«УТВЕРЖДАЮ»

Ректор МГТУ им. Н.Э. Баумана

_______________А.А. Александров

«_____»_______________2016 г.

Типовой вариант академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее»

по общеобразовательному предмету «Математика»

1. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 12 км, одновременно вышел пешеход и выехал велосипедист. Доехав до пункта B менее чем за один час, велосипедист, не останавливаясь, повернул обратно и стал двигаться по направлению к пункту A со скоростью в два раза большей первоначальной. Через 12 мин после своего отправления из пункта B велосипедист встретился с пешеходом. Определите наибольшее возможное целое значение скорости (в км/ч) пешехода, и для этого значения скорости пешехода найдите первоначальную скорость велосипедиста. (8 баллов)

2. Решите неравенство $\log_x(16-24x+9x^2)<0$ (8 баллов)

3. Два числа x и y удовлетворяют уравнению $300x^2-61xy+3y^2+7=0$ и являются соответственно третьим и восьмым членами убывающей арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел. Найдите разность этой прогрессии. (8 баллов)

4. Решите уравнение $\dfrac{2\operatorname{tg}^4 8x+4\sin 3x\sin 5x-\cos 6x-\cos 10x+2}{\sqrt{\sin x-\cos x}}=0$

(8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{(2\cdot 2^{-\log_x 3}-4)\sqrt{2-\sqrt{\log_x 3+2}}}{1+\sqrt{\log_x 3+5}}>\dfrac{(2^{-\log_x 3}-2)\sqrt{2-\sqrt{\log_x 3+2}}}{\sqrt{\log_x 3+5}-2}$

(10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x)=1/g(16g(g(\ln x))/65)$, где $g(x)=x^3+1/x^3$

(10 баллов)

7. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K так, что $AK=4$, $BK=9$, $KC=3$. Около треугольника ABK описана окружность. Через точку C и середину D стороны AB проведена прямая, которая пересекает окружность в точке P, причем $CP>CD$. Найдите DP, если $\angle APB=\angle BAC$. (10 баллов)

8. На прямой $x=\sqrt{3}/2$ найдите точку M, через которую проходят две касательные к графику функции $y=x^2/2$, угол между которыми равен $60°$. (12 баллов)

9. Найдите все значения a, при которых система уравнений $y-2=a(x-4)$, $2x/(|y|+y)=\sqrt{x}$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (12 баллов)

10. Боковые ребра треугольной пирамиды $TABC$ образуют между собой прямые углы. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину C и середину стороны AB основания, если боковые ребра $TA=4$, $TB=12$, $TC=3$? Какое из боковых ребер пересекает в этом случае плоскость и на какие части его делит?

(12 баллов)

Решения типового варианта

1. Пусть x (км/ч) - скорость пешехода, y (км/ч) – первоначальная скорость велосипедиста, t (ч) – время, затраченное велосипедистом на путь от A до B. Тогда

$$\begin{cases} x(t+0{,}2)+0{,}4y=12, \\ yt=12, \\ t<1, \end{cases} \Rightarrow x(12/y+0{,}2)+0{,}4y=12, \Rightarrow 2y^2+(x-60)y+60x=0.$$

Для того чтобы квадратное уравнение имело решение необходимо, чтобы $D=(x-60)^2-480x\ge 0$. Следовательно, $x^2-600x+3600\ge 0$, $D/4=\left(120\sqrt{6}\right)^2$,

$$x\in(-\infty;300-120\sqrt{6}]\cup[300+120\sqrt{6};+\infty).$$

Поскольку по условию $x\in N$, и $0{,}2x<12$, т.е. $x<60$, то $x\in[1;300-120\sqrt{6}]\cap N$. Используя оценку $2{,}44<\sqrt{6}<2{,}45$, получаем оценку $293<120\sqrt{6}<294$, и $6<300-120\sqrt{6}<7$. Наибольшее возможное целое значение скорости $x=6$. Найдем первоначальную скорость велосипедиста при $x=6$ из уравнения $2y^2-54y+360=0$, или $y^2-27y+180=0$, $y_1=12$, $y_2=15$. Поскольку $t<1$, $t=\dfrac{12}{y}<1$, и $y>12$, то $y=15$. **Ответ:** 6 км/ч, 15 км/ч.

2. $\log_x(16-24x+9x^2)<0$. ОДЗ: $x>0,\quad x\ne 1,\quad x\ne 4/3$.

1) $0<x<1;\quad 16-24x+9x^2>1\Leftrightarrow 3x^2-8x+5>0$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<1, \\ x>5/3 \end{array}\right. \\ 0<x<1 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<1$;

2) $x>1,\quad x\ne 4/3;\ 16-24x+9x^2<1\Leftrightarrow 3x^2-8x+5<0\Leftrightarrow 1<x<5/3,\ x\ne 4/3$.

Ответ: $x\in(0;1)\cup(1;4/3)\cup(4/3;5/3)$.

3. Разложим на множители выражение $300x^2-61xy+3y^2$.

При $y\ne 0$ имеем $y^2\left(300\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-61\left(\dfrac{x}{y}\right)+3\right)=300y^2\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{3}{25}\right)\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{1}{12}\right)=(25x-3y)(12x-y)$.

Эта формула верна и для всех действительных чисел y. По условию задачи целые числа x и y удовлетворяют уравнению $(25x-3y)(12x-y)=-7$. Целые числа $25x-3y$ и $12x-y$ являются делителями числа -7, причем возможны следующие случаи:

1) $\begin{cases} 25x-3y=-7, \\ 12x-y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 25x-3y=7, \\ 12x-y=-1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 25x-3y=-1, \\ 12x-y=7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 25x-3y=1, \\ 12x-y=-7. \end{cases}$

Каждую систему решаем методом сложения. Умножаем обе части второго уравнения системы на -3 и складываем с первым:

1) $\begin{cases} -11x=-10, \\ 12x-y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -11x=10, \\ 12x-y=-1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -11x=-22, \\ 12x-y=7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -11x=22, \\ 12x-y=-7. \end{cases}$

Системы 1) и 2) не имеют целых решений. Поскольку по условию прогрессия является убывающей, следовательно, $x<y$, этому условию удовлетворяют решения системы 4): $x=-2$,

$y=-17$. Таким образом, $a_3=-2,\ a_8=-17$, или $a_1+2d=-2$, $a_1+7d=-17$. Отсюда получаем $d=-3$. **Ответ:** $d=-3$.

4. $\dfrac{2\operatorname{tg}^4 8x+4\sin 3x\sin 5x-\cos 6x-\cos 10x+2}{\sqrt{\sin x-\cos x}}=0$.

При условии $\sin x-\cos x>0$ находим корни уравнения

$2\operatorname{tg}^4 8x+4\sin 3x\sin 5x-\cos 6x-\cos 10x+2=0 \iff$

$2\operatorname{tg}^4 8x+4\sin 3x\sin 5x-1+2\sin^2 3x-1+2\sin^2 5x+2=0 \iff 2\operatorname{tg}^4 8x+2(\sin 3x+\sin 5x)^2=0 \iff$

$$\begin{cases}\operatorname{tg} 8x=0,\\ \sin 3x+\sin 5x=0,\end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{\pi n}{8},\\ \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \sin 4x=0,\end{array}\right.\end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{\pi n}{8},\ n\in Z,\\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z,\\ x=\dfrac{\pi l}{4},\ l\in Z,\end{array}\right.\end{cases} \iff x=\dfrac{\pi l}{4},\ l\in Z.$$

С учетом условия $\sin x-\cos x>0$ окончательно имеем $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n$, $x=\pi+2\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n$, $x=\pi+2\pi n$, $n\in Z$.

5. $\dfrac{(2\cdot 2^{-\log_x 3}-4)\sqrt{2-\sqrt{\log_x 3+2}}}{1+\sqrt{\log_x 3+5}}>\dfrac{(2^{-\log_x 3}-2)\sqrt{2-\sqrt{\log_x 3+2}}}{\sqrt{\log_x 3+5}-2}$

Сделаем замену переменной $y=\log_x 3$.

$$\frac{(2\cdot 2^{-y}-4)\sqrt{2-\sqrt{y+2}}}{1+\sqrt{y+5}}>\frac{(2^{-y}-2)\sqrt{2-\sqrt{y+2}}}{\sqrt{y+5}-2} \iff$$

$$(2^{-y}-2)\left(\frac{2}{1+\sqrt{y+5}}-\frac{1}{\sqrt{y+5}-2}\right)\sqrt{2-\sqrt{y+2}}>0.$$

Найдем ОДЗ: $y\ge -5$, $y\ne -1$, $2-\sqrt{y+2}\ge 0 \Rightarrow -2\le y\le 2$.

Поскольку неравенство строгое, то при $-2\le y<2,\ y\ne -1$, неравенство равносильно следующему:

$$(-y-1)\left(\frac{2}{1+\sqrt{y+5}}-\frac{1}{\sqrt{y+5}-2}\right)>0, \text{ или } (y+1)\left(\frac{\sqrt{y+5}-5}{(1+\sqrt{y+5})(\sqrt{y+5}-2)}\right)<0,$$

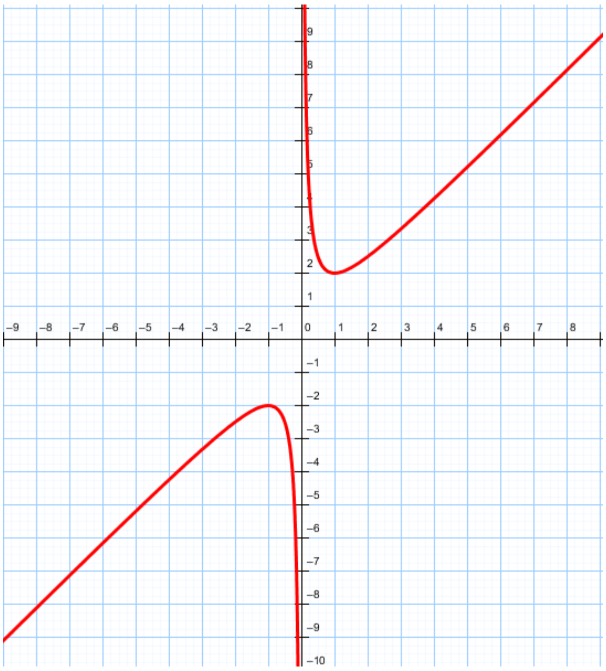
или $\dfrac{(y+1)(y-20)}{(y+1)}<0$, или $y<20$.

Таким образом, $-2\le y<-1$ или $-1<y<2$. Производя обратную замену, получаем:

$$\begin{cases}\log_x 3 \ge -2,\\ \log_x 3 < 2,\\ \log_x 3 \ne -1,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1+2\log_3 x}{\log_3 x} \ge 0,\\ \dfrac{1-2\log_3 x}{\log_3 x} < 0,\\ x \ne 1/3,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\log_3 x > 0,\\ \log_3 x \le -1/2,\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\log_3 x < 0,\\ \log_3 x > 1/2,\end{array}\right.\\ x \ne 1/3,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \in (0; 1/\sqrt{3}] \cup (1; +\infty),\\ x \in (0; 1) \cup (\sqrt{3}; +\infty),\\ x \ne 1/3,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$x \in (0; 1/3) \cup (1/3; 1/\sqrt{3}] \cup (\sqrt{3}; +\infty)$.

Ответ: $x \in (0; 1/3) \cup (1/3; 1/\sqrt{3}] \cup (\sqrt{3}; +\infty)$.



6. Рассмотрим сначала функцию $\varphi(t) = t + 1/t$. Функция $\varphi(t)$ определена для всех $t \ne 0$. Найдем экстремумы функции $\varphi(t)$. Для того найдем интервалы знакопостоянства производной функции $\varphi(t)$: $\varphi'(t) = 1 - 1/t^2 = (t-1)(t+1)/t^2$, $\varphi'(t) = 0$ при $t = \pm 1$. Проходя через точку $t = -1$ производная $\varphi'(t)$ меняет знак с плюса на минус, следовательно, $t = -1$ является точкой максимума, $\varphi_{\max} = \varphi(-1) = -2$. Проходя через точку $t = 1$ производная $\varphi'(t)$ меняет знак с минуса на плюс, следовательно, $t = 1$ является точкой минимума, $\varphi_{\min} = \varphi(1) = 2$. График функции $\varphi(t)$ представлен на рисунке. Множеством значений этой функции является множество $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. Функция $g(x) = x^3 + 1/x^3 = \varphi(x^3)$. Поскольку функция $t = x^3$ возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$ и принимает все числовые значения, то множеством значений функции $\varphi(x^3)$, следовательно, и $g(x)$, является множество $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$, причем $g_{\max} = g(-1) = -2$, $g_{\min} = g(1) = 2$. По той же причине множеством значений функции $g(\ln x)$ также является множество $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. Множеством значений функции $g(g(\ln x))$ является множество $(-\infty; -65/8] \cup [65/8; +\infty)$, а функции $16g(g(\ln x))/65$ — множество $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. Таким образом, $g(16g(g(\ln x))/65) \in (-\infty; -65/8] \cup [65/8; +\infty)$. Отсюда находим множество E_f значений функции $f(x) = 1/g(16g(g(\ln x))/65)$: $E_f = [-8/65; 0) \cup (0; 8/65]$.

Ответ: $E_f = [-8/65; 0) \cup (0; 8/65]$.

7.

1) $\angle APB = \angle BAC$, $\angle APB = \angle AKC$, $\angle AKC = \angle BAC$, $\angle KAC = \angle ABC$.

Отрезок AC является отрезком касательной к окружности.

$\Delta ABC \approx \Delta AKC \quad \Rightarrow$

$$\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{KC} = \frac{BC}{AC} \quad \Rightarrow \quad \frac{AB}{4} = \frac{AC}{3} = \frac{12}{AC} \quad \Rightarrow \quad AC = 6, \quad AB = 8.$$

2) CD - медиана $\Rightarrow$ по теореме косинусов для треугольников ADC и BDC имеем:

$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos\angle ADC, \quad BC^2 = BD^2 + CD^2 + 2BD \cdot CD \cos\angle ADC.$

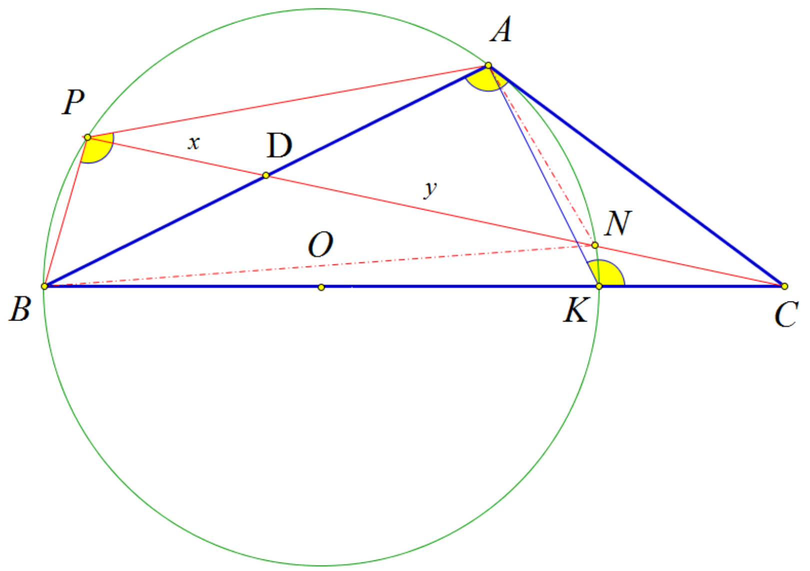
Так как $AD = BD$, то $AC^2 + BC^2 = 2AD^2 + 2CD^2$,

$CD^2 = \frac{1}{2}(AC^2 + BC^2) - AD^2 = \frac{1}{2}(36+144) - 16 = 74,\ CD = \sqrt{74}.$

3) Пусть $DP = x$, $DN = y$ (N - точка пересечения прямой CD с окружностью, $N \neq P$).

Четырехугольник $ANBP$ вписан в окружность $\Rightarrow$ $AD \cdot DB = PD \cdot BT$, $16 = xy$. По свойствам касательных и секущих к окружности имеем $CN \cdot CP = AC^2$, $(CD - y)\cdot(CD + x) = AC^2$, $(\sqrt{74} - y)\cdot(\sqrt{74} + x) = 36.$

4) Решаем систему уравнений $16 = xy$, $(\sqrt{74} - y)\cdot(\sqrt{74} + x) = 36$ $\Rightarrow y = \frac{22}{\sqrt{74}} + x \Rightarrow$ $x^2 + \frac{22}{\sqrt{74}}x - 16 = 0,\ x = \frac{-11 + 3\sqrt{145}}{\sqrt{74}},\ DP = \frac{-11+3\sqrt{145}}{\sqrt{74}}.$ **Ответ:** $\frac{-11+3\sqrt{145}}{\sqrt{74}}$.



8. На прямой $x = \sqrt{3}/2$ найдите точку M, через которую проходят две касательные к графику функции $y = x^2/2$, угол между которыми равен $60°$ (без применения производной).

$y = x^2/2$, $M\left(\sqrt{3}/2; y_0\right)$. Уравнение $\frac{1}{2}x^2 = y_0 + k\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, или $x^2 - 2kx + k\sqrt{3} - 2y_0 = 0$, имеет единственное решение, если $\frac{D}{4} = k^2 - k\sqrt{3} + 2y_0 = 0$.

Найденные из этого уравнения два значения k должны удовлетворять условиям $k_1 + k_2 = \sqrt{3}$ (1), $k_1 \cdot k_2 = 2y_0$ (2).

Из условия $\alpha_2 - \alpha_1 = 60°$, $\operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \sqrt{3}$ следует $\frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_1} = \sqrt{3}$, или $\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} = \sqrt{3}$. Отсюда, $k_2 - k_1 = \sqrt{3}(1 + 2y_0)$ (3).

Из (1) и (3) следует $k_1 = -\sqrt{3}y_0$, $k_2 = \sqrt{3} + \sqrt{3}y_0$. Из (2) следует $k_1 k_2 = -3y_0 - 3y_0^2 = 2y_0$,

$3y_0^2 + 5y_0 = 0$. Отсюда $(y_0)_1 = 0$, $(y_0)_2 = -5/3$.

Ответ: $M_1\left(\sqrt{3}/2; 0\right)$, $M_2\left(\sqrt{3}/2; -5/3\right)$.

9. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$y-2=a(x-4),\qquad \frac{2x}{|y|+y}=\sqrt{x}$$

имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

ОДЗ: $y>0,\ x\ge 0$.

В ОДЗ второе уравнение системы принимает вид: $x=y\sqrt{x}$.

I. $x=0,\ y=2-4a>0$, отсюда $a<\dfrac{1}{2}$.

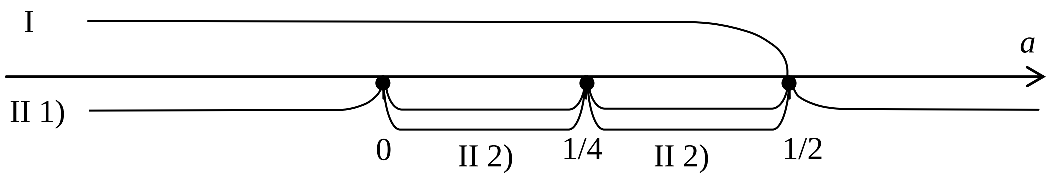
II. $x>0,\ y=\sqrt{x}$; $\sqrt{x}-2=a\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)$.

1) $\sqrt{x}=2,\ x=4,\ y=2,\ a\in R$.

2) $1=a\left(\sqrt{x}+2\right),\ \sqrt{x}=\dfrac{1}{a}-2=\dfrac{1-2a}{a}>0,\ 0<a<\dfrac{1}{2}$.

Найденное решение $x=\left(\dfrac{1-2a}{a}\right)^2,\ y=\dfrac{1-2a}{a}$ совпадает с предыдущим, если $2=\dfrac{1}{a}-2,\ a=\dfrac{1}{4}$.

Итак, при $a\in\left(0;\dfrac{1}{4}\right)\cup\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)$ $x=\left(\dfrac{1-2a}{a}\right)^2,\ y=\dfrac{1-2a}{a}$.



Ответ:

$a\in(-\infty;0]\cup\left\{\dfrac{1}{4}\right\},\ x_1=0,\ y_1=2-4a;\ x_2=4,\ y_2=2$;

$a\in\left(0;\dfrac{1}{4}\right)\cup\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right),\ x_1=0,\ y_1=2-4a;\ x_2=4,\ y_2=2;\ x_3=\left(\dfrac{1-2a}{a}\right)^2,\ y_3=\dfrac{1-2a}{a}$;

$a\in\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right),\ x=4,\ y=2$.

10. Если секущая плоскость пересекает боковое ребро TB, то площадь сечения будет наименьшей, если KN – общий перпендикуляр к прямым TB и CS.

Если секущая плоскость пересекает боковое ребро TA, то площадь сечения будет наименьшей, если ME – общий перпендикуляр к прямым TA и CS.

По построению общих перпендикуляров $KN=HT$, где $HT\perp CG$, и $ME=TD$, где $TD\perp CF$. В условиях всех вариантов $TA<TB$, т.е. нужно определить длину TH и положение точки N на ребре TB.

Если обозначить $TA=a,\ TB=b,\ TC=c$,

то $CF=\sqrt{(b/2)^2+c^2}$;

$CS=\sqrt{TF^2+FS^2}=\sqrt{(a/2)^2+c^2+(b/2)^2}$,

$h=HT=\dfrac{TC\cdot TG}{TG}=\dfrac{ac}{2\sqrt{(a/2)^2+c^2}}$.

$$S_{\Delta CSN}=\frac{1}{2}KN\cdot CS=\frac{ac\sqrt{(a/2)^2+(b/2)^2+c^2}}{2\cdot 2\sqrt{(a/2)^2+c^2}}.$$

Точка N делит отрезок TB в отношении $\frac{BN}{TN}=1+\frac{1}{2}\frac{a^2}{c^2}$. (*)

TA	*TB*	*TC*	*CS*	$S_{\Delta NCS}$	*BN:TN*	*BN*	*TN*
4	12	3	7	$21/\sqrt{13}$	17:9	108/13	54/13

(*) $\frac{HK}{GS}=\frac{CH}{CG}$; $\frac{HK}{GS}=\frac{\sqrt{TC^2-HT^2}}{CG}$; $\frac{HK}{b/2}=\frac{\sqrt{c^2-h^2}}{\sqrt{c^2+(a/2)^2}}=\frac{\sqrt{c^2-a^2c^2/(a^2+4c^2)}}{\sqrt{c^2+(a/2)^2}}=\frac{4c^2}{a^2+4c^2}$.

$TN=HK=\frac{b}{2}\cdot\frac{4c^2}{a^2+4c^2}=\frac{2bc^2}{a^2+4c^2}$. $BN=b-\frac{2bc^2}{a^2+4c^2}=b\frac{a^2+2c^2}{a^2+4c^2}$.

$$\frac{BN}{TN}=\frac{b\left(a^2+2c^2\right)\left(a^2+4c^2\right)}{\left(a^2+4c^2\right)\cdot 2bc^2}=\frac{a^2+2c^2}{2c^2}=1+\frac{1}{2}\frac{a^2}{c^2}.$$