

**Второй (заключительный) этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету
«Математика», весна 2017 г.**

Вариант № 26

1. Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми равно 8 км, одновременно вышел турист и выехал велосипедист. Затратив на путь от A до B не менее получаса, велосипедист, не останавливаясь, повернул обратно и стал двигаться по направлению к пункту A , увеличив при этом свою скорость на 25%. Через 10 мин после своего отправления из пункта B велосипедист встретился с туристом. Определите наибольшее возможное целое значение скорости (в км/ч) туриста, и для этого значения скорости туриста найдите первоначальную скорость велосипедиста. (8 баллов)

2. Решите неравенство $\log_x(25 - 40x + 16x^2) < 0$. (8 баллов)

3. Два числа x и y удовлетворяют уравнению $280x^2 - 61xy + 3y^2 - 13 = 0$ и являются соответственно четвертым и девятым членами убывающей арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел. Найдите разность этой прогрессии. (8 баллов)

4. Решите уравнение $\frac{4 \operatorname{tg}^4 8x + 4 \sin 2x \sin 6x - \cos 4x - \cos 12x + 2}{\sqrt{\cos x - \sin x}} = 0$ (8 баллов)

5. Решите неравенство $\frac{(2 \cdot 3^{-\log_x 2} - 6) \sqrt{2 - \sqrt{2 \log_x 2 + 3}}}{2 + \sqrt{\log_x 2 + 2}} > \frac{(3^{-\log_x 2} - 3) \sqrt{2 - \sqrt{2 \log_x 2 + 3}}}{\sqrt{\log_x 2 + 2} - 1}$ (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x) = 1/g(64g(g(\ln x))/1025)$, где $g(x) = x^5 + 1/x^5$ (10 баллов)

7. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K так, что $AK = 5$, $BK = 16$, $KC = 2$. Около треугольника ABK описана окружность. Через точку C и середину D стороны AB проведена прямая, которая пересекает окружность в точке P , причем $CP > CD$. Найдите DP , если $\angle APB = \angle BAC$. (12 баллов)

8. На прямой $x = \sqrt{3}$ найдите точку M , через которую проходят две касательные к графику функции $y = x^2/4$, угол между которыми равен 60° . (12 баллов)

9. Найдите все значения a , при которых система уравнений $y - 1 = a(x - 1)$, $2x/(|y| + y) = \sqrt{x}$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a . (12 баллов)

10. Боковые ребра треугольной пирамиды $TABC$ образуют между собой прямые углы. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей

через вершину C и середину стороны AB основания, если сторона основания $AC = 5$ и боковые ребра $TA = 4, TB = 12$? Какое из боковых ребер пересекает в этом случае плоскость и на какие части его делит? (12 баллов)

Решение варианта №26

1. Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми равно 8 км, одновременно вышел турист и выехал велосипедист. Затратив на путь от A до B не менее получаса, велосипедист, не останавливаясь, повернул обратно и стал двигаться по направлению к пункту A , увеличив при этом свою скорость на 25%. Через 10 мин после своего отправления из пункта B велосипедист встретился с туристом. Определите наибольшее возможное целое значение скорости (в км/ч) туриста, и для этого значения скорости туриста найдите первоначальную скорость велосипедиста.

Решение: Пусть x (км/ч) - скорость туриста, y (км/ч) – первоначальная скорость велосипедиста, t (ч) – время, затраченное велосипедистом на путь от A до B . Тогда

$$\begin{cases} x(t+1/6)+5y/24=8, \\ yt=8, \\ t \geq 0,5, \end{cases} \Rightarrow x(8/y+1/6)+5y/24=8, \Rightarrow 5y^2+(4x-192)y+192x=0.$$

Для того чтобы квадратное уравнение имело решение необходимо, чтобы $D/4=(2x-96)^2-960x \geq 0$. Следовательно, $x^2-336x+2304 \geq 0$, $D/4=(72\sqrt{5})^2$, $x \in (-\infty; 168-72\sqrt{5}] \cup [168+72\sqrt{5}; +\infty)$. Поскольку по условию $x \in N$, и $x/6 < 8$, т.е. $x < 48$, то $x \in [1; 168-72\sqrt{5}] \cap N$. Используя оценку $2,23 < \sqrt{5} < 2,24$, получаем оценку $160 < 72\sqrt{5} < 161$, и $7 < 168-72\sqrt{5} < 8$. Наибольшее возможное целое значение скорости $x=7$. Найдем первоначальную скорость велосипедиста при $x=7$ из уравнения $5y^2-164y+192 \cdot 7=0$, $y_1=84/5$, $y_2=16$. Поскольку $t \geq 0,5$, $t=\frac{8}{y} \geq \frac{1}{2}$, и $y \leq 16$, то $y=16$.

Ответ: 7 км/ч, 16 км/ч.

2. Решите неравенство $\log_x(25-40x+16x^2) < 0$.

Решение: $\log_x(25-40x+16x^2) < 0$. ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq 5/4$.

$$1) 0 < x < 1; \quad 25-40x+16x^2 > 1 \Leftrightarrow 2x^2-5x+3 > 0; \quad \begin{cases} x < 1, \\ x > 3/2 \Leftrightarrow 0 < x < 1; \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$2) x > 1, \quad x \neq 5/4; \quad 25-40x+16x^2 < 1 \Leftrightarrow 2x^2-5x+3 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3/2, \quad x \neq 5/4.$$

Ответ: $x \in (0;1) \cup (1;5/4) \cup (5/4;3/2)$.

3. Два числа x и y удовлетворяют уравнению $280x^2 - 61xy + 3y^2 - 13 = 0$ и являются соответственно четвертым и девятым членами убывающей арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел. Найдите разность этой прогрессии.

Решение: Разложим на множители выражение $280x^2 - 61xy + 3y^2$. При $y \neq 0$ имеем $y^2 \left(280 \left(\frac{x}{y} \right)^2 - 61 \left(\frac{x}{y} \right) + 3 \right) = 280y^2 \left(\frac{x}{y} - \frac{3}{40} \right) \left(\frac{x}{y} - \frac{1}{7} \right) = (40x - 3y)(7x - y)$. Эта формула верна и для всех действительных чисел y . По условию задачи целые числа x и y удовлетворяют уравнению $(40x - 3y)(7x - y) = 13$. Целые числа $40x - 3y$ и $7x - y$ являются делителями числа 13, причем возможны следующие случаи:

$$\begin{cases} 40x - 3y = 13, \\ 7x - y = 1; \end{cases} \quad 2) \quad \begin{cases} 40x - 3y = -13, \\ 7x - y = -1; \end{cases} \quad 3) \quad \begin{cases} 40x - 3y = -1, \\ 7x - y = -13; \end{cases} \quad 4) \quad \begin{cases} 40x - 3y = 1, \\ 7x - y = 13. \end{cases}$$

Каждую систему решаем методом сложения. Умножаем обе части второго уравнения системы на -3 и складываем с первым:

$$\begin{cases} 19x = 10, \\ 7x - y = 1; \end{cases} \quad 2) \quad \begin{cases} 19x = -10, \\ 7x - y = -1; \end{cases} \quad 3) \quad \begin{cases} 19x = 38, \\ 7x - y = -13; \end{cases} \quad 4) \quad \begin{cases} 19x = -38, \\ 7x - y = 13. \end{cases}$$

Системы 1) и 2) не имеют целых решений. Поскольку по условию прогрессия является убывающей, следовательно, $x < y$, этому условию удовлетворяют решения системы 4): $x = -2$, $y = -27$. Таким образом, $a_4 = -2$, $a_9 = -27$, или $a_1 + 3d = -2$, $a_1 + 8d = -27$. Отсюда получаем $d = -5$.

Ответ: $d = -5$.

4. Решите уравнение $\frac{4 \operatorname{tg}^4 8x + 4 \sin 2x \sin 6x - \cos 4x - \cos 12x + 2}{\sqrt{\cos x - \sin x}} = 0$.

Решение:

$$\frac{4 \operatorname{tg}^4 8x + 4 \sin 2x \sin 6x - \cos 4x - \cos 12x + 2}{\sqrt{\cos x - \sin x}} = 0.$$

При условии $\cos x - \sin x > 0$ находим корни уравнения

$$4 \operatorname{tg}^4 8x + 4 \sin 2x \sin 6x - \cos 4x - \cos 12x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4 \operatorname{tg}^4 8x + 4 \sin 2x \sin 6x - 1 + 2 \sin^2 2x - 1 + 2 \sin^2 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow 4 \operatorname{tg}^4 8x + 2(\sin 2x + \sin 6x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} 8x = 0, \\ \sin 2x + \sin 6x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi n}{8}, \\ \cos 2x = 0, \\ \sin 4x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi n}{8}, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}, \Leftrightarrow x = \frac{\pi l}{4}, l \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi l}{4}, l \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

С учетом условия $\cos x - \sin x > 0$ окончательно имеем $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$,
 $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

5. Решите неравенство
$$\frac{(2 \cdot 3^{-\log_x 2} - 6)\sqrt{2 - \sqrt{2 \log_x 2 + 3}}}{2 + \sqrt{\log_x 2 + 2}} > \frac{(3^{-\log_x 2} - 3)\sqrt{2 - \sqrt{2 \log_x 2 + 3}}}{\sqrt{\log_x 2 + 2} - 1}$$

Решение: Сделаем замену переменного $y = \log_x 2$.

$$\frac{(2 \cdot 3^{-y} - 6)\sqrt{2 - \sqrt{2y + 3}}}{2 + \sqrt{y + 2}} > \frac{(3^{-y} - 3)\sqrt{2 - \sqrt{2y + 3}}}{\sqrt{y + 2} - 1} \Leftrightarrow$$

$$(3^{-y} - 3) \left(\frac{2}{2 + \sqrt{y + 2}} - \frac{1}{\sqrt{y + 2} - 1} \right) \sqrt{2 - \sqrt{2y + 3}} > 0.$$

Найдем ОДЗ: $y \geq -2$, $y \neq -1$, $2 - \sqrt{2y + 3} \geq 0 \Rightarrow -1,5 \leq y \leq 0,5$. Поскольку неравенство строгое, то при $-1,5 \leq y < 0,5$, $y \neq -1$, неравенство равносильно следующему

$$(-y - 1) \left(\frac{2}{2 + \sqrt{y + 2}} - \frac{1}{\sqrt{y + 2} - 1} \right) > 0, \text{ или } (y + 1) \left(\frac{\sqrt{y + 2} - 4}{(2 + \sqrt{y + 2})(\sqrt{y + 2} - 1)} \right) < 0, \text{ или}$$

$$\frac{(y + 1)(y - 14)}{(y + 1)} < 0, \text{ или } y < 14. \text{ Таким образом, } -1,5 \leq y < -1 \text{ или } -1 < y < 0,5. \text{ Производя}$$

обратную замену, получаем:
$$\begin{cases} \log_x 2 \geq -1,5, \\ \log_x 2 < 0,5, \\ \log_x 2 \neq -1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 + 3 \log_2 x \geq 0, \\ \frac{2 \log_2 x}{2 - \log_2 x} < 0, \\ x \neq 1/2, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log_2 x > 0, \\ \log_2 x \leq -2/3, \\ \log_2 x < 0, \\ \log_2 x > 2, \\ x \neq 1/2, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in (0; 1/\sqrt[3]{4}] \cup (1; +\infty), \\ x \in (0; 1) \cup (4; +\infty), \\ x \neq 1/2, \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$x \in (0; 1/2) \cup (1/2; 1/\sqrt[3]{4}] \cup (4; +\infty).$$

Ответ: $x \in (0; 1/2) \cup (1/2; 1/\sqrt[3]{4}] \cup (4; +\infty)$.

6. Найдите множество значений функции $f(x) = 1/g(64g(g(\ln x))/1025)$, где

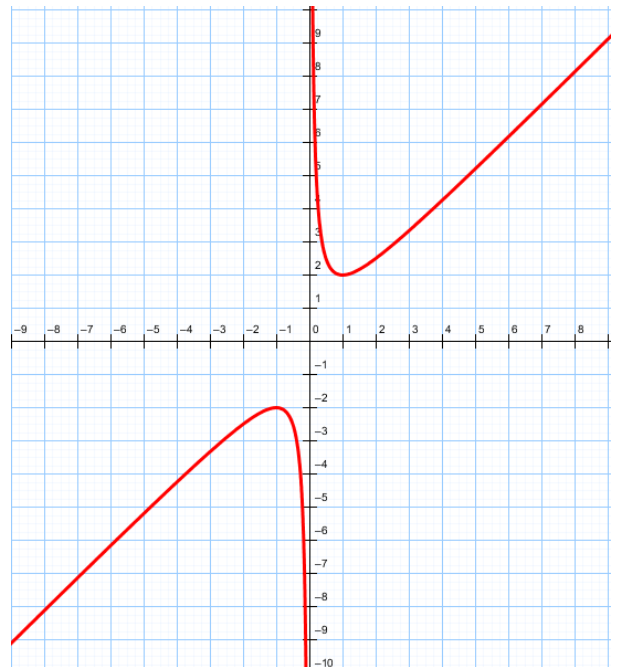
$$g(x) = x^5 + 1/x^5. \quad (10 \text{ баллов})$$

Решение: Рассмотрим сначала функцию $\varphi(t) = t + 1/t$. Функция $\varphi(t)$ определена для всех $t \neq 0$. Найдем экстремумы функции $\varphi(t)$. Для того найдем интервалы знакопостоянства производной функции

$$\varphi(t): \quad \varphi'(t) = 1 - 1/t^2 = (t-1)(t+1)/t^2,$$

$\varphi'(t) = 0$ при $t = \pm 1$. Проходя через точку $t = -1$ производная $\varphi'(t)$ меняет знак с плюса на минус, следовательно, $t = -1$ является точкой максимума, $\varphi_{\max} = \varphi(-1) = -2$.

Проходя через точку $t = 1$ производная $\varphi'(t)$ меняет знак с минуса на плюс, следовательно, $t = 1$ является точкой минимума, $\varphi_{\min} = \varphi(1) = 2$. График функции $\varphi(t)$



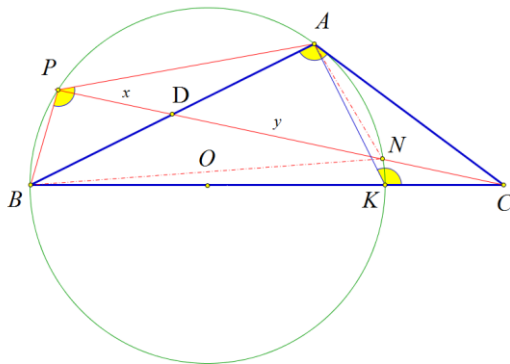
представлен на рисунке. Множеством значений этой функции является множество $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. Функция $g(x) = x^5 + 1/x^5 = \varphi(x^5)$. Поскольку функция $t = x^5$ возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$ и принимает все числовые значения, то множеством значений функции $\varphi(x^5)$, следовательно, и $g(x)$, является множество $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$, причем $g_{\max} = g(-1) = -2$, $g_{\min} = g(1) = 2$. По той же причине множеством значений функции $g(\ln x)$ также является множество $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. Множеством значений функции $g(g(\ln x))$ является множество $(-\infty; -1025/32] \cup [1025/32; +\infty)$, а функции $64g(g(\ln x))/1025$ — множество $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Таким образом, $g(64g(g(\ln x))/1025) \in (-\infty; -1025/32] \cup [1025/32; +\infty)$. Отсюда находим множество E_f значений функции $f(x) = 1/g(64g(g(\ln x))/1025)$: $E_f = [-32/1025; 0) \cup (0; 32/1025]$.

Ответ: $E_f = [-32/1025; 0) \cup (0; 32/1025]$.

7. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K так, что $AK = 5$, $BK = 16$, $KC = 2$. Около треугольника ABK описана окружность. Через точку C и середину D стороны AB проведена прямая, которая пересекает окружность в точке P , причем $CP > CD$. Найдите DP , если $\angle APB = \angle BAC$.

Решение:



1) $\angle APB = \angle BAC$, $\angle APB = \angle AKC$, $\angle AKC = \angle BAC$, $\angle KAC = \angle ABC$.

Отрезок AC является отрезком касательной к окружности.

$\triangle ABC \approx \triangle AKC \Rightarrow$

$$\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{KC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{5} = \frac{AC}{2} = \frac{18}{AC} \Rightarrow AC = 6, AB = 15.$$

2) CD - медиана \Rightarrow по теореме косинусов для треугольников ADC и BDC имеем

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos \angle ADC, \quad BC^2 = BD^2 + CD^2 + 2BD \cdot CD \cos \angle ADC.$$

Так как $AD = BD$, то $AC^2 + BC^2 = 2AD^2 + 2CD^2$,

$$CD^2 = \frac{1}{2}(AC^2 + BC^2) - AD^2 = \frac{1}{2}(36 + 324) - \frac{225}{4} = \frac{495}{4}, \quad CD = \frac{3}{2}\sqrt{55}.$$

3) Пусть $DP = x$, $DN = y$ (N - точка пересечения прямой CD с окружностью, $N \neq P$).

Четырехугольник $ANBP$ вписан в окружность $\Rightarrow AD \cdot DB = PD \cdot BT$, $\frac{225}{4} = xy$. По

свойствам касательных и секущих к окружности имеем

$$CN \cdot CP = AC^2, \quad (CD - y) \cdot (CD + x) = AC^2, \quad \left(\frac{3}{2}\sqrt{55} - y\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\sqrt{55} + x\right) = 36.$$

4) Решаем систему уравнений $\frac{225}{4} = xy$, $(\frac{3}{2}\sqrt{55} - y) \cdot (\frac{3}{2}\sqrt{55} + x) = 36$, $\Rightarrow y = \frac{21}{\sqrt{55}} + x$
 $\Rightarrow x^2 + \frac{21}{\sqrt{55}}x - \frac{225}{4} = 0$, $x = \frac{-21 + 12\sqrt{89}}{2\sqrt{55}}$, $DP = \frac{-21 + 12\sqrt{89}}{2\sqrt{55}}$.

Ответ: $\frac{-21 + 12\sqrt{89}}{2\sqrt{55}}$.

8. На прямой $x = \sqrt{3}$ найдите точку M , через которую проходят две касательные к графику функции $y = x^2/4$, угол между которыми равен 60° .

Решение (без применения производной).

$y = x^2/4$, $M(\sqrt{3}; y_0)$. Уравнение $\frac{1}{4}x^2 = y_0 + k(x - \sqrt{3})$, или $x^2 - 4kx + 4k\sqrt{3} - 4y_0 = 0$, имеет единственное решение, если $\frac{D}{4} = 4k^2 - 4k\sqrt{3} + 4y_0 = 0$, $k^2 - k\sqrt{3} + y_0 = 0$. Найденные из этого уравнения два значения k должны удовлетворять условиям $k_1 + k_2 = \sqrt{3}$ (1), $k_1 \cdot k_2 = y_0$ (2).

Из условия $\alpha_2 - \alpha_1 = 60^\circ$, $\text{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \sqrt{3}$ следует $\frac{\text{tg}\alpha_2 - \text{tg}\alpha_1}{1 + \text{tg}\alpha_2 \cdot \text{tg}\alpha_1} = \sqrt{3}$, или

$$\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} = \sqrt{3}. \text{ Отсюда, } k_2 - k_1 = \sqrt{3}(1 + y_0) \text{ (3).}$$

Из (1) и (3) следует $k_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}y_0$, $k_2 = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}y_0$. Из (2) следует

$$k_1 k_2 = -\frac{3}{2}y_0 - \frac{3}{4}y_0^2 = y_0, \quad 3y_0^2 + 10y_0 = 0. \text{ Отсюда } (y_0)_1 = 0, (y_0)_2 = -10/3.$$

Ответ: $M_1(\sqrt{3}; 0)$, $M_2(\sqrt{3}; -10/3)$.

9. Найдите все значения a , при которых система уравнений

$$y - 1 = a(x - 1), \quad \frac{2x}{|y| + y} = \sqrt{x} \text{ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом } a.$$

Решение:

ОДЗ: $y > 0$, $x \geq 0$.

В ОДЗ второе уравнение системы принимает вид: $x = y\sqrt{x}$.

I. $x = 0$, $y = 1 - a > 0$, отсюда $a < 1$.

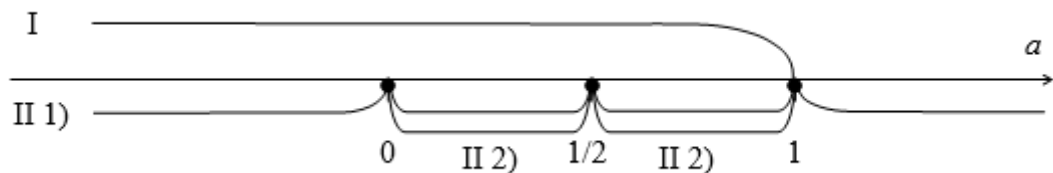
II. $x > 0$, $y = \sqrt{x}$; $\sqrt{x} - 1 = a(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$.

1) $\sqrt{x} = 1$, $x = 1$, $y = 1$, $a \in R$.

2) $1 = a(\sqrt{x} + 1)$, $\sqrt{x} = \frac{1}{a} - 1 = \frac{1-a}{a} > 0$, $0 < a < 1$. Найденное решение

$x = \left(\frac{1-a}{a}\right)^2$, $y = \frac{1-a}{a}$ совпадает с предыдущим, если $1 = \frac{1}{a} - 1$, $a = \frac{1}{2}$. Итак, при

$a \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ $x = \left(\frac{1-a}{a}\right)^2$, $y = \frac{1-a}{a}$.



Ответ:

$a \in (-\infty; 0] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $x_1 = 0$, $y_1 = 1 - a$; $x_2 = 1$, $y_2 = 1$;

$a \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right)$, $x_1 = 0$, $y_1 = 1 - a$; $x_2 = 1$, $y_2 = 1$; $x_3 = \left(\frac{1-a}{a}\right)^2$, $y_3 = \frac{1-a}{a}$;

$a \in [1; +\infty)$, $x = 1$, $y = 1$.

10. Боковые ребра треугольной пирамиды $TABC$ образуют между собой прямые углы. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину C и середину стороны AB основания, если сторона основания $AC = 5$ и боковые ребра $TA = 4$, $TB = 12$? Какое из боковых ребер пересекает в этом случае плоскость и на какие части его делит?

Решение:

Если секущая плоскость пересекает боковое ребро TB , то площадь сечения будет наименьшей, если KN – общий перпендикуляр к прямым TB и CS .

Если секущая плоскость пересекает боковое ребро TA , то площадь сечения будет наименьшей, если ME – общий перпендикуляр к прямым TA и CS .

По построению общих перпендикуляров $KN = HT$, где $HT \perp CG$, и $ME = TD$, где $TD \perp CF$. В условиях всех вариантов $TA < TB$, т.е. нужно определить длину TH и положение точки N на ребре TB .

Если обозначить $TA = a$, $TB = b$, $TC = c$, то $CF = \sqrt{(b/2)^2 + c^2}$;

$$CS = \sqrt{TF^2 + FS^2} = \sqrt{(a/2)^2 + c^2 + (b/2)^2}, \quad h = HT = \frac{TC \cdot TG}{TG} = \frac{ac}{2\sqrt{(a/2)^2 + c^2}}.$$

$$S_{\Delta CSN} = \frac{1}{2} KN \cdot CS = \frac{ac\sqrt{(a/2)^2 + (b/2)^2 + c^2}}{2 \cdot 2\sqrt{(a/2)^2 + c^2}}.$$

Точка N делит отрезок TB в отношении $\frac{BN}{TN} = 1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{c^2}$. (*)

TA	TB	TC	CS	$S_{\Delta NCS}$	$BN:TN$	BN	TN
4	12	3	7	$21/\sqrt{13}$	17:9	108/13	54/13

$$(*) \frac{HK}{GS} = \frac{CH}{CG}; \quad \frac{HK}{GS} = \frac{\sqrt{TC^2 - HT^2}}{CG};$$

$$\frac{HK}{b/2} = \frac{\sqrt{c^2 - h^2}}{\sqrt{c^2 + (a/2)^2}} = \frac{\sqrt{c^2 - a^2c^2/(a^2 + 4c^2)}}{\sqrt{c^2 + (a/2)^2}} = \frac{4c^2}{a^2 + 4c^2}.$$

$$TN = HK = \frac{b}{2} \cdot \frac{4c^2}{a^2 + 4c^2} = \frac{2bc^2}{a^2 + 4c^2}. \quad BN = b - \frac{2bc^2}{a^2 + 4c^2} = b \frac{a^2 + 2c^2}{a^2 + 4c^2}.$$

$$\frac{BN}{TN} = \frac{b(a^2 + 2c^2)(a^2 + 4c^2)}{(a^2 + 4c^2) \cdot 2bc^2} = \frac{a^2 + 2c^2}{2c^2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{c^2}.$$

