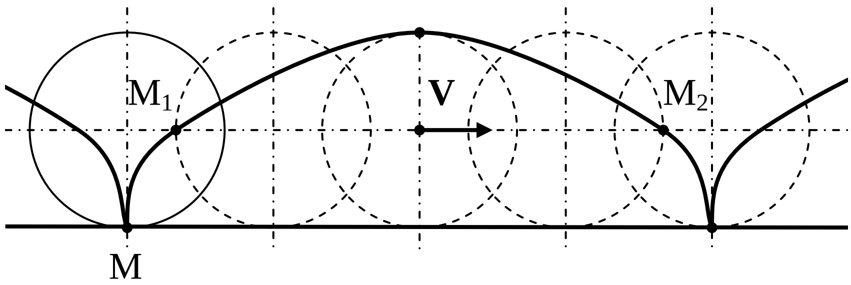
Первый (заочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету

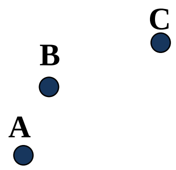
«Физика», осень 2017 г.

10 КЛАСС

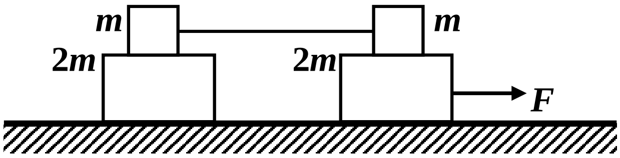
1. Колесо радиуса R = 1 м катится по горизонтальной дороге без проскальзывания с постоянной скоростью. Некоторая точка M обода колеса в системе отсчета, связанной с дорогой, описывает кривую, которая называется циклоидой (см. рис.). По дуге M_1M_2 этой циклоиды с постоянной скоростью V = 1 м/с летит комар. В каких пределах изменяется ускорение комара, пока он летит от точки M_1 до точки M_2? Точки M_1 и M_2 соответствуют положениям точки соприкосновения M колеса с дорогой спустя четверть и три четверти периода оборота колеса.



2. Камень бросили с поверхности земли. На рисунке показаны три точки траектории движения камня A, B, C, которые он проходит за два последовательных одинаковых промежутка времени τ. Пользуясь геометрическими инструментами: линейкой (без делений), циркулем и треугольником, найдите положение четвертой точки траектории D, в которой окажется камень спустя такой же промежуток времени τ после прохождения точки C. Траектория камня лежит в вертикальной плоскости, сопротивление воздуха пренебрежимо мало. Опишите и поясните метод построения точки D.



3. На гладком столе расположена механическая система, состоящая из двух грузов массой m = 1 кг и двух грузов массой $2m$ = 2 кг, изображенная на рисунке. Верхние грузы массой m соединены натянутой невесомой нерастяжимой нитью. Коэффициент трения между грузами m и $2m$ равен μ = 0,1. В момент времени t = 0 на систему начинает действовать сила F, пропорциональная времени t: $F = \alpha t$, где α = 0,15 Н/с. В какой момент времени $t = t_0$ верхние грузы массой m начнут скользить? С какими ускорениями будут двигаться все четыре груза в момент времени $t = 2t_0$?



4. Вообразим, что строительная техника позволяет возводить сколь угодно высокие сооружения. Какую высоту H должна иметь башня, расположенная на экваторе Земли, чтобы тело, находящееся на вершине такой башни, было невесомым?

5. В коробке находится часть электрической цепи и сделаны две пары выводов: «*вход*» и «*выход*». К клеммам «*выход*» подключен идеальный амперметр. К клеммам «*вход*» подключили резистор сопротивлением R = 1 Ом и батарейку напряжением $U = 4$ В (рис. 1). При этом амперметр показывает значение силы тока I_1 = 1 А. Если к клеммам вход подключить аккумулятор, напряжение которого в 2 раза больше, чем у батарейки, и резистор сопротивлением $2R$ (рис. 2), то через амперметр, подключенный к клеммам «*выход*», потечет ток $I_2 = 2I_1$.

Начертите схему, по возможности наиболее простого участка цепи, заключенного внутри коробки. Укажите значения параметров элементов этого участка цепи.

Считайте, что батарейка и аккумулятор не имеют собственного (внутреннего) сопротивления. Сопротивление идеального амперметра равно нулю.

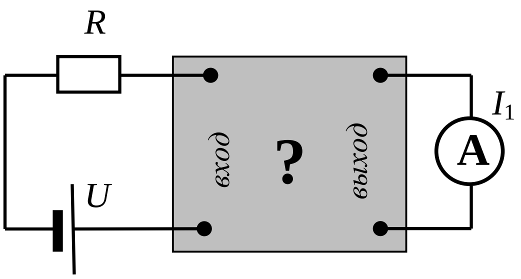


Рис. 1

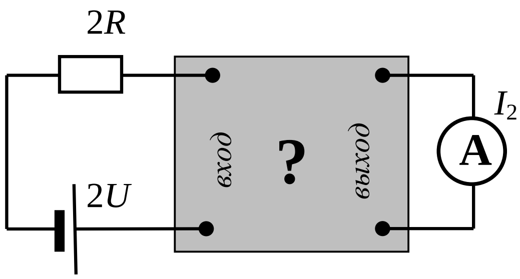


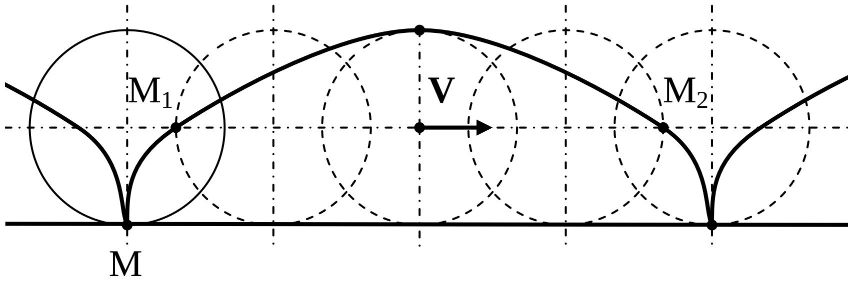
Рис. 2

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ЗАДАЧ.

- Максимальный балл за каждую задачу – 20.
- За каждую задачу выставляется целое число баллов от 0 до 20. Если задача отсутствует, то в таблице пишется X.
- Если решение задачи содержит разрозненные записи, присутствует рисунок (хоть частично правильный) и одна- две правильные формулы, но решение, как таковое отсутствует или абсолютно неверное, то можно поставить 1-2 балла.
- Если решение верное, содержит все необходимые формулы и физические законы, имеет понятные пояснения, а также проведены необходимые математические преобразования и получен правильный ответ (ответы) – это 20 баллов.
- Верные решения задач могут отличаться от авторских.
- За отсутствие пояснений, численных расчетов или единиц физических величин при верном решении задачи можно снять 1-2 балла.
- В случае если задача содержит правильный путь решения, но не доведена до ответа или получен неправильный ответ, при этом присутствуют отдельные правильные элементы решения, то оценивание провести по критериям, приведенным ниже после каждой задачи.

Решения и критерии оценивания заданий 10 класс

1. Колесо радиуса R = 1 м катится по горизонтальной дороге без проскальзывания с постоянной скоростью. Некоторая точка M обода колеса в системе отсчета, связанной с дорогой, описывает кривую, которая называется циклоидой (см. рис.). По дуге M_1M_2 этой циклоиды с постоянной скоростью V = 1 м/с летит комар. В каких пределах изменяется ускорение комара, пока он летит от точки M_1 до точки M_2? Точки M_1 и M_2 соответствуют положениям точки соприкосновения M колеса с дорогой спустя четверть и три четверти периода оборота колеса.

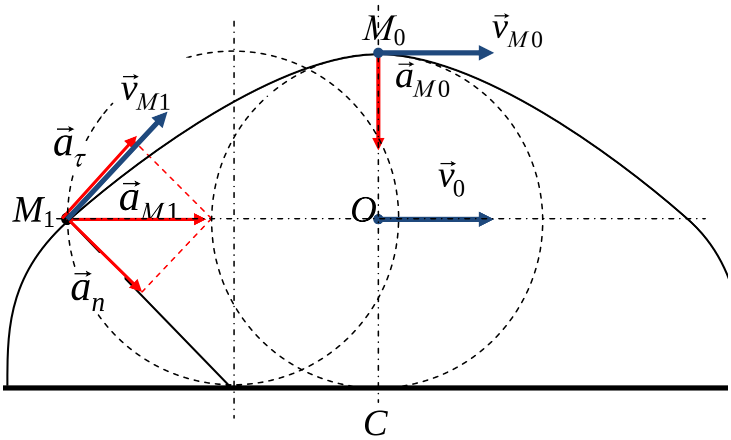


Решение.

1. Т.к. комар летит с постоянной скоростью V, то его ускорение при движении по криволинейной траектории равно $a = \dfrac{V^2}{R_{M_i}}$, где R_{M_i} – радиус кривизны циклоиды в некоторой точке M_i.

2. Максимальный радиус кривизны циклоиды и, соответственно, минимальное ускорение комара будет в верхней точке M_0 (см. рисунок).

3. Минимальный радиус кривизны циклоиды и, соответственно, максимальное ускорение комара будет в точках M_1 и M_2 траектории.



4. Пусть центр колеса O катится без проскальзывания с постоянной скоростью $\vec{v}_0$, тогда скорость точки C соприкосновения колеса с дорогой равна нулю (см. рис.). Для того, чтобы получить радиус кривизны траектории колеса в точке M_0, воспользуемся тем, что во всех инерциальных системах отсчета ускорение точки одинаково. В системе отсчета, связанной с центром колеса $a_{M0} = a = \dfrac{v_0^2}{R}$. В системе отсчета связанной с землей, скорость верхней точки колеса равна $v_{M0} = 2v_0$. Тогда $a = a_n = \dfrac{(2v_0)^2}{R_{M_0}}$. $\Rightarrow \dfrac{v_0^2}{R} = \dfrac{(2v_0)^2}{R_{M_0}}$, $\Rightarrow R_{M_0} = 4R$.

Т.к. качение колеса без проскальзывания, можно рассматривать, как вращение вокруг мгновенной оси, проходящей в каждый момент времени через точку C соприкосновения с дорогой, то может показаться, что центр кривизны циклоиды находится в точке C, и, соответственно, радиус кривизны $R_{M_0} = 2R$. *Но это неверно, поскольку мгновенная ось перемещается вместе с колесом.*

5. Минимальное ускорение комара $a_{\min} = \dfrac{V^2}{4R} = 0,25$ м/с².

6. Найдем радиус кривизны циклоиды в точке M_1 (см. рис.). В системе отсчета, связанной с дорогой, $v_{M1} = v_0\sqrt{2}$, $\vec{a}_{M1} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$. Тангенциальное ускорение направлено по касательной: $\vec{a}_\tau \parallel \vec{v}_{M1}$; нормальное ускорение $\vec{a}_n \perp \vec{v}_{M1}$, его модуль равен $a_n = \dfrac{v_{M1}^2}{R_{M_1}}$. Из рисунка видно, что

$a_n = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\Rightarrow \frac{(\sqrt{2}v_0)^2}{R_{M_1}} = \frac{v_0^2}{R}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}, \ \Rightarrow R_{M_1} = 2R\sqrt{2}.$$

7. Максимальное ускорение комара $a_{\max} = \dfrac{V^2\sqrt{2}}{4R} \approx 0{,}35$ м/с^2.

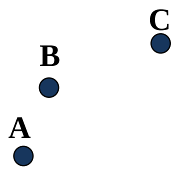
Ответ. $\dfrac{V^2}{4R} \le a \le \dfrac{V^2\sqrt{2}}{4R}$. $0{,}25 \text{ м/с}^2 \le a \le 0{,}35 \text{ м/с}^2$.

При неправильном решении, когда принимается, что радиус кривизны $R_{M_i} = |CM_i|$, *можно поставить до половины максимального балла.*

Критерии оценивания задачи 1.

	Решение содержит следующие верные элементы решения. Баллы за каждый верный элемент решения суммируются	**Max. балл ставится, когда данный элемент решения сделан верно и полно.**
	Записана формула для ускорения при движении по криволинейной траектории с постоянной скоростью	от 1 до 2 баллов (1 балл – без пояснений, 2 балла с пояснениями)
	Установлено, что максимальный радиус кривизны циклоиды (минимальное ускорение комара) будет в верхней точке	1 балл
	Установлено, что минимальный радиус кривизны циклоиды (максимальное ускорение комара) будет в точках M_1 и M_2.	1 балл
	Получена формула для $a_{\min}$ в верхней точке траектории	от 1 до 6 баллов (до 3 баллов, если $R_{\max} = 2R$)
	Посчитано числовые значения $a_{\min}$	1 балл
	Получена формула для $a_{\max}$ в точке M_1 (или M_2)	от 1 до 8 баллов; (до 4 баллов, если $R_{\min} = R\sqrt{2}$)
	Посчитано числовое значения $a_{\max}$	1 балл

2. Камень бросили с поверхности земли. На рисунке показаны три точки траектории движения камня A, B, C, которые он проходит за два последовательных одинаковых промежутка времени τ. Пользуясь геометрическими инструментами: линейкой (без делений), циркулем и треугольником, найдите положение четвертой точки траектории D, в которой окажется камень спустя такой же промежуток времени τ после прохождения точки C. Траектория камня лежит в вертикальной плоскости, сопротивление воздуха пренебрежимо мало. Опишите и поясните метод построения точки D.



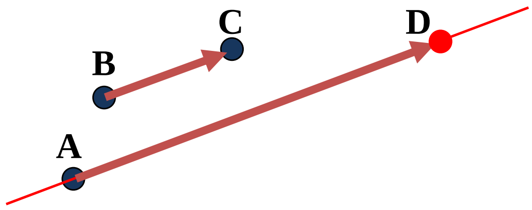
Решение

Обозначим через $\vec{v}_0$ скорость камня в точке *A*. Тогда $\overrightarrow{AD} = \vec{v}_0 \cdot 3\tau + \dfrac{\vec{g}(3\tau)^2}{2}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{v}_B\tau + \dfrac{\vec{g}\tau^2}{2} = (\vec{v}_0 + \vec{g}\tau)\tau + \dfrac{\vec{g}\tau^2}{2}$. Можно вектор $\overrightarrow{BC}$ найти также, как

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \left[\vec{v}_0 \cdot 2\tau + \frac{\vec{g}(2\tau)^2}{2}\right] - \left[\vec{v}_0\tau + \frac{\vec{g}\tau^2}{2}\right] = \vec{v}_0\tau + \frac{3\vec{g}\tau^2}{2}.$$

Для того чтобы построить точку D, воспользуемся тем, что $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{BC}$.

<u>Построение точки D</u>



1) С помощью линейки построим отрезок *BC*.

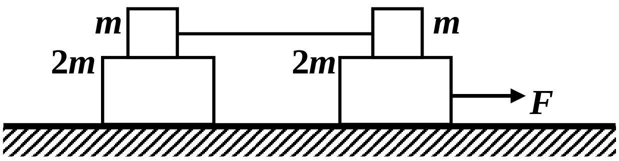
2) С помощью треугольника и линейки через точку A проведем прямую, параллельную *BC*.

3) С помощью циркуля отложим на этой прямой отрезок $AD = 3BC$.

Критерии оценивания задачи 2.

	Решение содержит следующие верные элементы решения. Баллы за каждый верный элемент решения суммируются	**Max. балл ставится, когда данный элемент решения сделан верно и полно. (MAX = 20 баллов)**
	Сделаны необходимые построения и получена точка D, но отсутствуют какие-либо объяснения	от 1 до 5 баллов
	Записаны уравнения для радиус-векторов и (или) скоростей точек при баллистическом движении	от 1 до 2 баллов
	Установлено, что $\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = 3\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$.	от 1 до 5 баллов
	Установлено, что $\overrightarrow{AD} \square 3\overrightarrow{BC}$.	от 1 до 5 баллов
	Сделаны пояснения всех построений	от 1 до 3 баллов

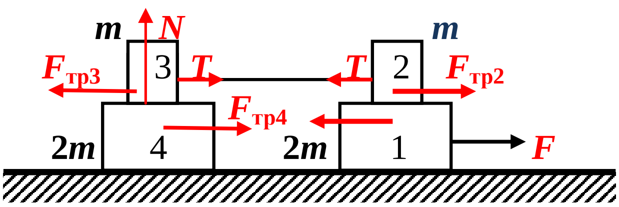
3. На гладком столе расположена механическая система, состоящая из двух грузов массой m = 1 кг и двух грузов массой $2m$ = 2 кг, изображенная на рисунке. Верхние грузы массой m соединены натянутой невесомой нерастяжимой нитью. Коэффициент трения между грузами m и $2m$ равен μ = 0,1. В момент времени t = 0 на систему начинает действовать сила F, пропорциональная времени t: $F = \alpha t$, где α = 0,15 Н/с. В какой момент времени $t = t_0$ верхние грузы массой m начнут скользить? С какими ускорениями будут двигаться все четыре груза в момент времени $t = 2t_0$?



Решение

1. Пусть механическая система движется как единое целое. Тогда ее ускорение $a = \dfrac{F}{6m}$.

Пронумеруем грузы, как на рисунке, и рассмотрим движение груза 4. На него в горизонтальном направлении действует сила трения покоя $F_{тр4} \le \mu N = \mu mg$.



Тогда $F_{тр4} = 2ma$. $\Rightarrow$ $2m \cdot \frac{F}{6m} \le \mu mg$, $\Rightarrow$ $F \le 3\mu mg$. Таким образом, условие, при котором верхние грузы начнут скользить: $F = 3\mu mg$, что соответствует моменту времени $t_0 = \frac{3\mu mg}{\alpha} = 20$ с.

2. В момент времени $t = 2t_0 = 40$ с, что соответствует силе F = 6 Н, верхние грузы скользят по поверхности нижних. Докажем, что при этом грузы 3 и 4 движутся как целое. Предположим противное: груз 3 скользит по грузу 4. Тогда между ними действует сила трения скольжения $F_{тр3} = F_{тр4} = \mu mg$. Запишем уравнения движения грузов 2 и 3, связанных нитью.

Для груза 2: $F_{тр2} - T = ma_2$,

Для груза 3: $T - F_{тр3} = ma_3$.

Получили противоречие, т.к. $F_{тр2} = F_{тр3} = \mu mg$, ускорения грузы 2 и 3 равны $a_2 = a_3$ и направлены в одну сторону. Следовательно, ускорения грузов 2, 3 и 4 одинаковы и равны $a_2 = \frac{F_{тр2}}{4m} = \frac{\mu g}{4} = 0,25$ м/с^2, а ускорение груза 1 $a_1 = \frac{F - F_{тр2}}{2m} = \frac{F - \mu mg}{2m} = \frac{2\alpha t_0 - \mu mg}{2m} = \frac{5\mu g}{2} = 2,5$ м/с^2.

Ответ 1) $t_0 = \frac{3\mu mg}{\alpha} = 20$ с; 2) $a_1 = \frac{5\mu g}{2} = 2,5$ м/с^2, $a_2 = \frac{\mu g}{4} = 0,25$ м/с^2.

Критерии оценивания задачи 3.

	Решение содержит следующие верные элементы решения. **Баллы за каждый верный элемент решения суммируются**	**Max. балл ставится, когда данный элемент решения сделан верно и полно.**
	Сделан рисунок, на котором указаны все силы, действующие на тела системы	от 1 до 2 баллов
	Записаны уравнения динамики в первом случае, когда система движется как единое целое	от 1 до 2 баллов
	Получена формула для времени t_0	от 1 до 2 баллов
	Произведен расчет и получено числовое значение t_0	от 1 до 2 баллов
	Установлено, что во втором случае грузы 2, 3 и 4 движутся как единое целое	от 1 до 2 баллов
	Записаны уравнения динамики во втором случае	от 1 до 2 баллов

	Получена формула для расчета ускорения a_1 груза 1	от 1 до 2 баллов
	Произведен расчет и получено числовое значение ускорения a_1	от 1 до 2 баллов
	Получена формула для расчета ускорения a_2 грузов 2, 3 и 4	от 1 до 2 баллов
0	Произведен расчет и получено числовое значение ускорения a_2	от 1 до 2 баллов

4. Вообразим, что строительная техника позволяет возводить сколь угодно высокие сооружения. Какую высоту *H* должна иметь башня, расположенная на экваторе Земли, чтобы тело, находящееся на вершине такой башни, было невесомым?

Решение

Запишем второй закон Ньютона для тела массой *m* на вершине башни $F - N = m\omega^2(R+H)$ и условие невесомости $N = 0$. Сила тяготения $F = G\dfrac{Mm}{(R+H)^2}$, угловая скорость вращения Земли $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, *T* = 24 часа = 86400 с. Воспользуемся также формулой для ускорения свободного падения на поверхности Земли $g = \dfrac{GM}{R^2}$. $\Rightarrow$ $H = \sqrt[3]{\dfrac{gR^2T^2}{4\pi^2}} - R = 35940$ км.

Ответ. $H = \sqrt[3]{\dfrac{gR^2T^2}{4\pi^2}} - R = 35940$ км.

Критерии оценивания задачи 4.

	Решение содержит следующие верные элементы решения. **Баллы за каждый верный элемент решения суммируются**	**Max. балл ставится, когда данный элемент решения сделан верно и полно.**
	Записан второй закон Ньютона	от 1 до 2 баллов
	Записано условие невесомости тела	4 балла
	Записана формула закона всемирного тяготения	от 1 до 2 баллов
	Установлено, что период обращения тела 24 часа	2 балла
	Сделаны необходимые алгебраические преобразования и получен аналитический ответ	от 1 до 8 баллов
	Выбраны правильные значения постоянных и получено числовое значение *H*	от 1 до 2 баллов

5. В коробке находится часть электрической цепи и сделаны две пары выводов: «*вход*» и «*выход*». К клеммам «*выход*» подключен идеальный амперметр. К клеммам «*вход*» подключили резистор сопротивлением R = 1 Ом и батарейку напряжением $U = 4$ В (рис. 1). При этом амперметр показывает значение силы тока I_1 = 1 А. Если к клеммам вход подключить аккумулятор, напряжение которого в 2 раза больше, чем у батарейки, и резистор сопротивлением $2R$ (рис. 2), то через амперметр, подключенный к клеммам «*выход*», потечет ток $I_2 = 2I_1$.

Начертите схему, по возможности наиболее простого участка цепи, заключенного внутри коробки. Укажите значения параметров элементов этого участка цепи.

Считайте, что батарейка и аккумулятор не имеют собственного (внутреннего) сопротивления. Сопротивление идеального амперметра равно нулю.

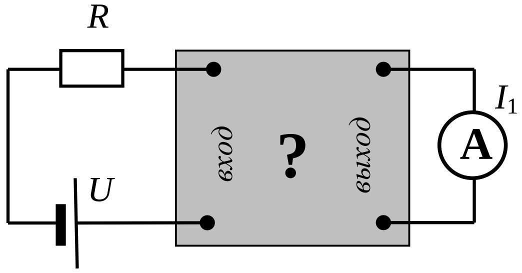


Рис. 1

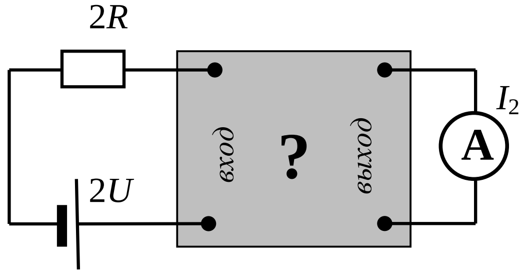


Рис. 2

Решение

Внутри коробки не может быть резистора; не может быть также источника тока с нулевым внутренним сопротивлением – это противоречит условиям задачи.

Простейшая схема внутри коробки (см. рис. 3) – последовательно соединенные источник тока напряжением U_1 и резистор сопротивлением r (или источник тока с ЭДС U_1 и внутренним сопротивлением r).

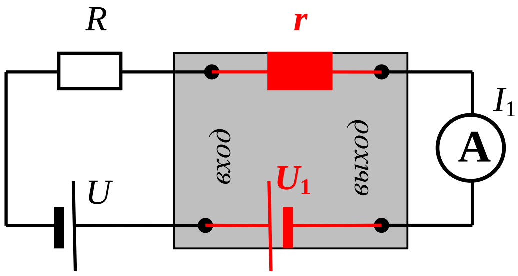


Рис. 3

Чтобы получить значения U_1 и R_1, запишем законы Ома.

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{U - U_1}{R + r}, \\ 2I_1 = \dfrac{2U - U_1}{2R + r}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} U - U_1 = I_1(R + r), \\ 2U - U_1 = 2I_1(2R + r). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_1 = 2I_1R = 2 \text{ В}, \\ r = \dfrac{U - 3I_1R}{I_1} = 1 \text{ Ом}. \end{cases}$$

Могут быть предложены и другие варианты электрических цепей внутри коробки.

Критерии оценивания задачи 5.

	Решение содержит следующие верные элементы решения. Баллы за каждый верный элемент решения суммируются	**Max. балл ставится, когда данный элемент решения сделан верно и полно.**
	Нарисована схема возможного участка цепи внутри коробки	от 1 до 2 баллов
	Записаны законы Ома для расчета элементов цепи внутри коробки	от 1 до 2 баллов
	Получена система уравнений для расчета элементов цепи внутри коробки	от 1 до 6 баллов
	Приведено решение записанной системы	от 1 до 8 баллов
	Получены правильные числовые значения элементов внутри коробки	от 1 до 2 баллов