

**Первый (заочный) этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету
«Математика», осень 2017 г.**

8 КЛАСС

1. (15 баллов) Число $\overline{6x62y4}$ делится на 11, а при делении на 9 дает остаток 6. Найти остаток от деления этого числа на 13.
2. (15 баллов) Пять человек, выполняют некоторую работу. Первый, второй и третий, работая вместе, так же, как второй, четвертый и пятый, выполняют работу за час. Первый, работая с пятым, так же, как и третий, работая с четвертым, выполняют работу за 2 часа. За какое время все пять человек вместе выполняют эту работу?
3. (20 баллов) Биссектриса внешнего угла при вершине А треугольника ABC пересекает продолжение стороны BC в точке E. Доказать, что если AE в два раза больше высоты треугольника, опущенной из вершины А, то один из углов В и С треугольника на 60° больше другого.

4. (20 баллов) Числа x и y являются решениями системы
$$\begin{cases} ax - y = 2a + 1 \\ -x + ay = a \end{cases},$$
 где

a - параметр. Какое наименьшее значение может принимать выражение $2y^2 - x^2$, если $a \in [-0,5; 2]$.

5. (15 баллов) Ниф-Ниф, Наф-Наф, Нуф-Нуф и Волк решили взвеситься. Оказалось, что Волк весит больше, чем Ниф-Ниф; Нуф-Нуф и Ниф-Ниф весят больше, чем Волк и Наф-Наф; Нуф-Нуф и Наф-Наф весят столько же, сколько Волк и Ниф-Ниф. Расположите поросят и Волка в порядке возрастания веса.
6. (15 баллов) Три подруги - Маша, Оля и Света – поступили в лицей в экономический, информационный и математический классы. Если Маша экономистка, то Света не информатик. Если Оля не информатик, то Маша экономистка. Если Света не экономистка, то Оля – математик. Определите, в какие классы поступили девочки. Известно, что каждая девочка поступила в один класс, и классы различны.

Решение задач заочного тура, 8 класс

1. Число $\overline{6x62y4}$ делится на 11, а при делении на 9 дает остаток 6. Найдите остаток от деления этого числа на 13. (15 баллов)

Решение

По признаку делимости на 11 получим

$$((x + 2 + 4) - (6 + 6 + y)) \div 11 \text{ или } (x - 6 - y) \div 11$$

Подберем подходящие варианты: (0;5) (1;6) (2;7) (3;8) (4;9) (6;0) (7;1) (8;2) (9;3).

Если число $\overline{6x62y4}$ при делении на 9 дает остаток 6, то по признаку делимости на 9 получим

$$(6 + x + 6 + 2 + y + 4) - 6 \div 9$$

или $(12 + x + y) \div 9$

Подходит сочетание (6;0), следовательно, исходное число - 666204 .

Остаток от деления этого числа на 13 - число 6.

Ответ: 6.

2. Пять человек, выполняют некоторую работу. Первый, второй и третий, работая вместе, так же, как второй, четвёртый и пятый, выполняют работу за час. Первый, работая с пятым, так же, как и третий, работая с четвёртым, выполняют работу за 2 часа. За какое время все пять человек вместе выполнят эту работу? (15 баллов)

Решение:

Пусть V - объём работ, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 – скорость выполнения работы соответственно.

$$\begin{cases} (x_1 + x_2 + x_3) * 1 = V \\ (x_2 + x_4 + x_5) * 1 = V \\ (x_1 + x_5) * 2 = V \\ (x_3 + x_4) * 2 = V \end{cases} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = V \\ x_2 + x_4 + x_5 = V \\ x_1 + x_5 = \frac{V}{2} \\ x_3 + x_4 = \frac{V}{2} \end{cases}$$

Сложим все уравнения. Получим:

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3V$$

$$2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 3V$$

Искомое время $t = \frac{V}{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)}$, тогда $\frac{V}{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)} = \frac{2}{3}$.

$$t = \frac{2}{3} \text{ часа} = 40 \text{ минут.}$$

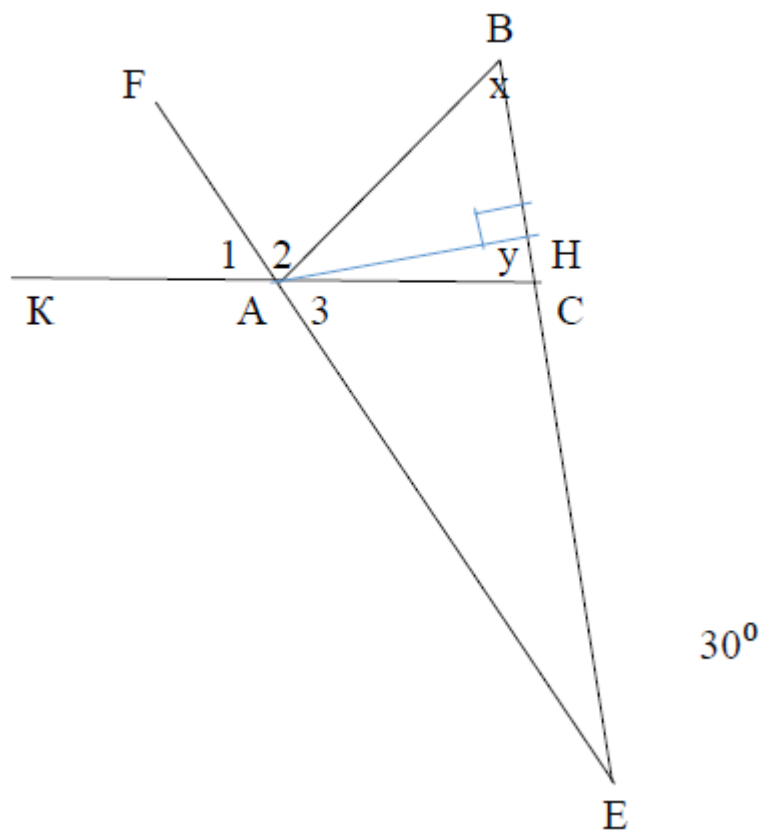
Ответ: $\frac{2}{3}$ часа (40 минут)

3. Биссектриса внешнего угла при вершине A треугольника ABC пересекает продолжение стороны BC в точке E . Доказать, что если AE в два раза больше высоты треугольника, опущенной из вершины A , то один из углов B и C треугольника на 60° больше другого. (20 баллов)

Решение.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть угол B – острый.



Так как $AH = 1/2 AE$, то в треугольнике AHE угол $E = 30^\circ$. Пусть $\angle B = x, \angle C = y$, тогда $\angle KAB = x + y$ (по свойству внешнего угла).

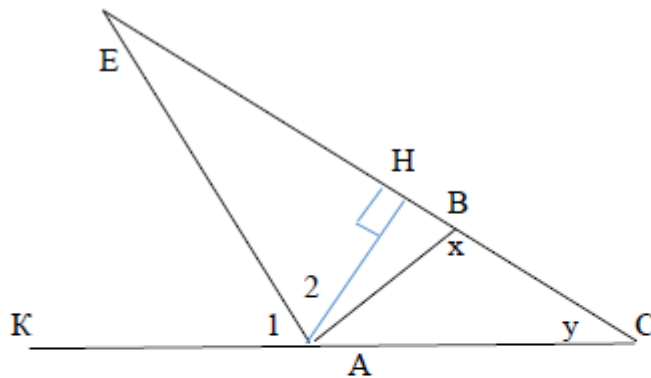
Значит, $\angle 1 = \angle 2 = \frac{x+y}{2}$ (так как AF – биссектриса). $\angle 1 = \angle 3 = \frac{x+y}{2}$ (как вертикальные).

Рассмотрим $\triangle ACE$: $\angle ACE = 180^\circ - (30^\circ + \angle 3) = 150^\circ - \frac{x+y}{2}$.

С другой стороны, $\angle ACE = 180^\circ - y$. Получим:

$$150^\circ - \frac{x+y}{2} = 180^\circ - y, \quad y - \frac{x+y}{2} = 30^\circ, \quad y - x = 60^\circ.$$

2. Угол В – тупой.



$$\begin{aligned} \angle KAB = x + y, \angle 1 = \angle 2 = \frac{x+y}{2}. \text{ В } \triangle EAH \angle EAH = 60^\circ, \text{ тогда } \angle HAB = \\ \angle 2 - \angle EAH = \frac{x+y}{2} - 60^\circ. \text{ В } \triangle HAB: \\ \angle HBA = 90^\circ + 60^\circ - \frac{x+y}{2} = 180^\circ - x, \frac{x-y}{2} = 30^\circ, x - y = 60^\circ. \end{aligned}$$

4. Числа x и y являются решениями системы $\begin{cases} ax - y = 2a + 1 \\ -x + ay = a \end{cases}$ где a -параметр.

Какое наименьшее значение может принимать выражение $2y^2 - x^2$, если $a \in [-0,5; 2]$. (20 баллов)

Решение: $\begin{cases} ax - y = 2a + 1 \\ x = a(y - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2(y - 1) - y = 2a + 1 \\ x = a(y - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(a^2 - 1) = a^2 + 2a + 1 \\ ay - a = x \end{cases}$

При $a \neq \pm 1$

$$\begin{cases} y = \frac{a+1}{a-1} \\ x = \frac{2a}{a-1} \end{cases}$$

$$F(a) = 2y^2 - x^2 = 2\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2 - \left(\frac{2a}{a-1}\right)^2 = \frac{2(a^2 + 2a + 1 - 2a^2)}{(a-1)^2} = \frac{-2(a^2 - 2a - 1)}{(a-1)^2} = -2 + \frac{4}{(a-1)^2}$$

$$F(-0,5) = -2/9.$$

Т.к. дробь всегда положительная, то наименьшее значение она принимает, когда $(a-1)$ становится наибольшим по абсолютному значению, т.е. при $a = -0,5$.

Найдем значение выражения при $a = \pm 1$.

При $a = -1$ система имеет бесконечно много решений, а при $a = 1$ система не имеет решений.

Ответ: $a = -0,5$, наименьшее значение $-2/9$.

5. *Ниф-Ниф, Наф-Наф, Нуф-Нуф и Волк решили взвеситься. Оказалось, что Волк весит больше, чем Ниф-Ниф; Нуф-Нуф и Ниф-Ниф весят больше, чем Волк и Наф-Наф; Нуф-Нуф и Наф-Наф весят столько же, сколько Волк и Ниф-Ниф. Расположите поросят и Волка в порядке убывания веса.(15 баллов)*

Решение.

Обозначим массы Волка за a , Ниф-Нифа за b , Наф-Нафа за c , Нуф-Нуфа за d . Из условия получим $a > b$ (1),

$$d + b > a + c \text{ (2), } d + c = a + b \text{ (3)}.$$

Из условий (1) и (2) следует, что $a + c > b + c$, значит, $d > c$. Из условий (2) и (3) получим: $2d + b + c > 2a + c + b$, тогда $d > a$. Но если $d > a$, то из условия (3) следует, что $b > c$. Таким образом, известно, что $d > a, a > b, b > c$. Выполнение всех неравенств возможно, если

$$d > a > b > c.$$

Следовательно, Нуф-Нуф самый тяжелый, несколько легче Волк, еще легче Ниф-Ниф, самый легкий Наф-Наф.

6. *Три подруги - Маша, Оля и Света – поступили в лицей в экономический, информационный и математический классы. Если Маша экономистка, то Света не информатик. Если Оля не информатик, то Маша экономистка. Если Света не экономистка, то Оля – математик. Определите, в какие классы поступили девочки. Известно, что каждая девочка поступила в один класс, и классы различны.(15 баллов)*

Решение.

Пусть Оля не информатик, тогда по условию 2 Маша экономистка. Если Маша экономистка, то Света по условию 1 не информатик. Получили противоречие (Маша одновременно и информатик, и экономистка). Значит, Оля информатик. Тогда Света экономистка, иначе по условию 3 Оля была бы математиком. Значит, Маша математик, Оля информатик, Света экономистка.

Ответ: Маша поступила в математический класс, Оля в информационный, Света в экономический.

Критерии проверки заданий 8-го класса

Задание	1	2	3	4	5	6	Итого
Баллы	15	15	20	20	15	15	100

Задача 1

Баллы	
15	Верное обоснованное решение задачи
10	Число найдено верно, но имеется вычислительная ошибка при нахождении остатка.
0	Найдены варианты с использованием признака деления на 11 и 9, но искомое число не найдено или найдено неверно

Задача 2

Баллы	
15	Верное обоснованное решение задачи
10	Система составлена верно, время найдено с вычислительной ошибкой
5	Система составлена верно, но решение не закончено

Задача 3

Баллы	
20	Верное обоснованное решение задачи
15	Рассмотрены оба случая, но решение недостаточно обоснованно
10	Верно рассмотрен один случай
5	Есть продвижения в решении (например, рассмотрены свойства внешнего угла, биссектрисы и т.д.), но оно не закончено

Задача 4

Баллы	
20	Верное обоснованное решение задачи
15	Система решена верно, наименьшее значение найдено неправильно или не найдено. Или система решена, наименьшее значение найдено верно, но в решении не рассмотрены случаи $a = \pm 1$
10	Система решена без рассмотрения случаев $a = \pm 1$, наименьшее

	значение не найдено
5	Есть продвижения в решении системы, но оно не закончено

Задача 5

Баллы	
15	Верное обоснованное решение задачи
10	Задача решена с недостаточными обоснованиями (например, составлены только два неравенства из трех)
5	Верно составлено одна или два неравенства из трех, но решение не закончено или закончено с ошибкой

Задача 6

Баллы	
15	Верное обоснованное решение задачи
10	Решение верное, но недостаточно обоснованно
5	В решении имеются верные выводы, но оно не закончено или закончено с ошибкой