Первый (отборочный) этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету
«Математика», осень 2017 г.

Вариант № 8

1. Участники Олимпиады «Шаг в будущее» соревновались по математике, физике и информатике. При этом призерами по математике стали 30 человек, по физике – 31, по информатике – 32, по всем трем предметам – 4, по математике или физике – 52, по математике или информатике – 51, по физике или информатике – 53. Сколько школьников стали призерами хотя бы по одному из трех предметов? (8 баллов)

2. Решите уравнение $x^2 + y^2 + 4 + \sqrt{xy-48} = 4|x-y| + 2xy$. (8 баллов)

3. Найдите отношение сорокового члена арифметической прогрессии к четырнадцатому ее члену, если сумма восьми последовательных членов этой прогрессии, начиная с шестого составляет 20% суммы ее начальных восьми членов. (8 баллов)

4. Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{2+\cos 2x+\sqrt{3}\operatorname{ctg} x}}{\operatorname{ctg} x} = \sqrt{3}\sin x + \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{2(5x-x^2-25)(2x^2+17x+35)}{(x^3+125)\sqrt{4x^2+28x+49}} \le x^2+3x-2.$

(10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{9}\left(4{,}5 - 2\cos x + \cos 2x\right)\right).$ (10 баллов)

7. Точка D лежит на окружности радиуса $4\sqrt{2}$, описанной около равнобедренного треугольника ABC. Высота этого треугольника, проведенная к основанию BC, равна $2\sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника DBC, если $DB = 8$. (12 баллов)

8. Какая наименьшая площадь может быть у треугольника OAB, если O - начало координат, координаты вершин A и B удовлетворяют уравнению $3|y| - y + x = 0$, а прямая AB проходит через точку $M(-1;0)$? (12 баллов)

9. Укажите все значения *a,* при которых уравнение

$$\left(x^2 - 4x - 21 + \left(\frac{|x-2|}{x-2} + \frac{|x-6|}{x-6} + a\right)^2\right)\sqrt{a-7x+39} = 0$$

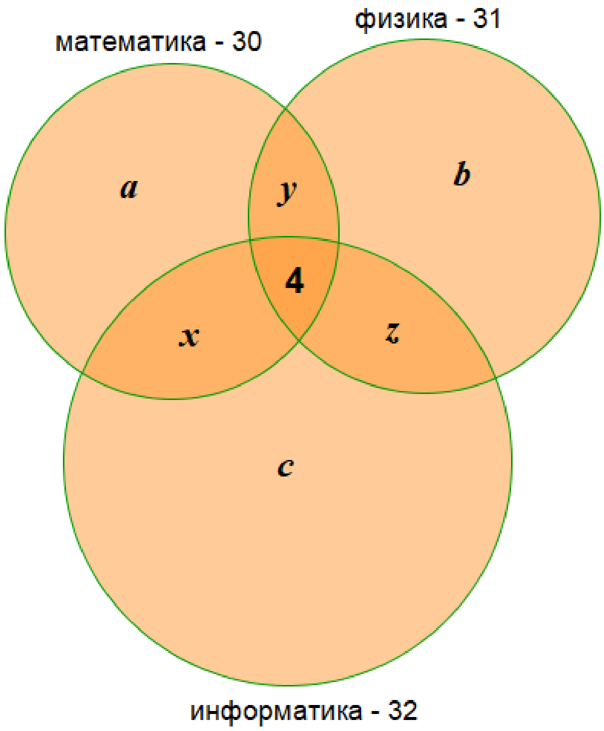
имеет ровно два различных решения, и решите его при каждом a. (12 баллов)

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны 4, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины стороны основания AC и бокового ребра TB и параллельной медиане TD боковой грани ATB, если расстояние между TD и секущей плоскостью равно $1/3$. (12 баллов)

Решение варианта №8

1. Решение:

Пусть x – призеры только по двум предметам: математике и информатике, y – призеры только по двум предметам: математике и физике, z – призеры только по двум предметам: физике и информатике, a – призеры только по математике, b – призеры только по физике, c – призеры только по информатике. Тогда



$$\begin{cases} x+y+a+4=30, \\ y+z+b+4=31, \\ x+z+c+4=32, \\ x+y+z+a+b+4=52, \\ x+y+z+a+c+4=51, \\ x+y+z+b+c+4=53, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+a=26, \\ y+z+b=27, \\ x+z+c=28, \\ x+y+z+a+b=48, \\ x+y+z+a+c=47, \\ x+y+z+b+c=49, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2(x+y+z)+a+b+c=81, \\ 3(x+y+z)+2(a+b+c)=144, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=18, \\ a+b+c=45, \end{cases}$$

Отсюда получаем, что призерами хотя бы по одному предмету стали $x+y+z+a+b+c+4=67$ участника.

Ответ: 67.

2. Решение:

$$x^2+y^2+4+\sqrt{xy-48}=4|x-y|+2xy \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2-4|x-y|+4+\sqrt{xy-48}=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-y)^2-4|x-y|+4+\sqrt{xy-48}=0 \Leftrightarrow (|x-y|-2)^2+\sqrt{xy-48}=0 \Leftrightarrow \text{(оба слагаемые неотрицательны)}$$

$$(|x-y|-2)^2=0 \text{ и } \sqrt{xy-48}=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |x-y|=2, \\ xy-48=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-y=2, \\ x-y=-2, \end{array}\right. \\ xy-48=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=x-2, \\ y=x+2, \end{array}\right. \\ xy-48=0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=x-2, \\ xy-48=0, \end{cases} \\ \begin{cases} y=x+2, \\ xy-48=0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=x-2, \\ x^2-2x-48=0, \end{cases} \\ \begin{cases} y=x+2, \\ x^2+2x-48=0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-6,\ y=-8, \\ x=8,\ y=6, \\ x=-8,\ y=-6, \\ x=6,\ y=8. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-6;-8)$, $(8;6)$, $(-8;-6)$, $(6;8)$.

3. Решение:

$$20=\frac{S_{6-13}}{S_8}\cdot 100 \Leftrightarrow 0,2=\frac{2a_6+7d}{2a_1+7d} \Leftrightarrow 0,2=\frac{2a_1+17d}{2a_1+7d} \Leftrightarrow 0,2=\frac{2a_1/d+17}{2a_1/d+7} \Leftrightarrow \frac{a_1}{d}=-\frac{39}{4}$$

$$\frac{a_{40}}{a_{14}}=\frac{a_1+39d}{a_1+13d}=\frac{a_1/d+39}{a_1/d+13}=\frac{-39+156}{-39+52}=\frac{117}{13}=9.$$

Ответ: 9.

4. Решение:

Отметим, что $\sin x\neq 0, \cos x\neq 0,$ и умножим обе части уравнения на $\operatorname{ctg} x$. Получим $\sqrt{2+\cos 2x+\sqrt{3}\operatorname{ctg} x}=\sin x+\sqrt{3}\cos x$. При условии $\sin x+\sqrt{3}\cos x\geq 0$ обе части этого уравнения можно возвести в квадрат. Так как $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$, то неравенство справедливо, если $-\frac{\pi}{3}+2\pi n\leq x\leq\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in Z$. При найденных ограничениях и условиях $\sin x\neq 0, \cos x\neq 0,$ уравнение равносильно следующему:

$2+\cos 2x+\sqrt{3}\operatorname{ctg} x=\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+3\cos^2 x$, $\operatorname{ctg} x-2\sin x\cos x=0$,

$\frac{\cos x}{\sin x}-2\sin x\cos x=0$, $\cos x\left(\frac{1}{\sin x}-2\sin x\right)=0$. Таким образом, приходим к уравнению

$\sin^2 x=\frac{1}{2}, \sin x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$. Учитывая ограничения, получаем решения исходного уравнения: $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\quad n\in Z$. **Ответ:** $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\quad n\in Z$.

5. Решение:

$$\frac{-2(x^2-5x+25)(2x^2+17x+35)}{(x^3+125)\sqrt{4x^2+28x+49}}\leq x^2+3x-2. \Leftrightarrow \frac{-2(x^2-5x+25)(x+5)(2x+7)}{(x+5)(x^2-5x+25)\sqrt{(2x+7)^2}}\leq x^2+3x-2 \Leftrightarrow$$

$$x\neq -5,\quad \frac{-2(2x+7)}{|2x+7|}\leq x^2+3x-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-3,5;+\infty),\\ x^2+3x\geq 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-\infty;-5)\cup(-5;-3,5),\\ x^2+3x-4\geq 0.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$x\in(-\infty;-5)\bigcup(-5;-4]\cup(-3,5;-3]\cup[0;+\infty)$.

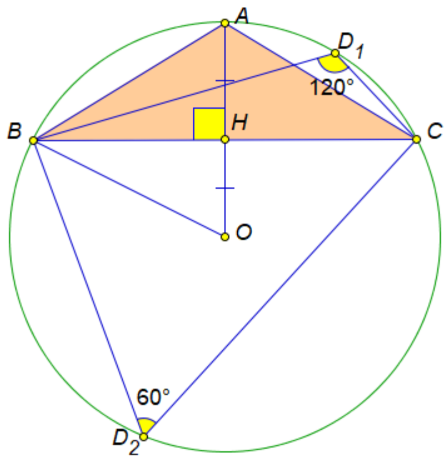
Ответ: $x\in(-\infty;-5)\bigcup(-5;-4]\cup(-3,5;-3]\cup[0;+\infty)$.

6. Решение:

Найдем множество значений функции $z = g(x) = 4{,}5 - 2\cos x + \cos 2x$. Функция $g(x)$ определена на всей числовой оси. Сделаем замену переменного. Пусть $t = \cos x$. Тогда $z = 4{,}5 - 2t + (2t^2 - 1) = 3{,}5 + 2(t^2 - t) = 3 + 2(t - 0{,}5)^2$ при $t \in [-1; 1]$, и $E_g = [3; 7{,}5]$. Функция $u = \frac{\pi}{9} z$ принимает все значения из промежутка $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$. Множество значений функции $f(x)$ совпадает с множеством значений функции $y = \sin u$, где $u \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$. Следовательно, $E_f = [0{,}5; 1]$

Ответ: $E_f = [0{,}5; 1]$.

7. Решение:



Пусть O - центр описанной около равнобедренного треугольника ABC окружности. Тогда $AO = 4\sqrt{2}$, AH - высота треугольника, проведенная к основанию BC, $AH = 2\sqrt{2}$, $AH = HO$, треугольник AOB равносторонний, $AB = AC = 4\sqrt{2}$, $BC = 4\sqrt{6}$. Поскольку $AB = 2AH$, то угол $\angle ABC = 30°$. Вписанный в окружность угол BDC опирается либо на ту же дугу, что и угол BAC, и $\angle BDC = 120°$, либо BDC опирается на дополнительную дугу к той, на которую опирается угол BAC, следовательно, $\angle BDC = 60°$. Пусть $DC = x$. По теореме косинусов для треугольника BDC имеем

1) $BC^2 = DB^2 + DC^2 - 2DB \cdot DC \cos 120°$, или

$(4\sqrt{6})^2 = 8^2 + x^2 + 16 \cdot x \cdot \frac{1}{2}$, или $x^2 + 8x - 32 = 0$, $x = 4\sqrt{3} - 4$, второй ответ не подходит. $S_1 = \frac{1}{2} DB \cdot DC \sin 120° = 16(\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8(3 - \sqrt{3})$,

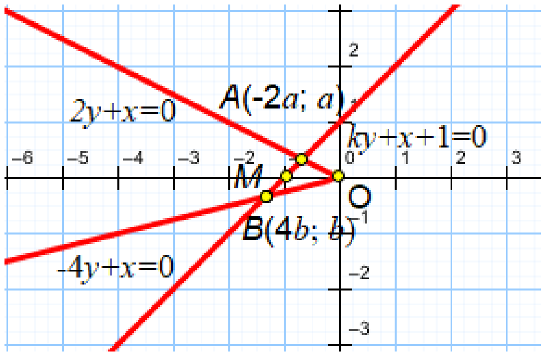
2) $BC^2 = DB^2 + DC^2 - 2DB \cdot DC \cos 60°$, или $(4\sqrt{6})^2 = 8^2 + x^2 - 16 \cdot x \cdot \frac{1}{2}$, $x^2 - 8x - 32 = 0$, $x = 4\sqrt{3} + 4$, второй ответ не подходит. $S_2 = \frac{1}{2} DB \cdot DC \sin 60° = 16(\sqrt{3} + 1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8(3 + \sqrt{3})$. **Ответ:** $8(3 \pm \sqrt{3})$.

8. Решение:

$S_{AOB} = S_{AOM} + S_{BOM}$, $A(-2a; a)$, $B(4b; b)$,

$S_{AOM}=\frac{1}{2}OM\cdot a$, $S_{BOM}=\frac{1}{2}OM\cdot(-b)$, $OM=1$,

$S_{AOB}=\frac{a-b}{2}$. Прямая AB проходит через точку M, ее уравнение $ky+x+1=0$. Выразим переменные a и b через параметр k, подставляя координаты точек A и B в уравнение прямой AB:



$ka-2a+1=0,\ \ a=\frac{1}{2-k}$,

$kb+4b+1=0,\ b=-\frac{1}{4+k}$. Выразим площадь треугольника

$S_{AOB}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2-k}+\frac{1}{4+k}\right)=\frac{3}{8-2k-k^2}=\frac{3}{9-(k+1)^2}$. Поскольку $9-(k+1)^2\le 9$, то $S_{AOB}=\frac{3}{9-(k+1)^2}\ge\frac{1}{3}$. Наименьшее значение $\min S_{AOB}=1/3$ при $k=-1$.

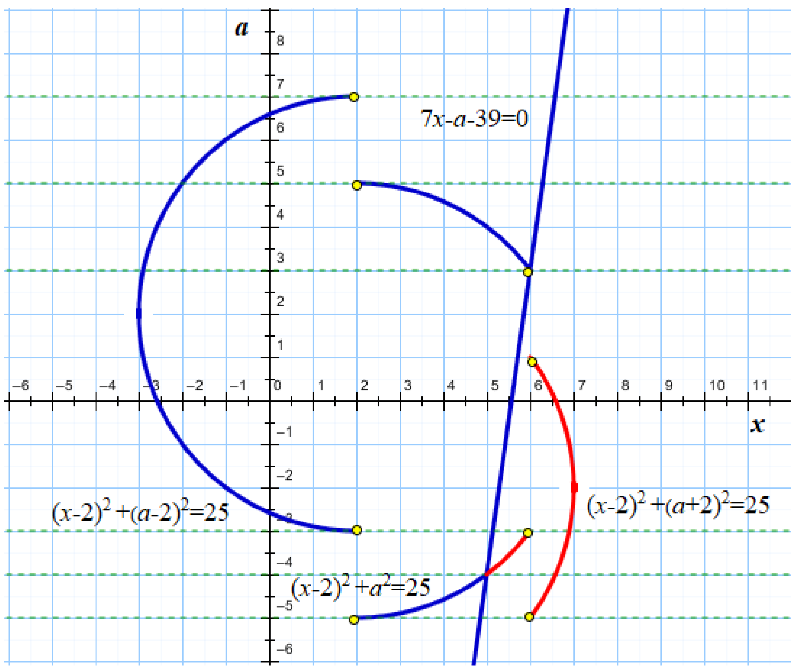
Ответ: $1/3$.

9. Решение:

ОДЗ: $x\ne 2, x\ne 6,\ a-7x+39\ge 0$

1) $a-7x+39=0,\quad x=\frac{a+39}{7}$.

2)



$x^2-4x-21+\left(\frac{|x-2|}{x-2}+\frac{|x-6|}{x-6}+a\right)^2=0$ или $(x-2)^2+\left(\frac{|x-2|}{x-2}+\frac{|x-6|}{x-6}+a\right)^2=25$

Раскроем модули:

2.1 $\quad x<2,\quad (x-2)^2+(a-2)^2=25$,

$x=2-\sqrt{25-(a-2)^2}$;

2.2 $\quad 2<x<6,\ (x-2)^2+a^2=25$,

$x = 2 + \sqrt{25 - a^2}$;

2.3 $x > 6,\ (x-2)^2 + (a+2)^2 = 25$,

$x = 2 + \sqrt{25 - (a+2)^2}$.

В системе координат xOa построим графики полученных функций. Отметим ОДЗ, это полуплоскость $a - 7x + 39 \ge 0$ и точки, не принадлежащие прямым $x = 2, x = 6.$ Прямые, параллельные оси Ox, пересекают отмеченные кривые ровно в двух точках при $a \in (-5; -4) \cup (-3; 3) \cup [5; 7)$.

Ответ: при $a \in (-5; -4)$ имеем решения $x_1 = \dfrac{a+39}{7}$, $x_2 = 2 + \sqrt{25 - a^2}$; при $a \in (-3; 3) \cup [5; 7)$ имеем решения $x_1 = \dfrac{a+39}{7}$, $x_2 = 2 - \sqrt{25 - (a-2)^2}$.

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны a, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины стороны основания AC и бокового ребра TB и параллельной медиане TD боковой грани ATB, если расстояние между TD и секущей плоскостью равно d .

Вариант	8
a	4
d	$1/3$

Решение: Пусть M – середина ребра TB. Проведем $MF \| TD$, $F \in AB$, $DF = FB = 1/4 \cdot AB$, $S = (MF) \cap (AT)$, $SF = 3/2 \cdot TD$. Поскольку $TD = 2MF$, то $SM = 2MF$. Пусть $AZ = ZD = DF = FB = a/4$ и $BW = WC$. Проведем через точки Z, D, F, B, W прямые, параллельные FE; X, G, E, H, Y - соответственно их точки пересечения со стороной AB. Очевидно, $AX = XG = GE = EH = HY = YC = a/6$. Если $T = (SY) \cap (EC)$, то $EFMN$- искомое сечение. Поскольку $TG \| SE$, $SE = 3/2 \cdot TG$ и $NE = 3/4 \cdot TG$, то $SN = NE = 1/2 \cdot SE$. Следовательно, площадь треугольника MSN может быть вычислена следующим образом

$$S_{MSN} = \frac{1}{2} \cdot SM \cdot SN \sin \angle MSN = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} SF \cdot \frac{1}{2} SE \sin \angle FSE = \frac{1}{3} S_{FSE}.$$

Тогда площадь сечения $S_{EFMN} = \dfrac{2}{3} S_{FSE}$.

Проведем $AK \perp FE$, $K \in FE$, $SK \perp FE$, $L = AK \cap DG$, и $AP \perp SK$, $P \in SK$, $Q = AP \cap TL$. Поскольку $TD \in TDG$, $SK \in SFE$, $AP \perp (SFE)$, то длина PQ равна заданному в условии задачи расстоянию d между TD и секущей плоскостью. Тогда $AP = 3d$. В треугольнике AFE имеем

$FE=\sqrt{AE^2+AF^2-2AE\cdot AF\cos 60^\circ}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{9a^2}{16}-2\frac{a}{2}\cdot\frac{3a}{4}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{a\sqrt{7}}{4}$. Найдем $AU=3/5\cdot AW=\frac{3\sqrt{3}a}{10}$ и $BV=\sqrt{BW^2+VW^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{3a^2}{100}}=\frac{a\sqrt{7}}{5}$.

Имеем $\Delta AUK\approx\Delta BVW$, $AK=\frac{BW\cdot AU}{BV}=\frac{a}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}a}{10}\cdot\frac{5}{a\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{3}a}{4\sqrt{7}}$.

В треугольнике ASK находим $PK=\sqrt{AK^2-AP^2}=\sqrt{\frac{27a^2}{16\cdot 7}-9d^2}=\frac{3\sqrt{3a^2-112d^2}}{4\sqrt{7}}$;

$$SK=\frac{AK^2}{PK}=\frac{9\cdot 3\cdot a^2 4\sqrt{7}}{16\cdot 7\cdot 3\sqrt{3a^2-112d^2}}=\frac{9\cdot a^2}{4\sqrt{7}\sqrt{3a^2-112d^2}}.$$

$$S_{FSE}=\frac{1}{2}FE\cdot SK=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{9a^2}{4\sqrt{7}\sqrt{3a^2-112d^2}}=\frac{9a^3}{32\sqrt{3a^2-112d^2}};\ S_{EFMN}=\frac{2}{3}S_{FSE}=\frac{3a^3}{16\sqrt{3a^2-112d^2}}.$$

Ответ: $9/2\sqrt{5}$

Рисунки к задаче 10