + 46) < 45n$ . Отсюда получаем  $n^2 - 2n + 46n - 92 - 45n < 0$ ;  $n^2 - n - 92 < 0$ .

$$\frac{1-3\sqrt{41}}{2} < n < \frac{1+3\sqrt{41}}{2}. \text{ По смыслу задачи } n \geq 3, \text{ поэтому } 3 \leq n \leq \frac{1+3\sqrt{41}}{2}. \text{ Оценим}$$

число справа:  $6 < \sqrt{41} < 7$ ;  $18 < 3\sqrt{41} < 21$ ;  $9,5 < \frac{1+3\sqrt{41}}{2} < 11$ . Следовательно,  $3 \leq n \leq$

11. Но по условию задачи, первоначальное число спортсменов можно было бы выстроить «квадратом», т.е. существует натуральное число  $k$ , такое, что  $45 \cdot n = k^2$ . Далее есть два варианта решения: либо полный перебор:

$$45 \cdot 3 = 135; 45 \cdot 4 = 180; 45 \cdot 5 = 225 - \text{подходит}; 45 \cdot 6 = 270; 45 \cdot 7 = 315; \\ 45 \cdot 8 = 360; 45 \cdot 9 = 405; 45 \cdot 10 = 450; 45 \cdot 11 = 495.$$

Как видим, подходит только  $n=5$  с ответом 225.

Более короткий путь – из равенства  $45 \cdot n = k^2$  сделать вывод, что  $k^2$  делится нацело на 9, а значит  $k$  – делится нацело на 3, т.е.  $k=3p$ . Тогда  $9 \cdot 5 \cdot n = 9 \cdot p^2$  и  $p^2 = 5 \cdot n$ , откуда получаем, что  $n$  кратно 5, а значит  $n=5$  (подходит) или  $n=10$  (не подходит).

**Ответ:** 225.

**Задача 7.** (15 баллов) Найти все значения параметра  $b$ , при которых неравенство  $2b + b^2 - 2b \sin x > \cos^2 x + 2$  выполняется при любом значении  $x$ .

**7. Решение:** Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством и получим:

$\sin^2 x - 2b \sin x + b^2 + 2b - 3 > 0$ , сделаем замену  $t = \sin x$ , тогда неравенство  $t^2 - 2bt + b^2 + 2b - 3 > 0$  должно выполняться при всех значениях  $-1 \leq t \leq 1$ .

$$D = 12 - 8b, x_0 = b, f(1) = b^2 - 2, f(-1) = b^2 + 4b - 2$$

Неравенство верно, если:

$$\left[ \begin{array}{l} D < 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} D = 0 \\ x_0 \notin [-1; 1] \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} D > 0 \\ f(-1) > 0 \\ x_0 < -1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} D > 0 \\ f(1) > 0 \\ x_0 > 1 \end{array} \right. \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} 12 - 8b < 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} 12 - 8b = 0 \\ b \notin [-1; 1] \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 12 - 8b > 0 \\ b^2 + 4b - 2 > 0 \\ b < -1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 12 - 8b > 0 \\ b^2 - 2 > 0 \\ b > 1 \end{array} \right. \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} b > 1,5 \\ \left\{ \begin{array}{l} b = 1,5 \\ b \notin [-1; 1] \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} b < 1,5 \\ (b + 2 + \sqrt{6})(b + 2 - \sqrt{6}) > 0 \\ b < -1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} b < 1,5 \\ (b - \sqrt{2})(b + \sqrt{2}) > 0 \\ b > 1 \end{array} \right. \end{array} \right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b > 1,5 \\ b = 1,5 \\ b < -2 - \sqrt{6} \\ \sqrt{2} < b < 1,5 \end{cases}$$

**Ответ:**  $b \in (-\infty; -2 - \sqrt{6}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$ .

**Задача 8.** (15 баллов) Через центр  $O$  вписанной в треугольник  $ABC$  окружности проведена прямая, параллельная  $AC$ , которая пересекает его боковые стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $K$  соответственно. Вторая окружность вписана в треугольник  $MBK$  и касается его боковой стороны  $MK$  в точке  $E$ , а первая окружность касается стороны  $AB$  в точке  $F$ . Найдите длину отрезка  $EF$ , если периметр треугольника  $MBK$  равен 6, а  $AC=3$ .

**8. Решение:**

Так как  $O \in BB_1$ , то  $BB_1$ - биссектриса  $ABC \Rightarrow OH_1$ - радиус вписанной окружности.  $BH$  – высота треугольника  $ABC$ , поэтому  $\triangle BNB_1 \sim \triangle OH_1B_1$

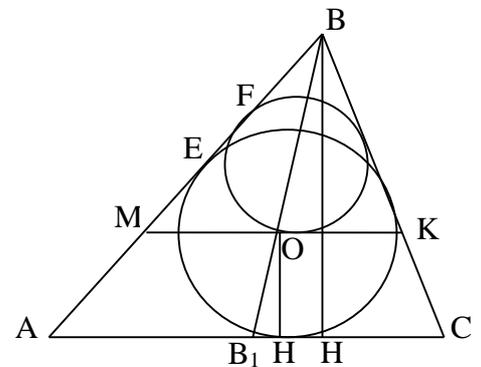
(по двум углам  $\angle B_1$ - общий,  $\angle H = \angle H_1 = 90^\circ$ ). Запишем соотношение подобия

$$k = \frac{BH - OH_1}{BH} = \frac{AC \cdot BH \cdot P - AC \cdot OH_1 \cdot P}{AC \cdot BH \cdot P} = \frac{2S \cdot P - 2S \cdot AC}{2S \cdot P} = \frac{P - AC}{P}, \text{ где}$$

$S$  и  $P$  – площадь и периметр треугольника  $ABC$  соответственно. И еще:  $k = \frac{P_1}{P} = \frac{P - AC}{P} \Rightarrow P_1 = P - AC$ , где  $P_1$  – периметр треугольника  $MBK$ .

По свойству касательной:  $BE = \frac{P}{2} - AC$ ,  $BF = \frac{P_1}{2} - MK = \frac{P_1}{2} - k \cdot AC$ . То есть  $EF = BE - BF$ . Итак,  
 $EF = \frac{(P_1 + AC)}{2} - AC - \frac{P_1}{2} + k \cdot AC = AC(k - 1/2) = 3 \cdot (6/(6 + 3) - 1/2) = 1/2$ .

**Ответ:** 0,5.



**Второй (заключительный) этап олимпиады школьников**  
**«Шаг в будущее» для 8-10 классов по общеобразовательному предмету**  
**«Математика», 10 класс, весна 2018 г.**

**Вариант №11**

**Задача 1.** (10 баллов) Вычислите  $tg^2 x + ctg^2 x$ , если  $tgx - ctgx = -3$

**Задача 2.** (10 баллов) Решить неравенство:  $\frac{15(x+1)^4}{x(x^2+1)} \geq 128$

**Задача 3.** (10 баллов) Решить уравнение:  $\sqrt[4]{514-x} + \sqrt[4]{192+x} = 8$ .

**Задача 4.** (15 баллов) По кругу, на котором расположены точки с номерами от 1 до 2018, начиная с первой точки, движется аппарат и стирает каждую вторую точку по ходу пока не останется одна. Какой на ней будет номер? (Сначала стирается точка с номером 2, затем с номером 4 и т.д.).

**Задача 5.** (15 баллов) Из пункта А в пункт В в 9-00 утра выезжает автобус. В этот же момент из В в А выезжают грузовик и трактор, причём скорость грузовика в два раза больше скорости трактора. Автобус прибывает в В тот же день в 14 часов 50 минут, при этом он встречает грузовик не ранее 11 часов 30 минут утра. Определите время прибытия трактора в пункт А, если между моментами встреч автобуса с грузовиком и автобуса с трактором проходит не менее одного часа.

**Задача 6.** (15 баллов) Можно ли разбить числа 1, 2, 3, ..., 99, 100 на три группы так, чтобы сумма чисел в одной группе делилась на 102, сумма чисел в другой группе делилась на 203, а сумма чисел в третьей группе делилась на 304?

**Задача 7.** (15 баллов) Найти все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $(a+2)x^2 + (|a+3| - |a+1|)x + a = 4$  имеет два различных положительных корня.

**Задача 8.** (15 баллов) В треугольнике ABC с основанием AC=14 и боковыми сторонами AB=13 и BC=15 из центра вписанной окружности строится ломаная линия из трех звеньев так, что конечная ее точка – центр описанной около ABC окружности, а еще две точки M и K лежат на боковых сторонах треугольника ABC. Найдите площадь треугольника MBK, если длина этой ломаной линии наименьшая.

### Решение варианта №11, 10 класс

**Задача 1.** (10 баллов) Вычислите  $tg^2x + ctg^2x$ , если  $tgx - ctgx = -3$

**1. Решение:**  $tg^2x + ctg^2x = (tgx + ctgx)^2 - 2tgx \cdot ctgx = (-3)^2 - 2 = 7$ .

**Ответ:** 7.

**Задача 2.** (10 баллов) Решить неравенство:  $\frac{15(x+1)^4}{x(x^2+1)} \geq 128$

**2. Решение:**  $\frac{15(x+1)^4}{x(x^2+1)} \geq 128$ . В неравенстве  $\frac{15(x^2+2x+1)^2}{x(x^2+1)} \geq 128$ , сделаем замену

$y = x^2 + 1$ , получим:  $\frac{15(y+2x)^2}{xy} \geq 128$ , преобразовывая, получаем:  $\frac{(3y-10x)(5y-6x)}{xy} \geq 0$

$\frac{(3x^2-10x+3)(5x^2-6x+5)}{x(x^2+1)} \geq 0$ , учтем, что два квадратных трехчлена принимают

только положительные значения, тогда:

$$\frac{(3x-1)(x-3)}{x} \geq 0$$

$$x \in \left(0; \frac{1}{3}\right] \cup [3; +\infty)$$

**Ответ:**  $x \in \left(0; \frac{1}{3}\right] \cup [3; +\infty)$ .

**Задача 3.** (10 баллов) Решить уравнение:  $\sqrt[4]{514-x} + \sqrt[4]{192+x} = 8$ .

**3. Решение:**

пусть  $\sqrt[4]{514-x} = u$ ;  $\sqrt[4]{192+x} = v$ .

$$\text{Получаем систему: } \begin{cases} u + v = 8 \\ u^4 + v^4 = 706 \end{cases}$$

Получилась симметрическая система.

Сделаем замену:  $u + v = a = 8$ ;  $u \cdot v = b$ .

Преобразуем левую часть второго уравнения:

$$\begin{aligned}
u^4 + v^4 &= u^4 + 2u^2v^2 + v^4 - 2u^2v^2 = (u^2 + v^2)^2 - 2(uv)^2 = \\
&= (u^2 + 2uv + v^2 - 2uv)^2 - 2b^2 = ((u + v)^2 - 2uv)^2 - 2b^2 = \\
&= (8^2 - 2b)^2 - 2b^2 = 64^2 - 256b + 4b^2 - 2b^2 = \\
&= 2(b^2 - 128b + 64 \cdot 32) = 706
\end{aligned}$$

Решениями данного квадратного уравнения будут  $b=15$  и  $b=113$ . Обратная замена:

$$\begin{cases} u + v = 8 \\ uv = 15 \end{cases}, \text{ откуда либо } u = 3; v = 5, \text{ либо } u = 5; v = 3. \text{ При этом получается либо}$$

$$\begin{cases} 514 - x = 81 \\ 192 + x = 625 \end{cases}, x = 433; \text{ либо } \begin{cases} 514 - x = 625 \\ 192 + x = 81 \end{cases}, x = -111.$$

**Ответ:** -111; 433.

**Задача 4.** (15 баллов) По кругу, на котором расположены точки с номерами от 1 до 2018, начиная с первой точки, движется аппарат и стирает каждую вторую точку по ходу пока не останется одна. Какой на ней будет номер? (Сначала стирается точка с номером 2, затем с номером 4 и т.д.).

**4. Решение:** Если бы точек было  $2^{11} = 2048$ , то осталась бы точка с номером 1, т.к. после очередного круга, количество точек уменьшается в два раза.

Добавим к 2018 еще 30 точек и начнем движение аппарата от точки с номером 1989, тогда через 30 ходов аппарат начнет свое движение от точки с номером  $1989 + 60 - 2048 = 1$ , а на круге останется ровно 2018 точек.

**Ответ:** 1989.

**Задача 5.** (15 баллов) Из пункта А в пункт В в 9-00 утра выезжает автобус. В этот же момент из В в А выезжают грузовик и трактор, причём скорость грузовика в два раза больше скорости трактора. Автобус прибывает в В тот же день в 14 часов 50 минут, при этом он встречает грузовик не ранее 11 часов 30 минут утра. Определите время прибытия трактора в пункт А, если между моментами встреч автобуса с грузовиком и автобуса с трактором проходит не менее одного часа.

**5. Решение:**

Пусть  $x$  единиц пути/час – скорость автобуса,  $y$  единиц пути/час - скорость трактора,  $S$  - длина пути АВ. Тогда скорость грузовика -  $2y$  единиц пути/час. Составим систему уравнений и неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{s}{x} = 5\frac{5}{6} \\ \frac{S}{x+2y} \geq 2,5 \\ \frac{S}{x+y} - \frac{S}{x+2y} \geq 1 \end{array} \right.$$

Из первого уравнения  $S = 5\frac{5}{6} \cdot x = \frac{35}{6} \cdot x$ . Подставим результат во второе неравенство,

получим:  $\frac{35}{6} \cdot x \geq 2,5 \cdot x + 5 \cdot y$ , откуда  $20x \geq 30y$  и  $y \leq \frac{2}{3}x$ .

Подставим  $S$  во второе неравенство, предварительно его преобразовав:

$$S \cdot \frac{x+2y-x-y}{(x+y) \cdot (x+2y)} \geq 1; \quad \frac{35}{6}xy \geq x^2 + 3xy + 2y^2; \quad 6x^2 - 17xy + 12y^2 \leq 0; \quad \frac{2}{3} \leq \frac{y}{x} \leq \frac{3}{4}; \quad \text{т.е.}$$

$y \geq \frac{2}{3}x$ . Из полученных двух оценок следует, что  $y \geq \frac{2}{3}x$ . Найдём время трактора в пути:

$$t = \frac{S}{y} = \frac{\frac{35}{6}x}{\frac{2}{3}x} = \frac{35}{4} = 8 \text{ часов } 45 \text{ минут. Искомое время равно } 9 + (8 \text{ часов } 45 \text{ минут}) = 17 \text{ часов } 45$$

минут.

**Ответ:** 17 часов 45 минут.

**Задача 6.** (15 баллов) Можно ли разбить числа 1, 2, 3, ..., 99, 100 на три группы так, чтобы сумма чисел в одной группе делилась на 102, сумма чисел в другой группе делилась на 203, а сумма чисел в третьей группе делилась на 304?

**6. Решение:**

Сумма всех чисел от 1 до 100 равна  $101 \cdot 50$ . Допустим, что нам удалось разбить числа от 1 до 100 на три группы, сумма чисел в которых равны  $A$ ,  $B$  и  $C$  соответственно. Тогда

$A = 102x, B = 203y, C = 304z$ , где  $x, y$  и  $z$  - целые неотрицательные числа. Получим, что

$$101 \cdot 50 = A + B + C = 102x + 203y + 304z = 101(x + 2y + 3z) + (x + y + z).$$

Следовательно, число  $(x + y + z)$  кратно 101, а так как эта сумма не равна нулю, то

$$(x + y + z) \geq 101. \text{ Тогда, } x + 2y + 3z \geq x + y + z \geq 101, \text{ то есть, } 101(x + 2y + 3z) > 101 \cdot 50.$$

Полученное противоречие показывает, что разбить числа от 1 до 100 на указанные группы невозможно.

**Ответ:** нет.

**Задача 7.** (15 баллов) Найти все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $(a+2)x^2 + (|a+3| - |a+11|)x + a = 4$  имеет два различных положительных корня.

**Решение:**  $(a+2)x^2 + (|a+3| - |a+11|)x + a - 4 = 0.$

При  $a = -2$  уравнение линейное и принимает вид:  $-8x - 6 = 0$ , что не удовлетворяет условию задачи.

При  $a \neq -2$  для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялась следующая система:

$$\begin{cases} D > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (|a+3| - |a+11|)^2 - 4(a+2)(a-4) > 0 \\ \frac{(|a+3| - |a+11|)}{a+2} > 0 \\ \frac{a-4}{a+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

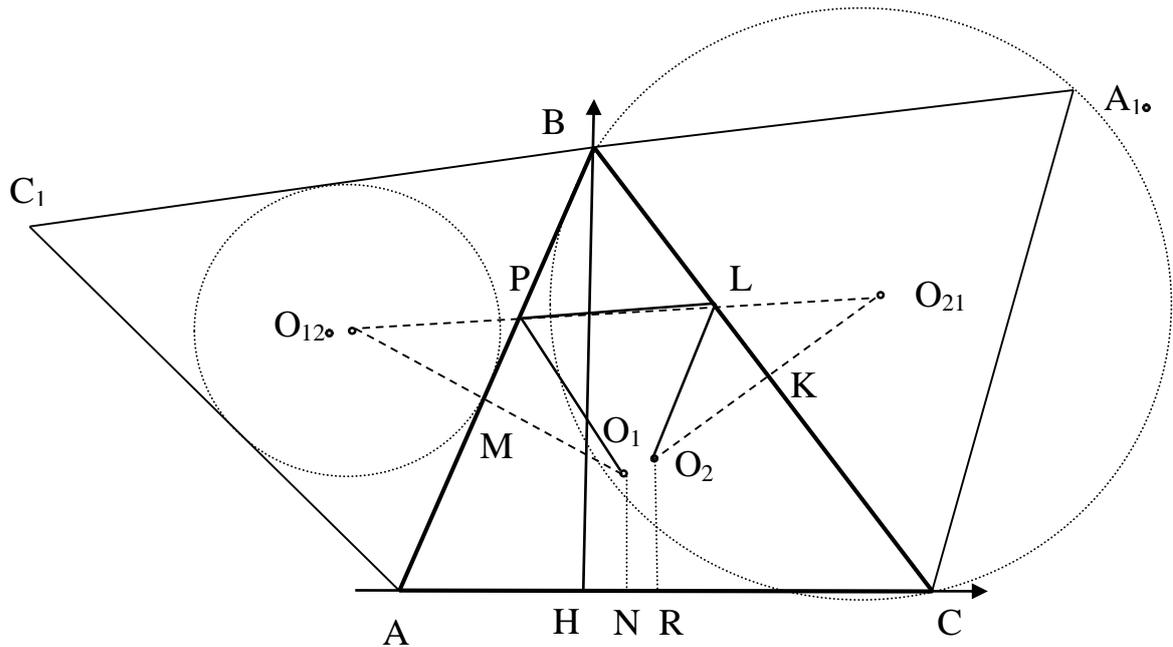
$$\begin{cases} |a+3||a+11| < -a^2 + 18a + 81 \\ \frac{|a+3| - |a+11|}{a+2} < 0 \\ \frac{a-4}{a+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 14a + 33 < -a^2 + 18a + 81 \\ a^2 + 14a + 33 > a^2 - 18a - 81 \\ \frac{(a+3)^2 - (a+11)^2}{a+2} < 0 \\ \frac{a-4}{a+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 - 2a - 24 < 0 \\ 16a > -57 \\ \frac{2a+14}{a+2} > 0 \\ \frac{a-4}{a+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (4; 6)$$

**Ответ:**  $a \in (4; 6)$

**Задача 8.** (15 баллов) В треугольнике ABC с основанием AC=14 и боковыми сторонами AB=13 и BC=15 из центра вписанной окружности строится ломаная линия из трех звеньев так, что конечная ее точка – центр описанной около ABC окружности, а еще две точки M и K лежат на боковых сторонах треугольника ABC. Найдите площадь треугольника MBK, если длина этой ломаной линии наименьшая.

## 8. Решение:



Отразим треугольник  $ABC$  относительно боковых сторон  $AB$  и  $BC$ . Получим еще два треугольника  $ABC_1$  и  $A_1BC$ . При этом центры вписанной и описанной окружностей  $O_1$  и  $O_2$  отразятся в центры вписанной и описанной окружностей  $O_{12}$  и  $O_{21}$  треугольников  $ABC_1$  и  $A_1BC$ , соответственно.

Отрезок, соединяющий  $O_{12}$  и  $O_{21}$ , пересекает боковые стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $P$  и  $L$ , соответственно. Очевидно, что ломаная линия  $O_1PLO_2$  – искомая, т.к. для любых других точек на боковых сторонах треугольника  $ABC$ , путь из  $O_{12}$  в  $O_{21}$  будет отклоняться от прямой  $O_{12}O_{21}$ , т.е. окажется длиннее.

Площадь треугольника  $PBL$  найдем по формуле:  $S_{PBL} = \frac{BP \cdot BL}{BA \cdot BC} \cdot S_{ABC}$ .

Пусть  $BH$  – высота треугольника  $ABC$ . Тогда из условия:

$$BH^2 = 169 - AH^2 = 225 - (14 - AH)^2 \Rightarrow AH = 5, BH = 12.$$

Введем прямоугольную систему координат с осями, направленными вдоль линий основания и высоты треугольника  $ABC$ . Тогда координаты точек:  $A(-5;0)$ ,  $C(9;0)$ ,  $B(0;12)$ .  $N$  – точка касания вписанной окружности треугольника  $ABC$  с его основанием. Следовательно,  $AN = p - BC$ , где  $p$  – полупериметр треугольника  $ABC$ , т.е.  $AN = 21 - 15 = 6$  и  $N(1;0)$ .  $O_2R$  – серединный перпендикуляр к  $AC$ , поэтому  $R(2;0)$ .

Найдем площадь треугольника  $ABC$  по формуле Герона:  $S_{ABC} = \sqrt{21 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 6} = 84$ . Тогда радиусы вписанной и описанной окружностей соответственно равны 4 и 8,125, т.е.  $O_1(1;4)$  и  $O_2(2;4,125)$ .  $M$  – точка касания вписанной окружности треугольника  $ABC$  с его стороной  $AB$ . Следовательно  $AM = AN$  (по свойству касательных), поэтому  $AM:MB=6:7$ , следовательно

$M\left(-\frac{35}{13}; \frac{72}{13}\right)$ , а  $O_{12}\left(-\frac{83}{13}; \frac{92}{13}\right)$ .  $O_2O_{21}$  – серединный перпендикуляр к ВС, следовательно  $BK=KC$  и  $K(4,5;6)$ , а  $O_{21}(7; 7,875)$ .

Уравнения прямых АВ и АС:  $y = \frac{12}{5}x + 12$  и  $y = -\frac{4}{3}x + 12$ . Составим уравнение прямой  $O_{12}O_{21}$ :  $y = \frac{83}{1392}x + \frac{134953}{187746}$ , обозначим ее как  $y = kx + b$ .

Найдем абсциссы точек Р и L:  $P_x = \frac{5(12-b)}{5k-12}$ ,  $L_x = \frac{3(12-b)}{3k+4}$ .

$$S_{PBL} = \frac{BP \cdot BL}{BA \cdot BC} \cdot S_{ABC} = \frac{-P_x \cdot L_x \cdot 84}{45} = \frac{28(12-b)^2}{(12-5k)(3k+4)}.$$

**Ответ:**  $S_{PBL} = \frac{28(12-b)^2}{(12-5k)(3k+4)}$ , где  $k = \frac{83}{1392}$ ,  $b = \frac{134953}{187746}$ .

## Критерии проверки заданий 10 класса

### Задача 1.

Баллы	
10	Обоснованно получен правильный ответ
5	Преобразование начато, показано знание формулы $tgx \cdot ctg = 1$ . При выполнении преобразования допущена арифметическая ошибка.
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

### Задача 2.

Баллы	
10	Обоснованно получен правильный ответ
7	При обоснованно полученном решении ответ отличается от верного исключением точек $1/3$ и $3$
3	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

### Задача 3.

Баллы	
10	Обоснованно получен правильный ответ
5	Сделаны необходимые замены переменных и эти переменные найдены (в предложенном решении найдены как минимум значения $b(uv)$ ), т.е. задача сведена к ситуации, когда окончание решения очевидно просматривается
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

### Задача 4.

Баллы	
10	Обоснованно получен правильный ответ
7	Получено необходимое соотношение, но решение не доведено до конца или получен неверный ответ из-за арифметической или временной ошибки
3	Вычисляли перебором и ошиблись в конце.
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

### Задача 5.

Баллы	
15	Обоснованно получен правильный ответ
10	Получено необходимое соотношение, но решение не доведено до конца или получен неверный ответ из-за арифметической или временной ошибки
5	Верно составлена система уравнений и неравенств (или все необходимые уравнения и неравенства выписаны по отдельности)
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

### Задача 6.

Баллы	
15	Обоснованно получен правильный ответ
10	Доказательство факта начато, но противоречие не получено.
5	Верно сделан вывод о том, что каждая из сумм, о которых говорится в задаче, кратна 101.
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

### Задача 7.

Баллы	
15	Обоснованно получен правильный ответ
10	Обоснованно получен ответ, неверный из-за арифметической ошибки или отличающийся от верного включением/исключением конечного числа точек
5	Верно составлена система условий на параметр
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

### Задача 8.

Баллы	
15	Обоснованно получен правильный ответ
8	Правильно построена искомая ломаная и есть дальнейшие шаги, которые могли бы привести к правильному решению.
3	Правильно построена искомая ломаная.
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий