Первый (отборочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету

«Математика», осень 2017 г.

Вариант № 5

1. Участники Олимпиады «Шаг в будущее» соревновались по математике, физике и информатике. При этом призерами по математике стали 29 человек, по физике – 30, по информатике – 31, по всем трем предметам – 4, по математике или физике – 50, по математике или информатике – 49, по физике или информатике – 51. Сколько школьников стали призерами хотя бы по одному из трех предметов? (8 баллов)

2. Решите уравнение $x^2+y^2+1+\sqrt{xy-6}=2|x-y|+2xy$. (8 баллов)

3. Найдите отношение шестнадцатого члена арифметической прогрессии к одиннадцатому ее члену, если сумма шести последовательных членов этой прогрессии, начиная с пятого составляет 40% суммы ее начальных шести членов. (8 баллов)

4. Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{2+\cos 2x+\sqrt{3}\operatorname{tg} x}}{\operatorname{tg} x}=\cos x+\dfrac{\sqrt{3}\cos^2 x}{\sin x}$. (8 баллов)

5.Решите неравенство $\dfrac{3(4x-x^2-16)(x^2+6x+8)}{(x^3+64)\sqrt{x^2+4x+4}}\le x^2+x-3.$ (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{54}(30+14\cos x-7\cos 2x)\right).$ (10 баллов)

7. Точка D лежит на окружности радиуса 3, описанной около равнобедренного треугольника ABC. Высота этого треугольника, проведенная к основанию BC, равна 1,5. Найдите площадь треугольника DBC, если $DB=3\sqrt{2}$. (12 баллов)

8. Какая наименьшая площадь может быть у треугольника OAB, если O - начало координат, координаты вершин A и B удовлетворяют уравнению $y+2|y|-x=0$, а прямая AB проходит через точку $M(1;0)$? (12 баллов)

9. Укажите все значения *a,* при которых уравнение

$$\left(x^2-2x-24+\left(\frac{|x-1|}{x-1}+\frac{|x-5|}{x-5}+a\right)^2\right)\sqrt{a-7x+32}=0$$

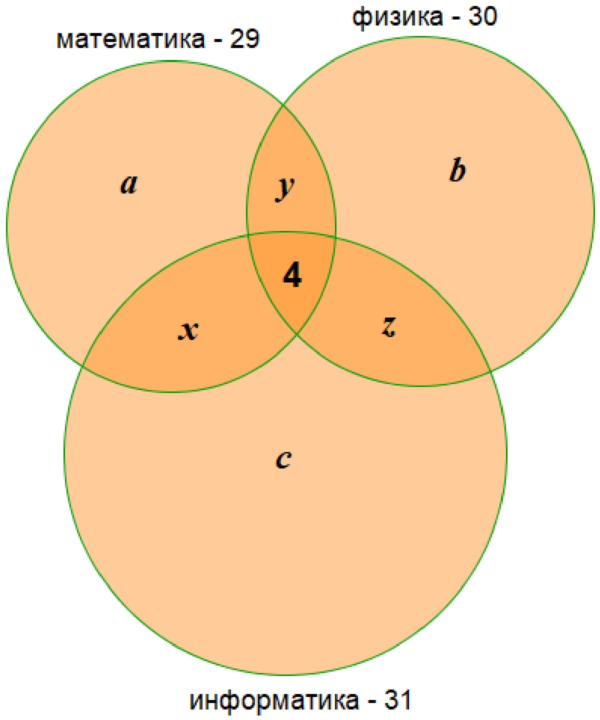
имеет ровно два различных решения, и решите его при каждом *a*. (12 баллов)

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны $2\sqrt{14}$, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины стороны основания AC и бокового ребра TB и параллельной медиане TD боковой грани ATB, если расстояние между TD и секущей плоскостью равно 1. (12 баллов)

Решение варианта №5

1. Решение:

Пусть x – призеры только по двум предметам: математике и информатике, y – призеры только по двум предметам: математике и физике, z – призеры только по двум предметам: физике и информатике, a – призеры только по математике, b – призеры только по физике, c – призеры только по информатике. Тогда



$$\begin{cases} x+y+a+4=29, \\ y+z+b+4=30, \\ x+z+c+4=31, \\ x+y+z+a+b+4=50, \\ x+y+z+a+c+4=49, \\ x+y+z+b+c+4=51, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+a=25, \\ y+z+b=26, \\ x+z+c=27, \\ x+y+z+a+b=46, \\ x+y+z+a+c=45, \\ x+y+z+b+c=47, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2(x+y+z)+a+b+c=78, \\ 3(x+y+z)+2(a+b+c)=138, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=18, \\ a+b+c=42, \end{cases}$$

Отсюда получаем, что призерами хотя бы по одному предмету стали $x+y+z+a+b+c+4=64$ участника.

Ответ: 64.

2. Решение:

$$x^2+y^2+1+\sqrt{xy-6}=2|x-y|+2xy \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2-2|x-y|+1+\sqrt{xy-6}=0 \Leftrightarrow$$

$(x-y)^2-2|x-y|+1+\sqrt{xy-6}=0 \Leftrightarrow (|x-y|-1)^2+\sqrt{xy-6}=0 \Leftrightarrow$ (оба слагаемые неотрицательны)

$(|x-y|-1)^2=0$ и $\sqrt{xy-6}=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} |x-y|=1, \\ xy-6=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-y=1, \\ x-y=-1, \end{array}\right. \\ xy-6=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=x-1, \\ y=x+1, \end{array}\right. \\ xy-6=0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=x-1, \\ xy-6=0, \end{cases} \\ \begin{cases} y=x+1, \\ xy-6=0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=x-1, \\ x^2-x-6=0, \end{cases} \\ \begin{cases} y=x+1, \\ x^2+x-6=0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2,\ y=-3, \\ x=3,\ y=2, \\ x=2,\ y=3, \\ x=-3,\ y=-2. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-2;-3)$, $(3;2)$, $(2;3)$, $(-3;-2)$.

3. Решение:

$$40=\frac{S_{5-10}}{S_6}\cdot 100 \Leftrightarrow 0{,}4=\frac{2a_5+5d}{2a_1+5d} \Leftrightarrow 0{,}4=\frac{2a_1+13d}{2a_1+5d} \Leftrightarrow 0{,}4=\frac{2a_1/d+13}{2a_1/d+5} \Leftrightarrow \frac{a_1}{d}=-\frac{55}{6}$$

$$\frac{a_{16}}{a_{11}}=\frac{a_1+15d}{a_1+10d}=\frac{a_1/d+15}{a_1/d+10}=\frac{-55+90}{-55+60}=\frac{35}{5}=7.$$

Ответ: 7.

4. Решение: Отметим, что $\sin x\neq 0, \cos x\neq 0,$ и умножим обе части уравнения на $\operatorname{tg} x$. Получим $\sqrt{2+\cos 2x+\sqrt{3}\operatorname{tg} x}=\sin x+\sqrt{3}\cos x$. При условии $\sin x+\sqrt{3}\cos x\geq 0$ обе части этого уравнения можно возвести в квадрат. Так как $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$, то неравенство справедливо, если $-\frac{\pi}{3}+2\pi n\leq x\leq\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in Z$. При найденных ограничениях и условиях $\sin x\neq 0, \cos x\neq 0,$ уравнение равносильно следующему:

$2+\cos 2x+\sqrt{3}\operatorname{tg} x=\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+3\cos^2 x$, $\operatorname{tg} x-2\sin x\cos x=0$, $\frac{\sin x}{\cos x}-2\sin x\cos x=0$,

$\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-2\cos x\right)=0$. Таким образом, приходим к уравнению:

$\cos^2 x=\frac{1}{2}, \cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n,\quad n\in Z$. Учитывая ограничения, получаем решения исходного уравнения: $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\quad n\in Z$.

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\quad n\in Z$.

5. Решение:

$$\frac{-3(x^2-4x+16)(x^2+6x+8)}{(x^3+64)\sqrt{x^2+4x+4}}\leq x^2+x-3 \Leftrightarrow \frac{-3(x^2-4x+16)(x+2)(x+4)}{(x+4)(x^2-4x+16)\sqrt{(x+2)^2}}\leq x^2+x-3 \Leftrightarrow$$

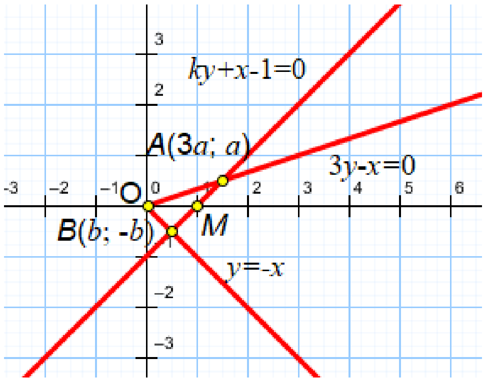
$$x\neq -4,\quad \frac{-3(x+2)}{|x+2|}\leq x^2+x-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-2;+\infty),\\ x^2+x\geq 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-\infty;-4)\cup(-4;-2),\\ x^2+x-6\geq 0.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$x\in(-\infty;-4)\bigcup(-4;-3]\cup(-2;-1]\cup[0;+\infty)$.

Ответ: $x\in(-\infty;-4)\bigcup(-4;-3]\cup(-2;-1]\cup[0;+\infty)$.

6. Решение:

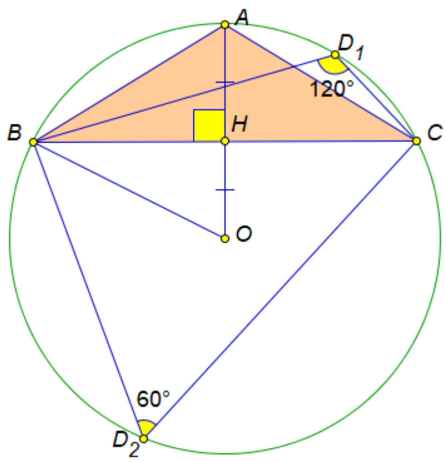
Найдем множество значений функции $z = g(x) = 30 + 14\cos x - 7\cos 2x$. Функция $g(x)$ определена на всей числовой оси. Сделаем замену переменного. Пусть $t = \cos x$. Тогда $z = 30 + 14t - 7(2t^2 - 1) = 37 - 14(t^2 - t) = 40{,}5 - 14(t - 0{,}5)^2$ при $t \in [-1; 1]$, и $E_g = [9; 40{,}5]$. Функция $u = \dfrac{\pi}{54} z$ принимает все



значения из промежутка $\left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{3\pi}{4}\right]$. Множество значений функции $f(x)$ совпадает с множеством значений функции $y = \sin u$, где $u \in \left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{3\pi}{4}\right]$. Следовательно, $E_f = [0{,}5; 1]$

Ответ: $E_f = [0{,}5; 1]$.

7. Решение: Пусть O - центр описанной около равнобедренного треугольника ABC окружности. Тогда $AO = 3$, AH - высота треугольника, проведенная к основанию BC, $AH = 1{,}5$, $AH = HO$, треугольник AOB равносторонний, $AB = AC = 3$, $BC = 3\sqrt{3}$. Поскольку $AB = 2AH$, то угол $\angle ABC = 30°$. Вписанный в окружность угол BDC опирается либо на ту же дугу, что и угол BAC, и $\angle BDC = 120°$, либо BDC опирается на дополнительную дугу к той, на которую опирается угол BAC, следовательно, $\angle BDC = 60°$. Пусть $DC = x$. По теореме косинусов для треугольника BDC имеем



1) $BC^2 = DB^2 + DC^2 - 2DB \cdot DC \cos 120°$, или

$(3\sqrt{3})^2 = (3\sqrt{2})^2 + x^2 + 6\sqrt{2} \cdot x \cdot \dfrac{1}{2}$, или $x^2 + 3\sqrt{2}x - 9 = 0$, $x = \dfrac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{2}$, второй ответ не подходит.

$S_1 = \dfrac{1}{2} DB \cdot DC \sin 120° = \dfrac{3}{4}\sqrt{2}(3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}) \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{9}{4}(3 - \sqrt{3})$,

2) $BC^2 = DB^2 + DC^2 - 2DB \cdot DC \cos 60°$, или

$(3\sqrt{3})^2 = (3\sqrt{2})^2 + x^2 - 6\sqrt{2} \cdot x \cdot \dfrac{1}{2}$, или $x^2 - 3\sqrt{2}x - 9 = 0$, $x = \dfrac{3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{2}$, второй ответ не подходит.

$S_2 = \dfrac{1}{2} DB \cdot DC \sin 60° = \dfrac{3}{4}\sqrt{2}(3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}) \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{9}{4}(3 + \sqrt{3})$. **Ответ:** $\dfrac{9}{4}(3 \pm \sqrt{3})$.

8. Решение: $S_{AOB} = S_{AOM} + S_{BOM}$, $A(3a; a)$, $B(b; -b)$,

$S_{AOM}=\frac{1}{2}OM\cdot a$, $S_{BOM}=\frac{1}{2}OM\cdot b$, $OM=1$,

$S_{AOB}=\frac{a+b}{2}$. Прямая AB проходит через точку M, ее уравнение $ky+x-1=0$. Выразим переменные a и b через параметр k, подставляя координаты точек A и B в уравнение прямой AB: $ka+3a-1=0$, $a=\frac{1}{3+k}$, $-kb+b-1=0$, $b=\frac{1}{1-k}$. Выразим площадь треугольника

$S_{AOB}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3+k}+\frac{1}{1-k}\right)=\frac{2}{3-2k-k^2}=\frac{2}{4-(k+1)^2}$. Поскольку $4-(k+1)^2\le 4$, то $S_{AOB}=\frac{2}{4-(k+1)^2}\ge\frac{1}{2}$.

Наименьшее значение $\min S_{AOB}=\frac{1}{2}$ при $k=-1$.

Ответ: 1/2.

9. Решение: ОДЗ: $x\ne 1, x\ne 5,\ a-7x+32\ge 0$

1) $a-7x+32=0,\quad x=\frac{a+32}{7}$.

2) $x^2-2x-24+\left(\frac{|x-1|}{x-1}+\frac{|x-5|}{x-5}+a\right)^2=0$

или $(x-1)^2+\left(\frac{|x-1|}{x-1}+\frac{|x-5|}{x-5}+a\right)^2=25$

Раскроем модули:

2.1 $\quad x<1,\quad (x-1)^2+(a-2)^2=25$,

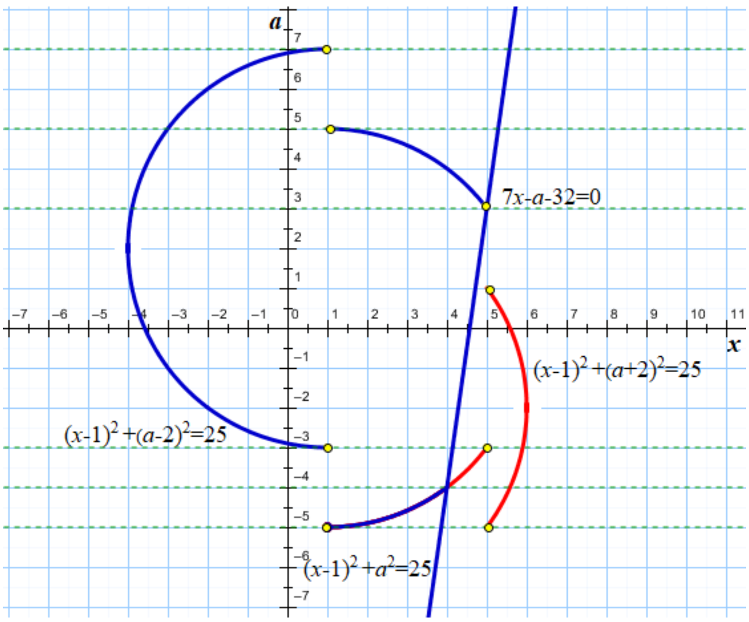
$x=1-\sqrt{25-(a-2)^2}$;

2.2 $\quad 1<x<5,\ (x-1)^2+a^2=25$,

$x=1+\sqrt{25-a^2}$;

2.3 $\quad x>5,\ (x-1)^2+(a+2)^2=25$,

$x=1+\sqrt{25-(a+2)^2}$.



В системе координат xOa построим графики полученных функций. Отметим ОДЗ, это полуплоскость $a-7x+32\ge 0$ и точки, не принадлежащие прямым $x=1, x=5$. Прямые, параллельные оси Ox, пересекают отмеченные кривые ровно в двух точках при $a\in(-5;-4)\cup(-3;3)\cup[5;7)$.

Ответ: при $a\in(-5;-4)$ имеем решения $x_1=\frac{a+32}{7}$, $x_2=1+\sqrt{25-a^2}$; при $a\in(-3;3)\cup[5;7)$ имеем решения $x_1=\frac{a+32}{7}$, $x_2=1-\sqrt{25-(a-2)^2}$.

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны a, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины стороны основания AC и бокового ребра TB и параллельной медиане TD боковой грани ATB, если расстояние между TD и секущей плоскостью равно d.

Вариант	5
a	$2\sqrt{14}$
d	1

Решение: Пусть M – середина ребра TB. Проведем $MF\,||\,TD$, $F\in AB$, $DF=FB=1/4\cdot AB$, $S=(MF)\cap(AT)$, $SF=3/2\cdot TD$. Поскольку $TD=2MF$, то $SM=2MF$. Пусть $AZ=ZD=DF=FB=a/4$ и $BW=WC$. Проведем через точки Z, D, F, B, W прямые, параллельные FE; X, G, E, H, Y - соответственно их точки пересечения со стороной AB. Очевидно, $AX=XG=GE=EH=HY=YC=a/6$. Если $T=(SY)\cap(EC)$, то $EFMN$- искомое сечение. Поскольку $TG\,||\,SE$, $SE=3/2\cdot TG$ и $NE=3/4\cdot TG$, то $SN=NE=1/2\cdot SE$. Следовательно, площадь треугольника MSN может быть вычислена следующим образом

$$S_{MSN}=\frac{1}{2}\cdot SM\cdot SN\sin\angle MSN=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}SF\cdot\frac{1}{2}SE\sin\angle FSE=\frac{1}{3}S_{FSE}.$$

Тогда площадь сечения $S_{EFMN}=\frac{2}{3}S_{FSE}$.

Проведем $AK\perp FE$, $K\in FE$, $SK\perp FE$, $L=AK\cap DG$, и $AP\perp SK$, $P\in SK$, $Q=AP\cap TL$. Поскольку $TD\in TDG$, $SK\in SFE$, $AP\perp(SFE)$, то длина PQ равна заданному в условии задачи расстоянию d между TD и секущей плоскостью. Тогда $AP=3d$. В треугольнике AFE имеем

$FE=\sqrt{AE^2+AF^2-2AE\cdot AF\cos 60^\circ}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{9a^2}{16}-2\frac{a}{2}\cdot\frac{3a}{4}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{a\sqrt{7}}{4}$. Найдем $AU=3/5\cdot AW=\frac{3\sqrt{3}a}{10}$ и $BV=\sqrt{BW^2+VW^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{3a^2}{100}}=\frac{a\sqrt{7}}{5}$.

Имеем $\Delta\,AUK\approx\Delta\,BVW$, $AK=\frac{BW\cdot AU}{BV}=\frac{a}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}a}{10}\cdot\frac{5}{a\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{3}a}{4\sqrt{7}}$.

В треугольнике ASK находим $PK=\sqrt{AK^2-AP^2}=\sqrt{\frac{27a^2}{16\cdot 7}-9d^2}=\frac{3\sqrt{3a^2-112d^2}}{4\sqrt{7}}$;

$$SK = \frac{AK^2}{PK} = \frac{9 \cdot 3 \cdot a^2 4\sqrt{7}}{16 \cdot 7 \cdot 3\sqrt{3a^2 - 112d^2}} = \frac{9 \cdot a^2}{4\sqrt{7}\sqrt{3a^2 - 112d^2}}.$$

$$S_{FSE} = \frac{1}{2} FE \cdot SK = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{9a^2}{4\sqrt{7}\sqrt{3a^2 - 112d^2}} = \frac{9a^3}{32\sqrt{3a^2 - 112d^2}}; \; S_{EFMN} = \frac{2}{3} S_{FSE} = \frac{3a^3}{16\sqrt{3a^2 - 112d^2}}.$$

Ответ: $21/2$

Рисунки к задаче 10