Первый (отборочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету

«Математика», осень 2017 г.

Вариант № 4

1. Участники Олимпиады «Шаг в будущее» соревновались по математике, физике и информатике. При этом призерами только по информатике стали 10 человек, только по математике – 7, по информатике или математике – 39, по математике и физике – 8, по математике и информатике – 11, по физике и информатике – 9, хотя бы по одному из трех предметов – 51. Сколько школьников стали призерами по физике? (8 баллов)

2. Решите уравнение $4x^2+y^2+4+\sqrt{x^2+y^2-8}=4|2x-y|+4xy$. (8 баллов)

3. Сколько процентов составляет сумма восьми последовательных членов арифметической прогрессии, начиная с шестого от суммы ее начальных восьми членов, если отношение седьмого члена арифметической прогрессии к десятому ее члену равно 5?

(8 баллов)

4. Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{ctg} x}}{\operatorname{ctg} x}=\sin x+\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{6(x^3-8)\sqrt{x^2+6x+9}}{(x^2+2x+4)(x^2+x-6)}\geq x-2.$ (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{9}(\cos 2x-2\sin x)\right).$ (10 баллов)

7. Точка D лежит на окружности радиуса $4\sqrt{2}$, описанной около равнобедренного треугольника ABC. Высота этого треугольника, проведенная к основанию $AC,$ равна $2\sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника $DBC,$ если $DB=8$. (12 баллов)

8. Какая наименьшая площадь может быть у треугольника OAB, если его стороны OA и OB лежат на графике функции $y=x-3|x|$, а прямая AB проходит через точку $M(0;-1)$?

(12 баллов)

9. Укажите все значения $a,$ при которых уравнение

$$\left(x^2+2x-24+\left(\frac{|x+1|}{x+1}+\frac{|x-3|}{x-3}+a\right)^2\right)\sqrt{5(x+4)-7(a+2)}=0$$

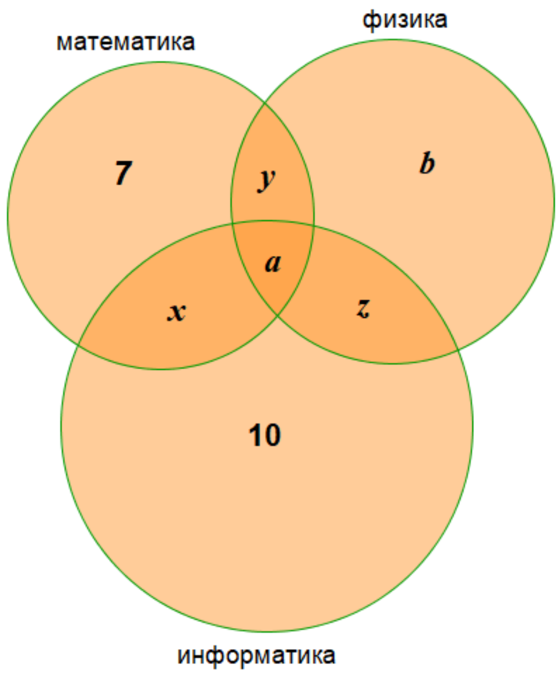
имеет ровно три различных решения, и решите его при каждом $a.$ (12 баллов)

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны 8, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, которая проходит через середину стороны основания AC, параллельна медиане AM боковой грани ATB и пересекает ребро AT в точке N, так что $TN = 3AN$, а расстояние от AM до секущей плоскости равно $2/3$. (12 баллов)

Решение варианта №4

1. Решение:

Пусть x – призеры только по двум предметам: математике и информатике, y – призеры только по двум предметам: математике и физике, z – призеры только по двум предметам: физике и информатике, a – призеры по всем трем предметам, b – призеры только по физике. Тогда



$$\begin{cases} x+y+z+a+17=39, \\ y+a=8, \\ x+a=11, \\ z+a=9, \\ x+y+z+a+b+17=51, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+a=22, \\ y=8-a, \\ x=11-a, \\ z=9-a, \\ b=12, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 11-a+8-a+9-a+a=22, \\ y=8-a, \\ x=11-a, \\ z=9-a, \\ b=12, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3, \\ y=5, \\ x=8, \\ z=6, \\ b=12. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что призерами по физике стали $y+z+a+b=26$ участников.

Ответ: 26.

2. Решение:

$4x^2+y^2+4+\sqrt{x^2+y^2-8}=4|2x-y|+4xy \Leftrightarrow 4x^2-4xy+y^2-4|2x-y|+4+\sqrt{x^2+y^2-8}=0 \Leftrightarrow$

$(2x-y)^2-4|2x-y|+4+\sqrt{x^2+y^2-8}=0 \Leftrightarrow (|2x-y|-2)^2+\sqrt{x^2+y^2-8}=0 \Leftrightarrow$ (оба слагаемые неотрицательны) $(|2x-y|-2)^2=0$ и $\sqrt{x^2+y^2-8}=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} |2x-y|=2, \\ x^2+y^2-8=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x-y=2, \\ 2x-y=-2, \end{array}\right. \\ x^2+y^2-8=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=2x-2, \\ y=2x+2, \end{array}\right. \\ x^2+y^2-8=0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=2x-2, \\ x^2+y^2-8=0, \end{cases} \\ \begin{cases} y=2x+2, \\ x^2+y^2-8=0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=2x-2, \\ 5x^2-8x-4=0, \end{cases} \\ \begin{cases} y=2x+2, \\ 5x^2+8x-4=0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-0{,}4,\ y=-2{,}8, \\ x=2,\ y=2, \\ x=0{,}4,\ y=2{,}8, \\ x=-2,\ y=-2. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-0{,}4;-2{,}8)$, $(2;2)$, $(0{,}4;2{,}8)$, $(-2;-2)$.

3. Решение:

$$\frac{a_7}{a_{10}}=5 \Leftrightarrow \frac{a_1+6d}{a_1+9d}=5 \Leftrightarrow a_1+6d=5(a_1+9d) \Leftrightarrow \frac{a_1}{d}=-\frac{39}{4}$$

$$n=\frac{S_{6-13}}{S_8}\cdot 100=\frac{2a_6+7d}{2a_1+7d}\cdot 100=\frac{2a_1+17d}{2a_1+7d}\cdot 100=\frac{2a_1/d+17}{2a_1/d+7}\cdot 100=\frac{-39+34}{-39+14}\cdot 100=\frac{-5}{-25}\cdot 100=20\%$$

Ответ: 20%

4. Решение: Отметим, что $\sin x\neq 0, \cos x\neq 0,$ и умножим обе части уравнения на $\operatorname{ctg} x$. Получим $\sqrt{1+\operatorname{ctg} x}=\sin x+\cos x$. При условии $\sin x+\cos x\geq 0$ обе части этого уравнения можно возвести в квадрат. Так как $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$, то неравенство справедливо, если $-\frac{\pi}{4}+2\pi n\leq x\leq\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$. При найденных ограничениях и условиях $\sin x\neq 0, \cos x\neq 0,$ уравнение равносильно следующему:

$$1+\operatorname{ctg} x=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x, \Leftrightarrow \operatorname{ctg} x-2\sin x\cos x=0, \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}-2\sin x\cos x=0,$$

$$\cos x\left(\frac{1}{\sin x}-2\sin x\right)=0.$$

Таким образом, приходим к уравнению: $\sin^2 x=\frac{1}{2}$, $\sin x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$.

Учитывая ограничения, получаем решения исходного уравнения: $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$.

5. Решение: $\frac{6(x^3-8)\sqrt{x^2+6x+9}}{(x^2+2x+4)(x^2+x-6)}\geq x-2. \Leftrightarrow \frac{6(x-2)(x^2+2x+4)\sqrt{(x+3)^2}}{(x^2+2x+4)(x-2)(x+3)}\geq x-2 \Leftrightarrow$

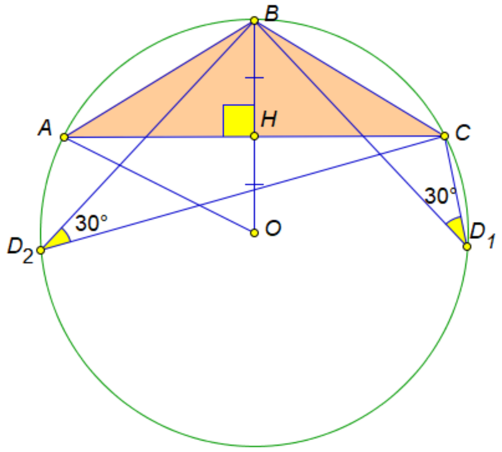
$$x\neq 2,\quad \frac{6|x+3|}{(x+3)}\geq x-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-3;2)\cup(2;+\infty),\\ x\leq 8,\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-\infty;-3),\\ x\leq -4.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty;-4]\cup(-3;2)\cup(2;8].$$

Ответ: $x\in(-\infty;-4]\cup(-3;2)\cup(2;8]$.

6. Решение: Найдем множество значений функции $z=g(x)=\cos 2x-2\sin x$. Функция $g(x)$ определена на всей числовой оси. Сделаем замену переменного. Пусть $t=\sin x$. Тогда

$z=(1-2t^2)-2t= \quad =1-2(t^2+t)=1{,}5-2(t+0{,}5)^2$ при $t\in[-1;1]$, и $E_g=[-3;1{,}5]$. Функция $u=\dfrac{\pi}{9}z$ принимает все значения из промежутка $\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{6}\right]$. Множество значений функции $f(x)$ совпадает с множеством значений функции $y=\cos u$, где $u\in\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{6}\right]$. Следовательно, $E_f=[0{,}5;1]$.

Ответ: $E_f=[0{,}5;1]$.



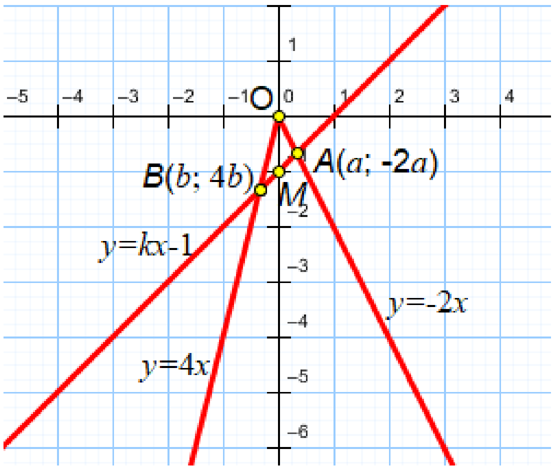
7. Решение: Пусть O - центр описанной около равнобедренного треугольника ABC окружности. Тогда $BO=4\sqrt{2}$, BH - высота треугольника, проведенная к основанию AC, $BH=2\sqrt{2}$, $BH=HO$, треугольник AOB равносторонний, $AB=BC=4\sqrt{2}$. Поскольку $AB=2BH$, то угол $\angle BAC=30°$. Вписанный в окружность угол BDC опирается на ту же дугу, что и угол BAC, следовательно, $\angle BDC=30°$. Пусть $DC=x$. По теореме косинусов для треугольника BDC имеем $BC^2=DB^2+DC^2-2DB\cdot DC\cos 30°$, или

$(4\sqrt{2})^2=8^2+x^2-16\cdot x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, или $x^2-8\sqrt{3}x+32=0$, $x_1=4\sqrt{3}-4$, $x_2=4\sqrt{3}+4$. Оба ответа подходят.

$S_1=\dfrac{1}{2}DB\cdot DC\sin 30°=4(4\sqrt{3}-4)\cdot\dfrac{1}{2}=8(\sqrt{3}-1)$, $S_2=\dfrac{1}{2}DB\cdot DC\sin 30°=4(4\sqrt{3}+4)\cdot\dfrac{1}{2}=8(\sqrt{3}+1)$.

Ответ: $8(\sqrt{3}\pm 1)$.

8. Решение:



$S_{AOB}=S_{AOM}+S_{BOM}$, $A(a;-2a)$, $B(b;4b)$,

$S_{AOM}=\dfrac{1}{2}OM\cdot a$, $S_{BOM}=\dfrac{1}{2}OM\cdot(-b)$, $OM=1$,

$S_{AOB}=\dfrac{a-b}{2}$. Прямая AB проходит через точку M, ее уравнение $y=kx-1$. Выразим переменные a и b через параметр k, подставляя координаты точек A и B в уравнение прямой AB: $-2a=ka-1$, $a=\dfrac{1}{2+k}$, $4b=kb-1$,

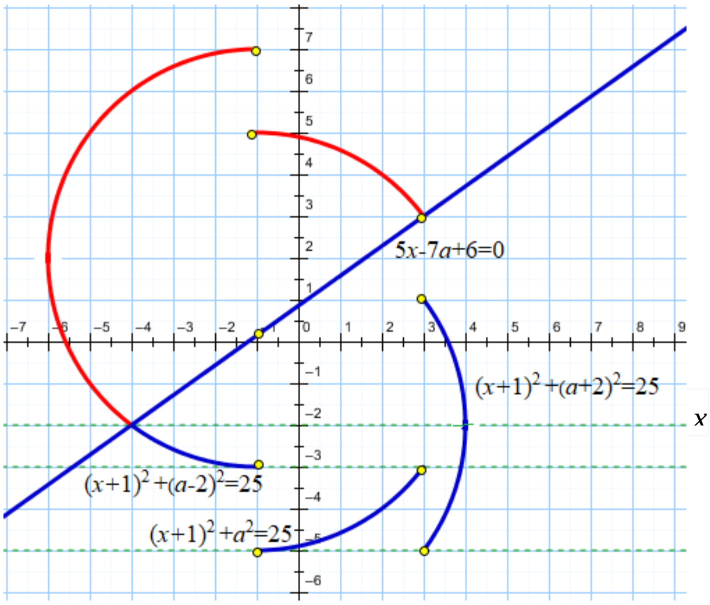
$b=-\dfrac{1}{4-k}$. Выразим площадь треугольника

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+k}+\frac{1}{4-k}\right)=\frac{3}{8+2k-k^2}=\frac{3}{9-(k-1)^2}.$$

Поскольку $9-(k-1)^2\le 9,$ то $S_{AOB}=\dfrac{3}{9-(k-1)^2}\ge\dfrac{1}{3}$. Наименьшее значение $\min S_{AOB}=1/3$ при $k=1$.

Ответ: $1/3$.

9. Решение:



ОДЗ: $x\ne -1, x\ne 3,\ 5x-7a+6\ge 0$

1) $5(x+4)-7(a+2)=0,\quad x=\dfrac{7}{5}a-\dfrac{6}{5}$.

2) $x^2+2x-24+\left(\dfrac{|x+1|}{x+1}+\dfrac{|x-3|}{x-3}+a\right)^2=0$ или

$$(x+1)^2+\left(\frac{|x+1|}{x+1}+\frac{|x-3|}{x-3}+a\right)^2=25$$

Раскроем модули:

2.1 $\quad x<-1,\quad (x+1)^2+(a-2)^2=25$,

$x=-1-\sqrt{25-(a-2)^2}$;

2.2 $\ -1<x<3,\ (x+1)^2+a^2=25$, $x=-1+\sqrt{25-a^2}$; 2.3 $\ x>3,\ (x+1)^2+(a+2)^2=25$,

$x=-1+\sqrt{25-(a+2)^2}$.

В системе координат xOa построим графики полученных функций. Отметим ОДЗ, это полуплоскость $5x-7a+6\ge 0$ и точки, не принадлежащие прямым $x=-1, x=3$. Заметим, что точка (-4, -2) принадлежит как прямой $5(x+4)-7(a+2)=0$, так и окружности $(x+1)^2+(a-2)^2=25$. Прямые, параллельные оси Ox, пересекают отмеченные кривые в трех точках при $a\in(-5;-3)\cup(-3;-2)$.

Ответ: при $a\in(-5;-3)$ имеем решения $x_1=\dfrac{7}{5}a-\dfrac{6}{5},\ x_2=-1+\sqrt{25-a^2},\ x_3=-1+\sqrt{25-(a+2)^2}$;

при $a\in(-3;-2)$ имеем решения $x_1=\dfrac{7}{5}a-\dfrac{6}{5},\ x_2=-1-\sqrt{25-(a-2)^2}\ \ x_3=-1+\sqrt{25-(a+2)^2}$.

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны a, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, которая проходит через середину стороны основания AC, параллельна медиане AM боковой грани ATB и пересекает ребро AT в точке N, так что $TN=3AN$, а расстояние от AM до секущей плоскости равно d .

Вариант	4
a	8
d	2/3

Решение: Проведем $PN \parallel AM$, $S=(PN)\cap(AB)$.Пусть H - середина AB, $MH=1/2\cdot AT$, $AN=1/4\cdot AT=1/2\cdot MH.$ $\Rightarrow$ $SA=1/2\cdot AH=1/4\cdot AB.$ Поскольку $PN=3/4\cdot AM$, $SN=1/2\,AM \Rightarrow SN=2/3\cdot PN$, или $SN=2/5\cdot SP.$

Проведем SD, $F=(SD)\cap(BC)$, $CE\parallel SF$. Поскольку $AD=DC$, $SD=1/2\cdot EC$ и $EC=6/5\cdot SF$, $SD=3/5\cdot SF.$

Имеем $S_{NSD}=\frac{1}{2}\cdot SN\cdot SD\sin\angle NSD=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}SP\cdot\frac{3}{5}SF\sin\angle PSF=\frac{6}{25}S_{PSF}$. Тогда площадь сечения $S_{NDFP}=\frac{19}{25}S_{PSF}=\frac{19}{6}S_{NSD}.$

Проведем $AK\perp SD$, $AL\perp KN$, длина AL равна заданному в условии задачи расстоянию d между AM и секущей плоскостью. В треугольнике SAD имеем

$SD=\sqrt{AS^2+SD^2-2AS\cdot SD\cos 120^\circ}=\sqrt{\frac{a^2}{16}+\frac{a^2}{4}-2\frac{a}{4}\cdot\frac{a}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{a\sqrt{7}}{4}$, $S_{SAD}=\frac{1}{2}SA\cdot AD\sin 120^\circ=\frac{a^2\sqrt{3}}{32}.$

Но $S_{SAD}=\frac{1}{2}AK\cdot SD,$ отсюда $\frac{1}{2}AK\cdot\frac{a\sqrt{7}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{32}$ и $AK=\frac{a\sqrt{3}}{4\sqrt{7}}$. В треугольнике AKN имеем

$KL=\sqrt{AK^2-AL^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{16\cdot 7}-d^2}=\frac{\sqrt{3a^2-112d^2}}{4\sqrt{7}}$, $KN=\frac{AK^2}{KL}=\frac{3a^2}{4\sqrt{7}\sqrt{3a^2-112d^2}}.$ Площадь треугольника NSD: $S_{NSD}=\frac{1}{2}\cdot SD\cdot KN=\frac{3a^3}{32\sqrt{3a^2-112d^2}}$. Тогда $S_{NDFP}=\frac{19a^3}{64\sqrt{3a^2-112d^2}}.$

Ответ: $57/2\sqrt{5}$

Рисунки к задаче