Второй (заключительный) этап академического соревнования Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика», весна 2017 г.

Вариант № 28

1. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 24 км, одновременно вышел пешеход и выехал велосипедист. Затратив на путь от A до B не менее двух часов, велосипедист, не останавливаясь, повернул обратно и стал двигаться по направлению к пункту A со скоростью в два раза большей первоначальной. Через 24 мин после своего отправления из пункта B велосипедист встретился с пешеходом. Определите наибольшее возможное целое значение скорости (в км/ч) пешехода, и для этого значения скорости пешехода найдите первоначальную скорость велосипедиста. (8 баллов)

2. Решите неравенство $\log_x(36-60x+25x^2)<0$. (8 баллов)

3. Два числа x и y удовлетворяют уравнению $26x^2+23xy-3y^2-19=0$ и являются соответственно шестым и одиннадцатым членами убывающей арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел. Найдите разность этой прогрессии

(8 баллов)

4. Решите уравнение $\dfrac{2\operatorname{tg}^4 6x+4\sin 4x\sin 8x-\cos 8x-\cos 16x+2}{\sqrt{\cos x-\sqrt{3}\sin x}}=0$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{(5\cdot 2^{-\log_x 3}-2{,}5)\sqrt{2-\sqrt{\log_x 3+1}}}{1+\sqrt{\log_x 3+8}}>\dfrac{(2^{-\log_x 3}-0{,}5)\sqrt{2-\sqrt{\log_x 3+1}}}{\sqrt{\log_x 3+8}-3}$.

(10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x)=1/g(64g(16g(\log_2 x))/5)$, где $g(x)=\sqrt[5]{x}+1/\sqrt[5]{x}$ (10 баллов)

7. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K так, что $AK=8$, $BK=24$, $KC=3$. Около треугольника ABK описана окружность. Через точку C и середину D стороны AB проведена прямая, которая пересекает окружность в точке P, причем $CP>CD$. Найдите DP, если $\angle APB=\angle BAC$. (12 баллов)

8. На прямой $x=1$ найдите точку M, через которую проходят две касательные к графику функции $y=x^2/4$, угол между которыми равен $45°$. (12 баллов)

9. Найдите все значения a, при которых система уравнений $2y-2=a(x-1), 2x/(|y|+y)=\sqrt{x}$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

(12 баллов)

10. Боковые ребра треугольной пирамиды $TABC$ образуют между собой прямые углы. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину C и середину стороны AB основания, если боковые ребра $TA=6, TB=12, TC=2$? Какое из боковых ребер пересекает в этом случае плоскость и на какие части его делит? (12 баллов)

Решение варианта №28

1. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 24 км, одновременно вышел пешеход и выехал велосипедист. Затратив на путь от A до B не менее двух часов, велосипедист, не останавливаясь, повернул обратно и стал двигаться по направлению к пункту A со скоростью в два раза большей первоначальной. Через 24 мин после своего отправления из пункта B велосипедист встретился с пешеходом. Определите наибольшее возможное целое значение скорости (в км/ч) пешехода, и для этого значения скорости пешехода найдите первоначальную скорость велосипедиста

Решение: Пусть x (км/ч) - скорость велосипедиста, y (км/ч) – первоначальная скорость грузовика, t (ч) – время, затраченное грузовиком на путь от A до B. Тогда

$$\begin{cases} x(t+0{,}4)+0{,}8y=24, \\ yt=24, \\ t\ge 2, \end{cases} \Rightarrow\ x(24/y+0{,}4)+0{,}8y=24,\ \Rightarrow 2y^2+(x-60)y+60x=0.$$

Для того чтобы квадратное уравнение имело решение необходимо, чтобы $D=(x-60)^2-480x\ge 0$. Следовательно, $x^2-600x+3600\ge 0$, $D/4=\left(120\sqrt{6}\right)^2$, и

$x\in(-\infty;300-120\sqrt{6}]\cup[300+120\sqrt{6};+\infty)$. Поскольку по условию $x\in N$, и $0{,}2x<12$, т.е. $x<60$, то $x\in[1;300-120\sqrt{6}]\cap N$. Используя оценку $2{,}44<\sqrt{6}<2{,}45$, получаем оценку $293<120\sqrt{6}<294$, и $6<300-120\sqrt{6}<7$. Наибольшее возможное целое значение скорости $x=6$. Найдем первоначальную скорость велосипедиста при $x=6$ из уравнения $2y^2-54y+360=0,$ или $y^2-27y+180=0,$ $y_1=12,$ $y_2=15.$ Поскольку $t\ge 2,$ $t=\dfrac{24}{y}\ge 2,$ и $y\le 12,$ то $y=12.$

Ответ: 6 км/ч, 12 км/ч.

2. Решите неравенство $\log_x(36-60x+25x^2)<0$.

Решение: $\log_x(36-60x+25x^2)<0$. ОДЗ: $x>0,\quad x\ne 1,\quad x\ne 6/5$.

1) $0<x<1;\quad 36-60x+25x^2>1 \Leftrightarrow 5x^2-12x+7>0$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<1, \\ x>7/5 \end{array}\right. \\ 0<x<1 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<1;$

2) $x>1,\quad x\ne 6/5;\ 36-60x+25x^2<1 \Leftrightarrow 5x^2-12x+7<0 \Leftrightarrow 1<x<7/5,\ x\ne 6/5$.

Ответ: $x\in(0;1)\cup(1;6/5)\cup(6/5;7/5)$.

3. Два числа x и y удовлетворяют уравнению $26x^2+23xy-3y^2-19=0$ и являются соответственно шестым и одиннадцатым членами убывающей арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел. Найдите разность этой прогрессии.

Решение: Разложим на множители выражение $26x^2+23xy-3y^2$. При $y\neq 0$ имеем $y^2\left(26\left(\frac{x}{y}\right)^2+23\left(\frac{x}{y}\right)-3\right)=26y^2\left(\frac{x}{y}+1\right)\left(\frac{x}{y}-\frac{3}{26}\right)=(x+y)(26x-3y)$. Эта формула верна и для всех действительных чисел y. По условию задачи целые числа x и y удовлетворяют уравнению $(x+y)(26x-3y)=19$. Целые числа $x+y$ и $26x-3y$ являются делителями числа 19, причем возможны следующие случаи:

1) $\begin{cases} x+y=19, \\ 26x-3y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=-19, \\ 26x-3y=-1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=-1, \\ 26x-3y=-19; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y=1, \\ 26x-3y=19. \end{cases}$

Каждую систему решаем методом сложения. Умножаем обе части первого уравнения системы на 3 и складываем со вторым:

1) $\begin{cases} 29x=58, \\ x+y=19; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 29x=-58, \\ x+y=-19; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 29x=-22, \\ x+y=-1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 29x=22, \\ x+y=1. \end{cases}$

Системы 3) и 4) не имеют целых решений. Поскольку по условию прогрессия является убывающей, следовательно, $x<y$, этому условию удовлетворяют решения системы 2): $x=-2,\quad y=-17.$ Таким образом, $a_6=-2,\ a_{11}=-17,$ или $a_1+5d=-2,\quad a_1+10d=-17.$ Отсюда получаем $d=-3.$

Ответ: $d=-3.$

4. Решите уравнение $\dfrac{2\operatorname{tg}^4 6x+4\sin 4x\sin 8x-\cos 8x-\cos 16x+2}{\sqrt{\cos x-\sqrt{3}\sin x}}=0$.

Решение:

$$\frac{2\operatorname{tg}^4 6x+4\sin 4x\sin 8x-\cos 8x-\cos 16x+2}{\sqrt{\cos x-\sqrt{3}\sin x}}=0.$$

При условии $\cos x-\sqrt{3}\sin x>0$ находим корни уравнения

$$2\operatorname{tg}^4 6x+4\sin 4x\sin 8x-\cos 8x-\cos 16x+2=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$2\operatorname{tg}^4 6x+4\sin 4x\sin 8x-1+2\sin^2 4x-1+2\sin^2 8x+2=0 \Leftrightarrow 2\operatorname{tg}^4 6x+2(\sin 4x+\sin 8x)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} 6x=0, \\ \sin 4x+\sin 8x=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi n}{6}, \\ \left[\begin{array}{l} \cos 2x=0, \\ \sin 6x=0, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi n}{6},\ n\in Z, \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z, \\ x=\dfrac{\pi l}{6},\ l\in Z, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\pi l}{6},\ l\in Z.$$

С учетом условия $\cos x - \sqrt{3}\sin x > 0$ окончательно имеем $x = 2\pi n$, $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $x = 2\pi n$, $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

5. Решите неравенство $\dfrac{(5\cdot 2^{-\log_x 3} - 2{,}5)\sqrt{2-\sqrt{\log_x 3+1}}}{1+\sqrt{\log_x 3+8}} > \dfrac{(2^{-\log_x 3} - 0{,}5)\sqrt{2-\sqrt{\log_x 3+1}}}{\sqrt{\log_x 3+8}-3}$

Решение: Сделаем замену переменного $y = \log_x 3$.

$$\frac{(5\cdot 2^{-y} - 2{,}5)\sqrt{2-\sqrt{y+1}}}{1+\sqrt{y+8}} > \frac{(2^{-y} - 0{,}5)\sqrt{2-\sqrt{y+1}}}{\sqrt{y+8}-3}$$

$(2^{-y} - 0{,}5)\left(\dfrac{5}{1+\sqrt{y+8}} - \dfrac{1}{\sqrt{y+8}-3}\right)\sqrt{2-\sqrt{y+1}} > 0$ Найдем ОДЗ: $y \ge -8$, $y \ne 1$, $2-\sqrt{y+1} \ge 0$

$\Rightarrow -1 \le y \le 3$. Поскольку неравенство строгое, то при $-1 \le y < 3,\ y \ne 1,$

неравенство равносильно следующему $(-y+1)\left(\dfrac{5}{1+\sqrt{y+8}} - \dfrac{1}{\sqrt{y+8}-3}\right) > 0$, или

$(y-1)\left(\dfrac{4\sqrt{y+8}-16}{(1+\sqrt{y+8})(\sqrt{y+8}-3)}\right) < 0$, или $\dfrac{(y-1)(y-8)}{(y-1)} < 0$, или $y < 8$. Таким образом,

$-1 \le y < 1$ или $1 < y < 3$. Производя обратную замену, получаем

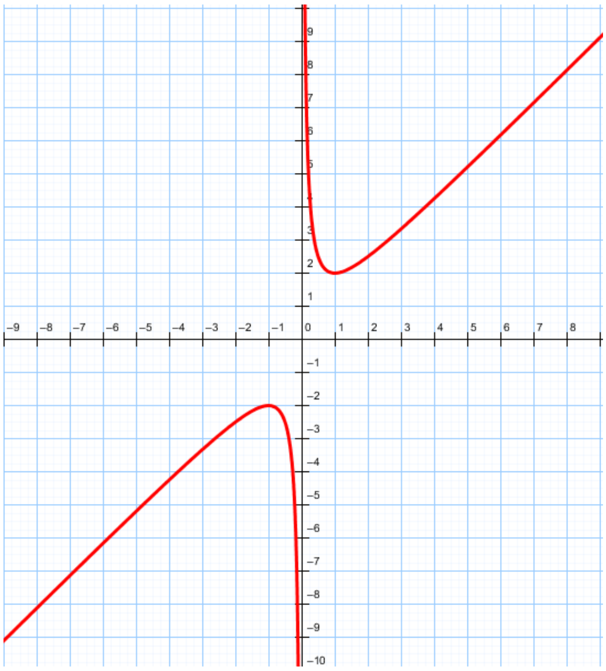
$$\begin{cases} \log_x 3 \ge -1, \\ \log_x 3 < 3, \\ \log_x 3 \ne 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1+\log_3 x}{\log_3 x} \ge 0, \\ \dfrac{1-3\log_3 x}{\log_3 x} < 0, \\ x \ne 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_3 x > 0, \\ \log_3 x \le -1, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \log_3 x < 0, \\ \log_3 x > 1/3, \end{array}\right. \\ x \ne 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; 1/3] \cup (1; +\infty), \\ x \in (0; 1) \cup (\sqrt[3]{3}; +\infty), \\ x \ne 3, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$x \in (0; 1/3] \cup (\sqrt[3]{3}; 3) \cup (3; +\infty)$.

Ответ: $x \in (0; 1/3] \cup (\sqrt[3]{3}; 3) \cup (3; +\infty)$.

6. Найдите множество значений функции $f(x) = 1/g(64g(16g(\log_2 x))/5)$, где

$$g(x) = \sqrt[5]{x} + 1/\sqrt[5]{x}.$$

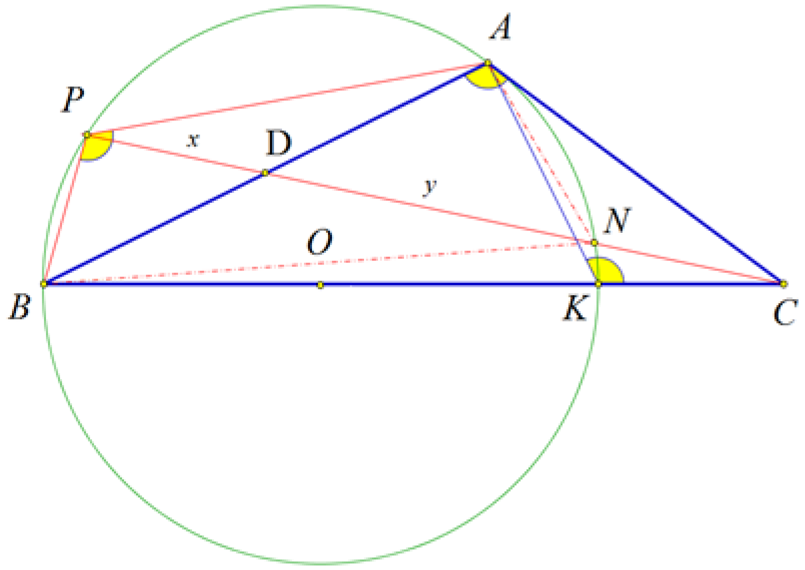


Решение: Рассмотрим сначала функцию $\varphi(t) = t + 1/t$. Функция $\varphi(t)$ определена для всех $t \neq 0$. Найдем экстремумы функции $\varphi(t)$. Для того найдем интервалы знакопостоянства производной функции $\varphi(t)$: $\varphi'(t) = 1 - 1/t^2 = (t-1)(t+1)/t^2$, $\varphi'(t) = 0$ при $t = \pm 1$. Проходя через точку $t = -1$ производная $\varphi'(t)$ меняет знак с плюса на минус, следовательно, $t = -1$ является точкой максимума, $\varphi_{\max} = \varphi(-1) = -2$. Проходя через точку $t = 1$ производная $\varphi'(t)$ меняет знак с минуса на плюс, следовательно, $t = 1$ является точкой минимума, $\varphi_{\min} = \varphi(1) = 2$. График функции $\varphi(t)$ представлен на рисунке. Множеством значений этой функции является множество $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. Функция $g(x) = \sqrt[5]{x} + 1/\sqrt[5]{x} = \varphi(\sqrt[5]{x})$. Поскольку функция $t = \sqrt[5]{x}$ возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$ и принимает все числовые значения, то множеством значений функции $\varphi(\sqrt[5]{x})$, следовательно, и $g(x)$, является множество $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$, причем $g_{\max} = g(-1) = -2$, $g_{\min} = g(1) = 2$. По той же причине множеством значений функции $g(\log_2 x)$ также является множество $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. Множеством значений функции $g(16g(\log_2 x))$ является множество $(-\infty; -5/2] \cup [5/2; +\infty)$, а функции $64g(16g(\log_2 x))/5$ — множество $(-\infty; -32] \cup [32; +\infty)$. Таким образом, $g(64g(16g(\log_2 x))/5) \in (-\infty; -5/2] \cup [5/2; +\infty)$. Отсюда находим множество E_f значений функции $f(x) = 1/g(64g(16g(\log_2 x))/5)$: $E_f = [-2/5; 0) \cup (0; 2/5]$.

Ответ: $E_f = [-2/5; 0) \cup (0; 2/5]$.

7. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K так, что $AK = 8$, $BK = 24$, $KC = 3$. Около треугольника ABK описана окружность. Через точку C и середину D стороны AB проведена прямая, которая пересекает окружность в точке P, причем $CP > CD$. Найдите DP, если $\angle APB = \angle BAC$.

Решение:



$\angle APB = \angle BAC$, $\angle APB = \angle AKC$, $\angle AKC = \angle BAC$, $\angle KAC = \angle ABC$. Отрезок AC является отрезком касательной к окружности.

$\Delta ABC \approx \Delta AKC \Rightarrow$

$$\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{KC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{8} = \frac{AC}{3} = \frac{27}{AC} \Rightarrow AC = 9, \quad AB = 24.$$

CD - медиана $\Rightarrow$ по теореме косинусов для треугольников ADC и BDC имеем

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos \angle ADC, \quad BC^2 = BD^2 + CD^2 + 2BD \cdot CD \cos \angle ADC.$$

Так как $AD = BD$, то $AC^2 + BC^2 = 2AD^2 + 2CD^2$,

$$CD^2 = \frac{1}{2}(AC^2 + BC^2) - AD^2 = \frac{1}{2}(81 + 729) - 144 = 261, \; CD = 3\sqrt{29}.$$

Пусть $DP = x$, $DN = y$ (N - точка пересечения прямой CD с окружностью, $N \neq P$). Четырехугольник $ANBP$ вписан в окружность $\Rightarrow$ $AD \cdot DB = PD \cdot BT$, $144 = xy$.

По свойствам касательных и секущих к окружности имеем $CN \cdot CP = AC^2$, $(CD - y) \cdot (CD + x) = AC^2$, $(3\sqrt{29} - y) \cdot (3\sqrt{29} + x) = 81$.

Решаем систему уравнений $144 = xy$, $(3\sqrt{29} - y) \cdot (3\sqrt{29} + x) = 81 \Rightarrow y = \frac{12}{\sqrt{29}} + x \Rightarrow$

$$x^2 + \frac{12}{\sqrt{29}} x - 144 = 0, \; x = \frac{-6 + 18\sqrt{13}}{\sqrt{29}}, \; DP = \frac{-6 + 18\sqrt{13}}{\sqrt{29}}.$$

Ответ: $\frac{-6 + 18\sqrt{13}}{\sqrt{29}}$.

8. На прямой $x=1$ найдите точку M, через которую проходят две касательные к графику функции $y=x^2/4$, угол между которыми равен $45°$.

Решение:

$y=x^2/4, \quad M(1;y_0)$. Уравнение $\frac{1}{4}x^2=y_0+k(x-1)$, или $x^2-4kx+4k-4y_0=0$, имеет единственное решение, если $\frac{D}{4}=4k^2-4k+4y_0=0$. Найденные из этого уравнения два значения k должны удовлетворять условиям $k_1+k_2=1$ (1), $k_1\cdot k_2=y_0$ (2).

Из условия $\alpha_2-\alpha_1=45°,\ \mathrm{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=1$ следует $\frac{\mathrm{tg}\alpha_2-\mathrm{tg}\alpha_1}{1+\mathrm{tg}\alpha_2\cdot\mathrm{tg}\alpha_1}=1$, или $\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}=1$. Отсюда, $k_2-k_1=1+y_0$, (3).

Из (1) и (3) следует $k_1=-\frac{1}{2}y_0,\ k_2=1+\frac{1}{2}y_0$.

Из (2) следует $k_1k_2=-\frac{1}{2}y_0-\frac{1}{4}y_0^2=y_0,\ y_0^2+6y_0=0$. Отсюда $(y_0)_1=0,\ (y_0)_2=-6$.

Ответ: $M_1(1;0),\ M_2(1;-6)$.

9. Найдите все значения *а,* при которых система уравнений

$2y-2=a(x-1), \quad \frac{2x}{|y|+y}=\sqrt{x}$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

Решение.

ОДЗ: $y>0,\ x\ge 0$.

В ОДЗ второе уравнение системы принимает вид: $x=y\sqrt{x}$.

I. $x=0,\ y=1-\frac{a}{2}>0$, отсюда $a<2$.

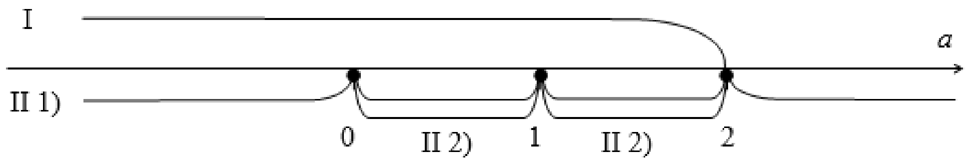
II. $x>0,\ y=\sqrt{x}$; $2\left(\sqrt{x}-1\right)=a\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)$.

1) $\sqrt{x}=1,\ x=1,\ y=1,\ a\in R$.

2) $2=a\left(\sqrt{x}+1\right),\ \sqrt{x}=\frac{2}{a}-1=\frac{2-a}{a}>0,\ 0<a<2$. Найденное решение

$x=\left(\frac{2-a}{a}\right)^2,\ y=\frac{2-a}{a}$ совпадает с предыдущим, если $1=\frac{2}{a}-1,\ a=1$. Итак, при

$a\in(0;1)\cup(1;2) \quad x=\left(\frac{2-a}{a}\right)^2,\ y=\frac{2-a}{a}$.



Ответ:

$a \in (-\infty;0] \cup \{1\}$, $x_1 = 0$, $y_1 = 1 - \dfrac{a}{2}$; $x_2 = 1$, $y_2 = 1$;

$a \in (0;1) \cup (1;2)$, $x_1 = 0$, $y_1 = 1 - \dfrac{a}{2}$; $x_2 = 1$, $y_2 = 1$; $x_3 = \left(\dfrac{2-a}{a}\right)^2$, $y_3 = \dfrac{2-a}{a}$;

$a \in [2;+\infty)$, $x = 1$, $y = 1$.

10. Боковые ребра треугольной пирамиды $TABC$ образуют между собой прямые углы. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину C и середину стороны AB основания, если сторона основания $AC = 5$ и боковые ребра $TA = 4, TB = 12$? Какое из боковых ребер пересекает в этом случае плоскость и на какие части его делит?

Решение:

Если секущая плоскость пересекает боковое ребро TB, то площадь сечения будет наименьшей, если KN – общий перпендикуляр к прямым TB и CS.

Если секущая плоскость пересекает боковое ребро TA, то площадь сечения будет наименьшей, если ME – общий перпендикуляр к прямым TA и CS.

По построению общих перпендикуляров $KN = HT$, где $HT \perp CG$, и $ME = TD$, где $TD \perp CF$. В условиях всех вариантов $TA < TB$, т.е. нужно определить длину TH и положение точки N на ребре TB.

Если обозначить $TA = a, TB = b, TC = c$, то $CF = \sqrt{(b/2)^2 + c^2}$;

$$CS = \sqrt{TF^2 + FS^2} = \sqrt{(a/2)^2 + c^2 + (b/2)^2}, \quad h = HT = \frac{TC \cdot TG}{TG} = \frac{ac}{2\sqrt{(a/2)^2 + c^2}}.$$

$$S_{\Delta CSN} = \frac{1}{2} KN \cdot CS = \frac{ac\sqrt{(a/2)^2 + (b/2)^2 + c^2}}{2 \cdot 2\sqrt{(a/2)^2 + c^2}}.$$

Точка N делит отрезок TB в отношении $\dfrac{BN}{TN} = 1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{a^2}{c^2}$. (*)

TA	TB	TC	CS	SΔNCS	BN:TN	BN	TN
6	12	2	7	$21/\sqrt{13}$	11:2	132/13	24/13

(*) $\dfrac{HK}{GS}=\dfrac{CH}{CG}$; $\dfrac{HK}{GS}=\dfrac{\sqrt{TC^2-HT^2}}{CG}$;

$$\frac{HK}{b/2}=\frac{\sqrt{c^2-h^2}}{\sqrt{c^2+\left(a/2\right)^2}}=\frac{\sqrt{c^2-a^2c^2/(a^2+4c^2)}}{\sqrt{c^2+\left(a/2\right)^2}}=\frac{4c^2}{a^2+4c^2}.$$

$$TN=HK=\frac{b}{2}\cdot\frac{4c^2}{a^2+4c^2}=\frac{2bc^2}{a^2+4c^2}.\ \ BN=b-\frac{2bc^2}{a^2+4c^2}=b\frac{a^2+2c^2}{a^2+4c^2}.$$

$$\frac{BN}{TN}=\frac{b\left(a^2+2c^2\right)\left(a^2+4c^2\right)}{\left(a^2+4c^2\right)\cdot 2bc^2}=\frac{a^2+2c^2}{2c^2}=1+\frac{1}{2}\frac{a^2}{c^2}.$$