Первый (отборочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету

«Математика», осень 2017 г.

Вариант № 1

1. Участники Олимпиады «Шаг в будущее» соревновались по математике, физике и информатике. При этом призерами только по информатике стали 12 человек, только по математике – 8, по информатике или математике – 40, по математике и физике – 7, по математике и информатике – 10, по физике и информатике – 11, хотя бы по одному из трех предметов – 51. Сколько школьников стали призерами по физике? (8 баллов)

2. Решите уравнение $x^2+y^2+1+\sqrt{4x^2+4y^2-34}=2|x+y|-2xy$. (8 баллов)

3. Сколько процентов составляет сумма шести последовательных членов арифметической прогрессии, начиная с пятого от суммы ее начальных шести членов, если отношение пятого члена арифметической прогрессии к десятому ее члену равно 31? (8 баллов)

4. Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\operatorname{tg} x}=\cos x+\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{8(x^3+27)\sqrt{x^2+8x+16}}{(x^2-3x+9)(x^2+7x+12)}\geq x+3$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{108}\left(14\cos 2x+28\sin x+15\right)\right)$.

(10 баллов)

7. Точка D лежит на окружности радиуса 3, описанной около равнобедренного треугольника ABC. Высота этого треугольника, проведенная к основанию AC, равна 1,5. Найдите площадь треугольника DBC, если $DB=2\sqrt{3}$. (12 баллов)

8. Какая наименьшая площадь может быть у треугольника OAB, если его стороны OA и OB лежат на графике функции $y=x+2|x|$, а прямая AB проходит через точку $M(0;1)$?

(12 баллов)

9. Укажите все значения *a*, при которых уравнение

$$\left(x^2+8x-9+\left(\frac{|x+4|}{x+4}+\frac{|x|}{x}+a\right)^2\right)\sqrt{5(x+7)-7(a+2)}=0$$

имеет ровно три различных решения, и решите его при каждом *a*. (12 баллов)

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны $4\sqrt{2}$, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, которая проходит через середину стороны основания AC, параллельна медиане AM боковой грани ATB и пересекает ребро AT в точке N, так что $TN = 3AN$, а расстояние от AM до секущей плоскости равно $\sqrt{4/7}$. (12 баллов)

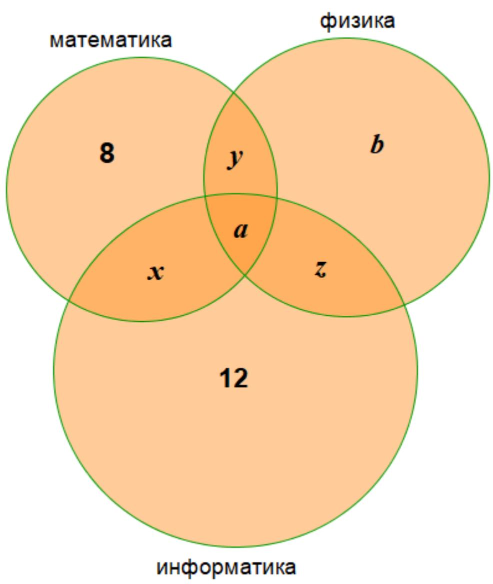
Решение варианта №1

1. Решение:

Пусть x – призеры только по двум предметам: математике и информатике, y – призеры только по двум предметам: математике и физике, z – призеры только по двум предметам: физике и информатике, a – призеры по всем трем предметам, b – призеры только по физике. Тогда

$$\begin{cases} x+y+z+a+20=40, \\ y+a=7, \\ x+a=10, \\ z+a=11, \\ x+y+z+a+b+20=51, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+a=20, \\ y=7-a, \\ x=10-a, \\ z=11-a, \\ b=11, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 10-a+7-a+11-a+a=20, \\ y=7-a, \\ x=10-a, \\ z=11-a, \\ b=11, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4, \\ y=3, \\ x=6, \\ z=7, \\ b=11. \end{cases}$$



Отсюда получаем, что призерами по физике стали $y+z+a+b=25$ участников.

Ответ: 25.

2: Решение:

$$x^2+y^2+1+\sqrt{4x^2+4y^2-34}=2|x+y|-2xy$$

$$\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2-2|x+y|+1+\sqrt{4x^2+4y^2-34}=0 \Leftrightarrow$$

$(x+y)^2-2|x+y|+1+\sqrt{4x^2+4y^2-34}=0 \Leftrightarrow (|x+y|-1)^2+\sqrt{4x^2+4y^2-34}=0 \Leftrightarrow$ (оба слагаемые неотрицательны) $(|x+y|-1)^2=0$ и $\sqrt{4x^2+4y^2-34}=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} |x+y|=1, \\ 4x^2+4y^2-34=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+y=1, \\ x+y=-1, \end{array}\right. \\ 4x^2+4y^2-34=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=1-x, \\ y=-1-x, \end{array}\right. \\ 4x^2+4y^2-34=0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1-x, \\ 4x^2+4y^2-34=0, \end{cases} \\ \begin{cases} y=-1-x, \\ 4x^2+4y^2-34=0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1-x, \\ 4x^2-4x-15=0, \end{cases} \\ \begin{cases} y=-1-x, \\ 4x^2+4x-15=0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2{,}5,\ y=-1{,}5, \\ x=-1{,}5,\ y=2{,}5, \\ x=-2{,}5,\ y=1{,}5, \\ x=1{,}5,\ y=-2{,}5. \end{array}\right.$$

Ответ: $(2{,}5; -1{,}5)$, $(-2{,}5; 1{,}5)$, $(1{,}5; -2{,}5)$, $(-1{,}5; 2{,}5)$.

3. Решение:

$$\frac{a_5}{a_{10}}=31 \Leftrightarrow \frac{a_1+4d}{a_1+9d}=31 \Leftrightarrow a_1+4d=31(a_1+9d) \Leftrightarrow \frac{a_1}{d}=-\frac{55}{6}$$

$$n=\frac{S_{5-10}}{S_6}\cdot 100=\frac{2a_5+5d}{2a_1+5d}\cdot 100=\frac{2a_1+13d}{2a_1+5d}\cdot 100=\frac{2a_1/d+13}{2a_1/d+5}\cdot 100=\frac{-55+39}{-55+15}\cdot 100=\frac{-16}{-40}\cdot 100=40\%$$

Ответ: 40%

4. Решение:

Отметим, что $\sin x\neq 0, \cos x\neq 0,$ и умножим обе части уравнения на $\operatorname{tg} x$. Получим $\sqrt{1+\operatorname{tg} x}=\sin x+\cos x$. При условии $\sin x+\cos x\geq 0$ обе части этого уравнения можно возвести в квадрат. Так как $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$, то неравенство справедливо, если $-\frac{\pi}{4}+2\pi n\leq x\leq \frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$. При найденных ограничениях и условиях $\sin x\neq 0, \cos x\neq 0,$ уравнение равносильно следующему:

$$1+\operatorname{tg} x=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} x-2\sin x\cos x=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin x}{\cos x}-2\sin x\cos x=0,$$

$\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-2\cos x\right)=0$. Таким образом, приходим к уравнению $\cos^2 x=\frac{1}{2}$, $\cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$. Учитывая ограничения, получаем решения исходного уравнения: $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\quad x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\quad \frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$.

5. Решение:

$$\frac{8(x^3+27)\sqrt{x^2+8x+16}}{(x^2-3x+9)(x^2+7x+12)}\geq x+3 \Leftrightarrow \frac{8(x+3)(x^2-3x+9)\sqrt{(x+4)^2}}{(x^2-3x+9)(x+3)(x+4)}\geq x+3 \Leftrightarrow$$

$$x\neq -3,\quad \frac{8|x+4|}{(x+4)}\geq x+3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\in(-4;-3)\cup(-3;+\infty), \\ x\leq 5,\end{cases} \\ \begin{cases} x\in(-\infty;-4), \\ x\leq -11.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty;-11]\cup(-4;-3)\cup(-3;5].$$

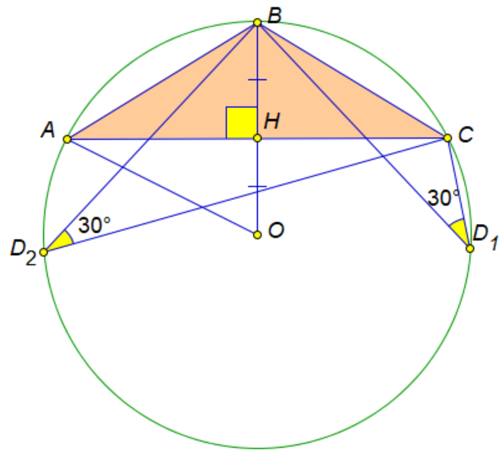
Ответ: $x\in(-\infty;-11]\cup(-4;-3)\cup(-3;5]$.

6. Решение:

Найдем множество значений функции $z = g(x) = 14\cos 2x + 28\sin x + 15$. Функция $g(x)$ определена на всей числовой оси. Сделаем замену переменного. Пусть $t = \sin x$. Тогда $z = 14(1-2t^2) + 28t + 15 = 29 - 28(t^2 - t) = 36 - 28(t-0{,}5)^2$ при $t \in [-1; 1]$, и $E_g = [-27; 36]$. Функция $u = \frac{\pi}{108} z$ принимает все значения из промежутка $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$. Множество значений функции $f(x)$ совпадает с множеством значений функции $y = \cos u$, где $u \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$. Следовательно, $E_f = [0{,}5; 1]$.

Ответ: $E_f = [0{,}5; 1]$.

7. Решение: Пусть O - центр описанной около равнобедренного треугольника ABC окружности. Тогда $BO = 3$, BH - высота треугольника, проведенная к основанию AC, $BH = 1{,}5$, $BH = HO$, треугольник AOB равносторонний, $AB = BC = 3$. Поскольку $AB = 2BH$, то угол $\angle BAC = 30°$. Вписанный в окружность угол BDC опирается на ту же дугу, что и угол BAC, следовательно, $\angle BDC = 30°$. Пусть $DC = x$. По теореме косинусов для треугольника BDC имеем $BC^2 = DB^2 + DC^2 - 2DB \cdot DC\cos 30°$, или



$3^2 = (2\sqrt{3})^2 + x^2 - 4\sqrt{3} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, или $x^2 - 6x + 3 = 0$, $x_1 = 3 - \sqrt{6}$, $x_2 = 3 + \sqrt{6}$. Оба ответа подходят.

$S_1 = \frac{1}{2} DB \cdot DC \sin 30° = \sqrt{3}(3-\sqrt{6}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$, $S_2 = \frac{1}{2} DB \cdot DC \sin 30° = \sqrt{3}(3+\sqrt{6}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

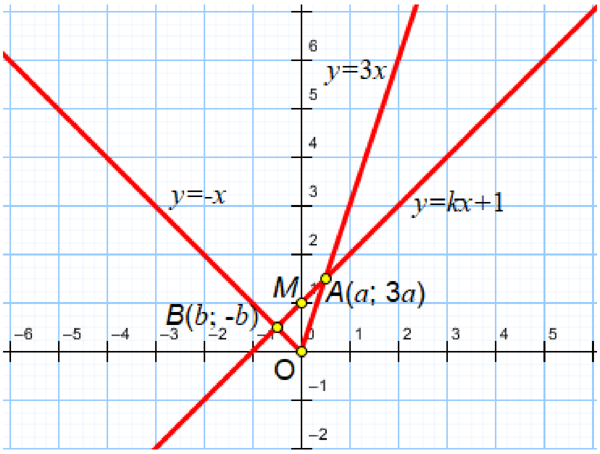
Ответ: $\frac{3}{2}(\sqrt{3} \pm \sqrt{2})$.

8. Решение:

$S_{AOB} = S_{AOM} + S_{BOM}$, $A(a; 3a)$, $B(b; -b)$,

$S_{AOM} = \frac{1}{2} OM \cdot a$, $S_{BOM} = \frac{1}{2} OM \cdot (-b)$, $OM = 1$,

$S_{AOB}=\dfrac{a-b}{2}$. Прямая AB проходит через точку M, ее уравнение $y=kx+1$. Выразим переменные a и b через параметр k, подставляя координаты точек A и B в уравнение прямой AB: $3a=ka+1,\quad a=\dfrac{1}{3-k},\quad -b=kb+1,\ b=-\dfrac{1}{k+1}$. Выразим площадь треугольника



$$S_{AOB}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3-k}+\frac{1}{k+1}\right)=\frac{2}{3+2k-k^2}=\frac{2}{4-(k-1)^2}$$

.

Поскольку $4-(k-1)^2\le 4$, то $S_{AOB}=\dfrac{2}{4-(k-1)^2}\ge\dfrac{1}{2}$. Наименьшее значение $\min S_{AOB}=\dfrac{1}{2}$ при $k=1$.

Ответ: 1/2.

9. Решение:

ОДЗ: $x\ne -4,\ x\ne 0,\ 5x-7a+21\ge 0$

1) $5(x+7)-7(a+2)=0,\quad x=\dfrac{7}{5}x-\dfrac{21}{5}$.

2) $x^2+8x-9+\left(\dfrac{|x+4|}{x+4}+\dfrac{|x|}{x}+a\right)^2=0$ или $(x+4)^2+\left(\dfrac{|x+4|}{x+4}+\dfrac{|x|}{x}+a\right)^2=25$

Раскроем модули:

2.1 $\quad x<-4,\quad (x+4)^2+(a-2)^2=25$,

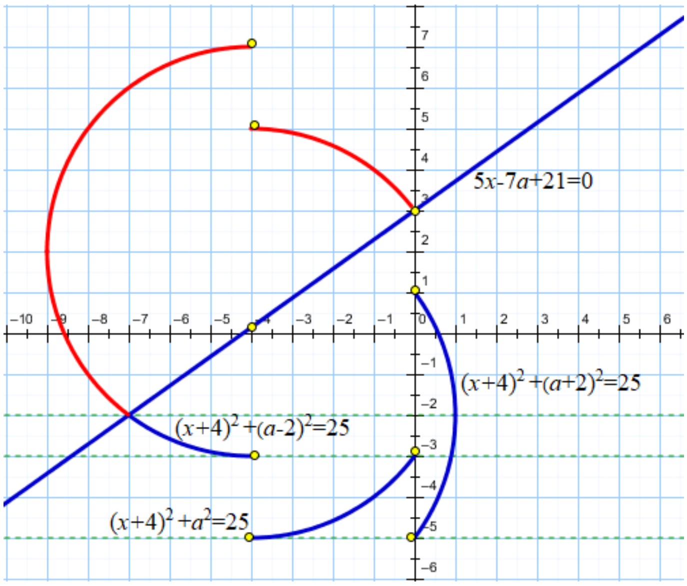
$x=-4-\sqrt{25-(a-2)^2}$;

2.2 $\quad -4<x<0,\ (x+4)^2+a^2=25$,

$x=-4+\sqrt{25-a^2}$;

2.3 $x>0,\ (x+4)^2+(a+2)^2=25,\ x=-4+\sqrt{25-(a+2)^2}$.

В системе координат xOa построим графики полученных функций. Отметим ОДЗ, это полуплоскость $5x-7a+21\ge 0$ и точки, не принадлежащие прямым $x=-4,\ x=0$. Заметим, что точка (-7, -2) принадлежит как прямой $5(x+7)-7(a+2)=0$, так и окружности $(x+4)^2+(a-2)^2=25$. Прямые, параллельные оси Ox, пересекают отмеченные кривые в трех точках при $a\in(-5;-3)\cup(-3;-2)$.



Ответ: при $a\in(-5;-3)$ имеем решения $x_1=\dfrac{7a-21}{5},\ x_2=-4+\sqrt{25-a^2},\ x_3=-4+\sqrt{25-(a+2)^2}$;

при $a\in(-3;-2)$ имеем решения $x_1=\dfrac{7a-21}{5},\ x_2=-4-\sqrt{25-(a-2)^2}\ \ x_3=-4+\sqrt{25-(a+2)^2}$.

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны a, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, которая проходит через середину стороны основания AC, параллельна медиане AM боковой грани ATB и пересекает ребро AT в точке N, так что $TN=3AN$, а расстояние от AM до секущей плоскости равно d .

Вариант	1
a	$4\sqrt{2}$
d	$\sqrt{4/7}$

Решение: Проведем $PN\parallel AM,\ S=(PN)\cap(AB)$.Пусть H - середина $AB,\ MH=1/2\cdot AT,\ AN=1/4\cdot AT=1/2\cdot MH.\ \Rightarrow\ SA=1/2\cdot AH=1/4\cdot AB.$ Поскольку $PN=3/4\cdot AM,\ SN=1/2\,AM\Rightarrow SN=2/3\cdot PN,$ или $SN=2/5\cdot SP.$

Проведем $SD,\ F=(SD)\cap(BC),\ CE\parallel SF.$ Поскольку $AD=DC,\ SD=1/2\cdot EC$ и $EC=6/5\cdot SF,\ SD=3/5\cdot SF.$

Имеем $S_{NSD}=\dfrac{1}{2}\cdot SN\cdot SD\sin\angle NSD=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{5}SP\cdot\dfrac{3}{5}SF\sin\angle PSF=\dfrac{6}{25}S_{PSF}$. Тогда площадь сечения $S_{NDFP}=\dfrac{19}{25}S_{PSF}=\dfrac{19}{6}S_{NSD}$.

Проведем $AK\perp SD,\ AL\perp KN,$ длина AL равна заданному в условии задачи расстоянию d между AM и секущей плоскостью. В треугольнике SAD имеем

$$SD=\sqrt{AS^2+SD^2-2AS\cdot SD\cos120^\circ}=\sqrt{\frac{a^2}{16}+\frac{a^2}{4}-2\frac{a}{4}\cdot\frac{a}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{a\sqrt{7}}{4},\quad S_{SAD}=\frac{1}{2}SA\cdot AD\sin120^\circ=\frac{a^2\sqrt{3}}{32}.$$

Но $S_{SAD}=\frac{1}{2}AK\cdot SD,$ отсюда $\frac{1}{2}AK\cdot\frac{a\sqrt{7}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{32}$ и $AK=\frac{a\sqrt{3}}{4\sqrt{7}}$. В треугольнике AKN имеем

$$KL=\sqrt{AK^2-AL^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{16\cdot7}-d^2}=\frac{\sqrt{3a^2-112d^2}}{4\sqrt{7}},\qquad KN=\frac{AK^2}{KL}=\frac{3a^2}{4\sqrt{7}\sqrt{3a^2-112d^2}}.$$

Площадь треугольника NSD: $S_{NSD}=\frac{1}{2}\cdot SD\cdot KN=\frac{3a^3}{32\sqrt{3a^2-112d^2}}$. Тогда $S_{NDFP}=\frac{19a^3}{64\sqrt{3a^2-112d^2}}$.

Ответ: 19/2

Рисунки к задаче