"УТВЕРЖДАЮ"

Ректор МГТУ им. Н.Э. Баумана

________________А.А. Александров

"_____"_______________2017 г.

Отборочный этап академического соревнования Олимпиады школьников

«Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика»

Типовой вариант задания

1. Имеется 2-литровая банка, полностью наполненная молоком 4% жирности, и 3-литровая банка с 2 литрами обезжиренного молока. Назовем «обменом» такую операцию: сначала 3-литровую банку доливают до краев содержимым 2-литровой банки, затем делают наоборот. Какое минимальное количество «обменов» нужно совершить, чтобы концентрация жира в банках различалась менее чем на 0,01%? (8 баллов)

2. Решите уравнение $\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{4x^2+x-18}=\sqrt{3x^2+3x-18}.$ (8 баллов)

3. Какое наибольшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_{17}=52,\ a_{30}=13$? (8 баллов)

4. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} 2\sin\dfrac{\pi(y+3)}{6}=\sqrt{2\sin^2\dfrac{\pi x}{6}-4\sin^2\dfrac{\pi y}{6}\cos\dfrac{\pi x}{3}+4\cos\dfrac{\pi x}{3}}, \\ |x|+|y-3|\le 3,\quad y<x+2. \end{cases}$$ (8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{|x+1|-\sqrt{3x+7}}{\sqrt{4-2x}-\sqrt{x^2+x}}\ge 0.$ (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x)=12g(x)-g^2(x)-32,$ где

$g(x)=8\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\cos(x^2+2x+2)\right).$ (10 баллов)

7. Окружность радиуса $R_1=3$ вписана в прямоугольный треугольник ABC с углом $\angle B=90^\circ$. Вторая окружность радиуса $R_2=1$ касается первой окружности и отрезков AC и AB. Найдите длины сторон треугольника ABC. (12 баллов)

8. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, координаты вершин которого удовлетворяют уравнению $|y|=(x+2)(4-x),\ -2<x<4$, а стороны параллельны координатным осям? (12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений $y=\dfrac{x+|x|}{x};\ (x-a)^2=y+a$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (12 баллов)

10. Найдите площадь сечения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через диагональ AC_1 и параллельной диагонали основания BD, если расстояние от BD до секущей плоскости равно l, а другая диагональ основания AC образует с секущей плоскостью угол 45° и с диагональю AC_1 – угол 60°. (12 баллов)

1. Обозначим через c_k и C_k концентрации жира (в %) в меньшей и в большей банке после k «обменов». В начале $c_0 = 4$, $C_0 = 0$. Если в трехлитровую банку с 2 л молока с процентным содержанием жира, равным C_k, доливают 1 л молока с процентным содержанием жира, равным c_k, то жирность молока в трехлитровой банке становится равной $C_{k+1} = \frac{2C_k + c_k}{3}$. В результате обратного переливания 1 л молока концентрации C_{k+1} в двухлитровую банку, концентрация жира в ней становится равной $c_{k+1} = \frac{1}{2}\left(c_k + \frac{2C_k + c_k}{3}\right) = \frac{2c_k + C_k}{3}$. В итоге имеем $c_{k+1} - C_{k+1} = \frac{2c_k + C_k}{3} - \frac{2C_k + c_k}{3} = \frac{c_k - C_k}{3}$. Следовательно, $c_k - C_k = 3^{-k}(c_0 - C_0) = 4 \cdot 3^{-k}$. Решаем неравенство $c_k - C_k = 4 \cdot 3^{-k} < 0{,}01 \iff 400 < 3^k$. Так как $3^5 = 243 < 400 < 729 = 3^6$, то минимальное число обменов $k = 6$. **Ответ:** 6 раз.

2. Решим уравнение $\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{4x^2 + x - 18} = \sqrt{3x^2 + 3x - 18}$.

Замена: $b = x^2 - 2x,\ c = 4x^2 + x - 18,\ c - b = 3x^2 + 3x - 18$.

Тогда имеем: $\sqrt{b} + \sqrt{c} = \sqrt{c-b},\ b \ge 0,\ c \ge 0,\ c - b \ge 0$.

Возводим в квадрат: $b + c + 2\sqrt{bc} = c - b$, или $\sqrt{bc} = -b \implies b \le 0$. Учитывая ОДЗ, имеем $b = 0$ и $c \ge 0$.

$$\begin{cases} x^2 - 2x = 0; \\ 4x^2 + x - 18 \ge 0. \end{cases} \implies x = 0 \text{ — не подходит, } x = 2 \text{ — единственное решение.}$$

Ответ: 2.

3. Если a – первый член и d – разность арифметической прогрессии,

$$\begin{cases} a + 16d = 52, \\ a + 29d = 13 \end{cases} \iff d = -3,\ a = 100.$$

Сумма первых n членов арифметической прогрессии S_n принимает наибольшее значение, если $a_n > 0$, а $a_{n+1} \le 0$. Так как $a_n = a + d(n-1)$, то из неравенства $100 - 3(n-1) > 0$ найдем $n = [103/3] = 34$. Тогда $\max S_n = S_{34} = 0{,}5 \cdot (100 + 100 - 3 \cdot 33) \cdot 34 = 1717$. **Ответ:** 1717.

4. Найдем все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} 2\sin\frac{\pi(y+3)}{6} = \sqrt{2\sin^2\frac{\pi x}{6} - 4\sin^2\frac{\pi y}{6}\cos\frac{\pi x}{3} + 4\cos\frac{\pi x}{3}}, \\ |x| + |y-3| \le 3, \quad y < x + 2. \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение системы $2\sin\frac{\pi(y+3)}{6} = \sqrt{2\sin^2\frac{\pi x}{6} - 4\sin^2\frac{\pi y}{6}\cos\frac{\pi x}{3} + 4\cos\frac{\pi x}{3}}$. Оно равносильно уравнению $2\cos\frac{\pi y}{6} = \sqrt{2\sin^2\frac{\pi x}{6} + 4\cos^2\frac{\pi y}{6}\cos\frac{\pi x}{3}}$ или

$2\cos\frac{\pi y}{6} = \sqrt{1 + 4\cos^2\frac{\pi y}{6}\cos\frac{\pi x}{3} - \cos\frac{\pi x}{3}}$. При условии $\cos\frac{\pi y}{6} \ge 0$, т.е. при $-3 + 12k \le y \le 3 + 12k,\ k \in Z$, имеем

$4\cos^2\frac{\pi y}{6}-1-4\cos^2\frac{\pi y}{6}\cos\frac{\pi x}{3}+\cos\frac{\pi x}{3}=0 \Leftrightarrow (4\cos^2\frac{\pi y}{6}-1)(1-\cos\frac{\pi x}{3})=0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{\pi y}{6}=1$ или $\cos\frac{\pi x}{3}=1 \Leftrightarrow y=2+12k,\ y=-2+12k,\ k\in Z,$ или $x=6n,\ n\in Z$. Целочисленными решениями системы будут точки $(l;\,2+12k),\,(l;-2+12k),\,(6n;\,m),\ l,k,n,m\in Z,$ $-3+12s\le m\le 3+12s,\ s\in Z,$ лежащие в квадрате с центром в точке $(0;3)$, стороной $3\sqrt{2}$, диагоналями параллельными осям координат и в полуплоскости $y<x+2$. Такими точками будут $(0;0),(0;1),(1;2),(2;2)$. **Ответ:** $(0;0),(0;1),(1;2),(2;2)$.

5. Решим неравенство $\frac{|x+1|-\sqrt{3x+7}}{\sqrt{4-2x}-\sqrt{x^2+x}}\ge 0.$

ОДЗ числителя и знаменателя: $3x+7\ge 0,\quad x(x+1)\ge 0,\quad 4-2x\ge 0,\ \Rightarrow$
$x\in[-7/3;-1]\cup[0;2]$.

На ОДЗ исходное неравенство эквивалентно следующему

$$\frac{(x+1)^2-3x-7}{x^2+x-(4-2x)}\le 0 \Rightarrow \frac{x^2-x-6}{(x+4)(x-1)}\le 0 \Rightarrow \frac{(x+2)(x-3)}{(x+4)(x-1)}\le 0 \Rightarrow x\in(-4;-2]\cup(1;3].$$

Окончательно имеем $x\in[-7/3;-2]\cup(1;2]$.

Ответ: $x\in[-7/3;-2]\cup(1;2]$.

6. Найдем множество значений функции $f(x)=12g(x)-g^2(x)-32,$ где $g(x)=8\cos\left(\frac{\pi}{3}\cos(x^2+2x+2)\right).$ Имеем $g(x)=8\cos\left(\frac{\pi}{3}\cos((x+1)^2+1)\right).$ Поскольку $(x+1)^2+1\in[1;\infty)$, то $\cos((x+1)^2+1)\in[-1;1],\ \frac{\pi}{3}\cos((x+1)^2+1)\in[-\pi/3;\pi/3]$.

Следовательно, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\cos((x+1)^2+1)\right)\in[1/2;1]\Rightarrow 8\cos\left(\frac{\pi}{4}\sin((x+1)^2+1)\right)\in[4;8]$.

Найдем множество значений функции $f(x)=12g(x)-g^2(x)-32,$ сделаем замену переменного $t=g(x).$ Тогда задача сводится к нахождению множества значений функции $y=12t-t^2-32,$ где $t\in[4;8]$. Так как $y=4-(t-6)^2,$ то при $t\in[4;8]$ имеем $y\in[0;4]$

Ответ: $[0;4]$.

7. Имеем окружность радиуса $R_1=3$, вписанную в прямоугольный треугольник ABC с углом , окружность радиуса $R_2=1$, касающуюся первой окружности и отрезков AC и AB.

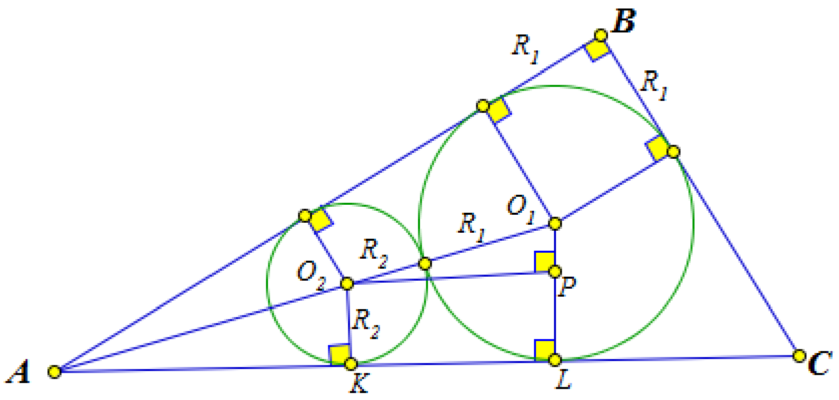
1) Центры O_1 и O_2 окружностей лежат на биссектрисе угла A, треугольники ΔAO_2K и ΔAO_1L подобны, и $\frac{AK}{AL}=\frac{R_2}{R_1}=\frac{1}{3}$. Тогда $AK=\frac{1}{2}KL$.
2) По теореме Пифагора для треугольника O_2O_1P, используя равенство $O_2P=KL$, имеем $KL^2+(R_1-R_2)^2=O_1O_2{}^2 \Rightarrow KL^2+(R_1-R_2)^2=(R_1+R_2)^2\Rightarrow KL^2=4R_1R_2$

$\Rightarrow$ $KL = 2\sqrt{3}$, $AK = \sqrt{3}$. Тогда $AB = AL + R_1 = 3\sqrt{3} + 3$,

$AC = AL + LC = 3\sqrt{3} + LC$, $BC = LC + R_1 = 3 + LC$.

3) По условию треугольник ABC прямоугольный, по теореме Пифагора имеем $AB^2 + BC^2 = AC^2$, или $(3\sqrt{3}+3)^2 + (3+LC)^2 = (3\sqrt{3}+LC)^2$. Тогда $LC = 6 + 3\sqrt{3}$, $AC = 6 + 6\sqrt{3}$, $BC = 9 + 3\sqrt{3}$.

Ответ: $AB = 3\sqrt{3} + 3$, $AC = 6 + 6\sqrt{3}$, $BC = 9 + 3\sqrt{3}$.



8. Составим функцию для вычисления площади прямоугольника

$S(x) = 2\left(6 - 2(x+2)\right)(x+2)(4-x) =$

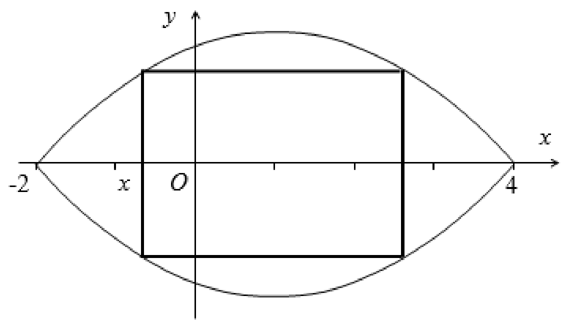
$4(1-x)\left(8 + 2x - x^2\right) =$

$4\left(8 + 2x - x^2 - 8x - 2x^2 + x^3\right) =$

$4\left(x^3 - 3x^2 - 6x + 8\right)$.

$S'(x) = 4(3x^2 - 6x - 6) = 12\left(x^2 - 2x - 2\right)$

$S'(x) = 0$ при $x = 1 \pm \sqrt{3}$; нужно взять меньшее значение $x = 1 - \sqrt{3}$.



$S_{\max} = S\left(1-\sqrt{3}\right) = 4\left(1 - 1 + \sqrt{3}\right)\left(3 - \sqrt{3}\right)\left(3 + \sqrt{3}\right) = 24\sqrt{3}$. Ответ: $24\sqrt{3}$ ед^2.

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений $y = \dfrac{x + |x|}{x}$; $(x-a)^2 = y + a$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

Решение.

I. При $x > 0$ $y = 2$, $x^2 - 2ax + a^2 - a - 2 = 0$ (*). Уравнение (*) имеет два различных положительных корня $x_{1,2} = a \pm \sqrt{a+2}$, если:

$$\begin{cases} D/4 = a + 2 > 0, \\ a > 0, \\ a^2 - a - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -2, \\ a > 0, \\ \left[\begin{array}{l} a < -1, \\ a > 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow a > 2.$$

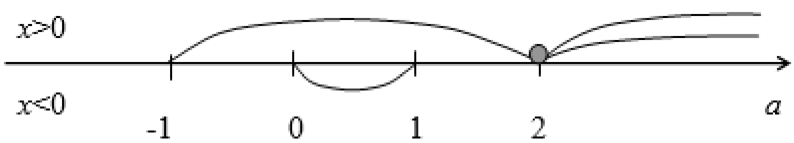
Уравнение (*) имеет один положительный корень $x_{1,2}=a+\sqrt{a+2}$, если: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D=0,\\ a>0,\end{cases}\\ a^2-a-2<0,\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l} a=-1,\\ a=2\end{array}\right.\\ a>0\end{cases}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow -1<a\le 2$.

II. При $x<0,\ y=0,\ x^2-2ax+a^2-a=0$ (**). Уравнение (**) не может иметь двух отрицательных корней, так как система неравенств $\begin{cases} D/4=a>0,\\ a<0,\\ a^2-a>0.\end{cases}$ решений не имеет.

Уравнение (**) имеет один отрицательный корень $x=a-\sqrt{a}$, если

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D/4=a=0,\\ a<0,\end{cases}\\ a^2-a<0,\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l} a=0,\\ a=1\end{array}\right.\\ a<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow 0<a<1.$$

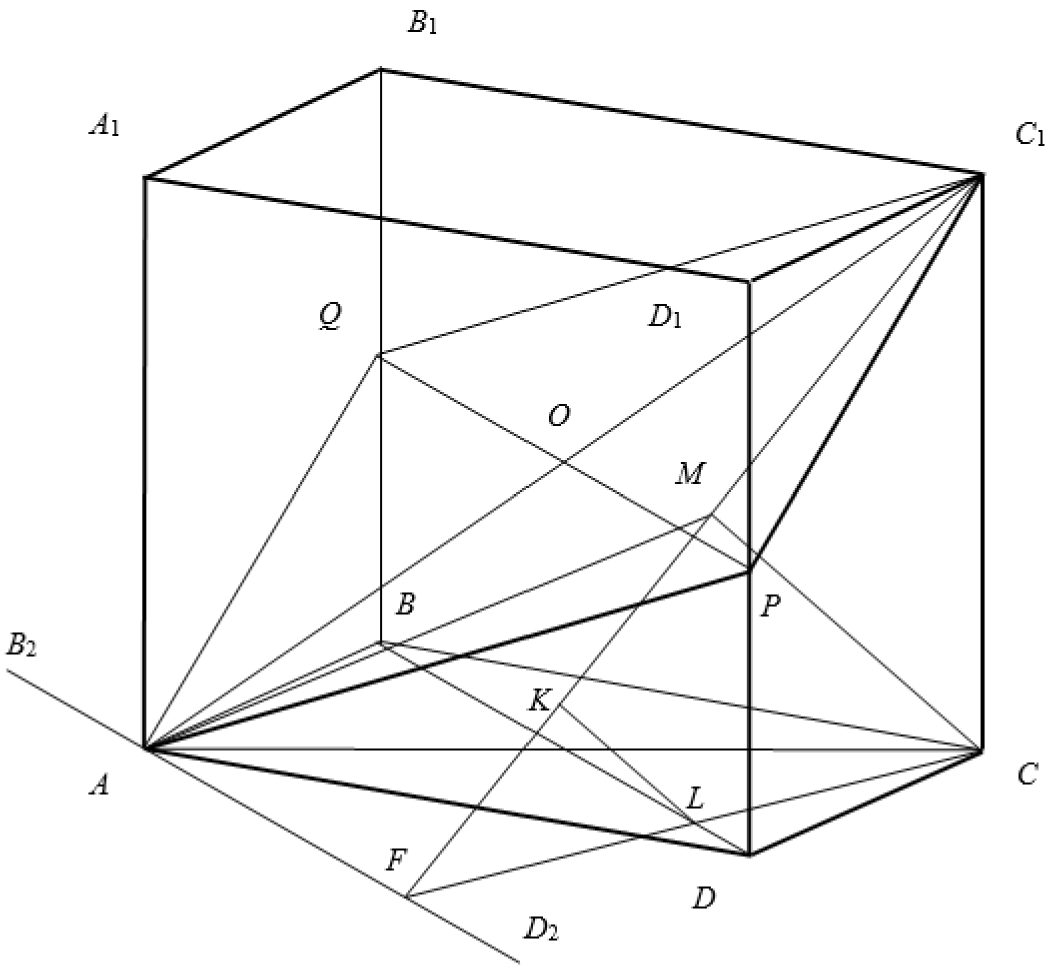


Ответ: при $a\in(-1;0]\cup[1;2]$ $x=a+\sqrt{a+2},\ y=2$;

при $(0;1)$ $x_1=a+\sqrt{a+2},\ y_1=2;\ x_2=a-\sqrt{a};\ y_2=0$;

при $a\in(2;+\infty)$ $x_{1,2}=a\pm\sqrt{a+2},\ y_{1,2}=2$.

10. Найдем площадь сечения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через диагональ AC_1 и параллельной диагонали основания BD, если расстояние от BD до секущей плоскости равно l, а другая диагональ основания AC образует с секущей плоскостью угол $\gamma=45°$ и с диагональю AC_1 – угол $\alpha=60°$.



Проведем $(B_2D_2)\|BD,\ A\in(B_2D_2);\ CF\perp(B_2D_2),\ LK\perp C_1F$, где $L = CF\cap BD$, и $CM\perp C_1F$. Тогда $FC_1\perp B_2D_2$ и $LK = l, CM = 2l$. Обозначим $\alpha = \angle C_1AC$ и $\gamma = \angle CAM$.

$AC = BD = PQ = \dfrac{MC}{\sin\gamma} = \dfrac{2l}{\sin\gamma}$; $AC_1 = \dfrac{AC}{\cos\alpha} = \dfrac{2l}{\cos\alpha\cdot\sin\gamma}$; $CC_1 = AC\ \mathrm{tg}\alpha = \dfrac{2l\ \mathrm{tg}\alpha}{\sin\gamma}$.

$MC_1 = \sqrt{CC_1^2 - MC^2} = \dfrac{2l}{\sin\gamma}\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha - \sin^2\gamma}$. $\dfrac{MC_1}{CC_1} = \dfrac{CC_1}{FC_1}$, отсюда $FC_1 = \dfrac{CC_1^2}{MC_1}$, т.е.

$FC_1 = \dfrac{2l\cdot\mathrm{tg}^2\alpha}{\sin\gamma\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\gamma}}$. $S_{PAQC_1} = \dfrac{1}{2}\cdot PQ\cdot FC_1 = \dfrac{2l^2\mathrm{tg}^2\alpha}{\sin^2\gamma\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\gamma}}$.

Ответ: $\gamma = 45°,\ \alpha = 60°,\ S = 12\sqrt{2}l^2/\sqrt{5}$.