

**Второй (заключительный) этап академического соревнования  
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету  
«Информатика», весна 2017 г.**

**Вариант № 9**

**Задача 1 (8 баллов).** Десятичное число 20,45 перевели в четверичную систему счисления. Найти 1999-ю цифру после запятой.

**Задача 2 (8 баллов).** Найти трехзначное число при следующих условиях: а) его цифры составляют геометрическую прогрессию; б) если из него вычесть 297, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке; в) если к цифрам данного числа прибавить соответственно 8, 5 и 1, то полученные суммы составят арифметическую прогрессию.

**Задача 3 (8 баллов).** На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость 4 окружности?

**Задача 4 (8 баллов).** При помощи тождеств алгебры логики выяснить, являются ли формулы  $F1 = x \text{ and not } y \text{ or } y \text{ and not } z$  и  $F2 = (x \text{ or not } y) \text{ and } (y \text{ or not } z)$  эквивалентными.

**Задача 5 (8 баллов).** Сколько имеется шестизначных чисел (первая цифра числа предполагается отличной от нуля), у которых три цифры четные, а три нечетные?

**Задача 6 (8 баллов).** Замените префиксное выражение  $\sqrt{a^2+d^2} + \sqrt{c^2+b^2}$ , где  $\wedge$  - знак операции возведения в степень, инфиксным. В искомом результате допустимы лишние круглые скобки, которые не являются ошибкой.

**Задача 7 (12 баллов).** Решить рекуррентную функцию, т. е. найти формулу для n-ого члена ряда чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , если  $a_1 = -1, a_2 = 1$  и каждое  $a_n$ , начиная с  $a_3$ , есть  $a_n = -2 \cdot a_{n-1} - a_{n-2}$ .

**Задача 8 (12 баллов).** Знаменатель дроби меньше квадрата ее числителя на единицу; если к числителю и знаменателю прибавить по 2, то значение дроби будет больше  $\frac{1}{4}$ ; если от числителя и знаменателя отнять по 3, то значение дроби будет меньше  $\frac{1}{10}$ . Найти эту дробь (или все такие дроби).

**Задача 9 (12 баллов).** Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

| Pascal                                                                                                                                                       | C                                                                                                                                                                                                                                  |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <pre>var a: byte=54; b: byte=108; begin writeln( byte(not(byte(b shl 1) and byte(b shr 1))) and (byte((a or b) shr 1) or byte((a and b) shl 1))); end.</pre> | <pre>typedef unsigned char byte; int main() { byte a=54, b=108; printf( "%d\n", (byte)(~((byte)(b &lt;&lt; 1) &amp; (byte)(b &gt;&gt; 1))) &amp; ((byte)((a   b) &gt;&gt; 1)   (byte)((a &amp; b) &lt;&lt; 1))); return 0; }</pre> |

**Задача 10 (16 баллов).** Постройте матрицу D после выполнения следующей программы и вычислите сумму элементов строго ниже побочной диагонали:

| Pascal                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | C                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <pre>const n=5; var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer; var i, j, k, l: integer; begin k:=0; l:=0; for i:=0 to n-1 do for j:=0 to n-1 do if ((i+j) mod 2 = 0) then begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end; for k:=0 to 1 do for i:=0 to n-1 do for j:=0 to n-1 do D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]); end.</pre> | <pre>#define MIN(X,Y) ((X) &lt; (Y) ? (X) : (Y)) const int n=5; int D[n][n]; int main() { int i, j, k=0, l=0; for (i=0; i&lt;n; i++) for (j=0; j&lt;n; j++) if ((i+j) % 2 == 0) D[i][j]=--k; else D[i][j]=++l; for (k=0; k&lt;2; k++) for (i=0; i&lt;n; i++) for (j=0; j&lt;n; j++) D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]); return 0; }</pre> |

## Ответы варианта 9

**Задача 1 (8 баллов).** Десятичное число 20,45 перевели в четверичную систему счисления. Найти 1999-ю цифру после запятой.

### Решение задачи 1.

Поскольку надо найти 1999-ю цифру после запятой, достаточно перевести в четверичную систему счисления дробную часть, то есть число 0,45. Имеем:

$$0,45 \times 4 = 1,8$$

$$0,8 \times 4 = 3,2$$

$$0,2 \times 4 = 0,8$$

$$0,8 \times 4 = 3,2 \text{ (дробная часть совпала с уже встречавшейся ранее).}$$

Получили бесконечную дробь с периодом (30) и непериодической частью, равной 1.

Таким образом,  $0,45_{10} = 0,1(30)_4$ .

Найдем теперь 1999-ю цифру этого числа. Первая цифра после запятой - единица; остаются еще 1998 цифр, находящихся в периодической части. Число 1998 четное, т.е. последовательность из двух цифр (30) повторится целое число раз. Поэтому 1999-ой цифрой будет 0.

**Ответ: 0.**

**Задача 2 (8 баллов).** Найти трехзначное число при следующих условиях: а) его цифры составляют геометрическую прогрессию; б) если из него вычесть 297, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке; в) если к цифрам данного числа прибавить соответственно 8, 5 и 1, то полученные суммы составят арифметическую прогрессию.

**Ответ: 421.**

**Задача 3 (8 баллов).** На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость 4 окружности?

**Ответ: 14**

**Задача 4 (8 баллов).** При помощи тождеств алгебры логики выяснить, являются ли формулы

$F1 = x \text{ and not } y \text{ or } y \text{ and not } z$  и  $F2 = (x \text{ or not } y) \text{ and } (y \text{ or not } z)$  эквивалентными.

**Ответ: НЕТ.**

**Задача 5 (8 баллов).** Сколько имеется шестизначных чисел (первая цифра числа предполагается отличной от нуля), у которых три цифры четные, а три нечетные?

**Ответ: 64800.**

**Задача 6 (8 баллов).** Замените префиксное выражение  $/+^{\wedge}a2^{\wedge}d2+^{\wedge}c2^{\wedge}b2$ , где  $\wedge$  - знак операции возведения в степень, инфиксным. В искомом результате допустимы лишние круглые скобки, которые не являются ошибкой.

**Ответ:**  $(a^2+d^2)/(c^2+b^2)$ .

**Задача 7 (12 баллов).** Решить рекуррентную функцию, т. е. найти формулу для  $n$ -ого члена ряда чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , если  $a_1 = -1, a_2 = 1$  и каждое  $a_n$ , начиная с  $a_3$ , есть  $a_n = -2 \cdot a_{n-1} - a_{n-2}$ .

**Ответ:**  $a_n = (-1)^n$ .

**Задача 8 (12 баллов).** Знаменатель дроби меньше квадрата ее числителя на единицу; если к числителю и знаменателю прибавить по 2, то значение дроби будет больше  $\frac{1}{4}$ ; если от числителя и знаменателя отнять по 3, то значение дроби будет меньше  $\frac{1}{10}$ . Найти эту дробь (или все такие дроби).

**Ответ:**  $\frac{3}{8}$ , или  $\frac{4}{15}$ , или  $\frac{5}{24}$ .

**Задача 9 (12 баллов).** Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

| Pascal                                                                                                                                                       | C                                                                                                                                                                                                                                   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <pre>var a: byte=54; b: byte=108; begin writeln( byte(not(byte(b shl 1) and byte(b shr 1))) and (byte((a or b) shr 1) or byte((a and b) shl 1))); end.</pre> | <pre>typedef unsigned char byte; int main() { byte a=54, b=108; printf( "%d\n", (byte)(~((byte)(b &lt;&lt; 1) &amp; (byte)(b &gt;&gt; 1))) &amp; ((byte)((a   b) &gt;&gt; 1)   (byte)((a &amp; b) &lt;&lt; 1)) ); return 0; }</pre> |

**Ответ:** 111.

**Задача 10 (16 баллов).** Постройте матрицу  $D$  после выполнения следующей программы и вычислите сумму элементов строго ниже побочной диагонали:

| Pascal                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | C                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <pre>const n=5; var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer; var i, j, k, l: integer; begin k:=0; l:=0; for i:=0 to n-1 do for j:=0 to n-1 do if ((i+j) mod 2 = 0) then begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end; for k:=0 to 1 do for i:=0 to n-1 do for j:=0 to n-1 do D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]); end.</pre> | <pre>#define MIN(X,Y) ((X) &lt; (Y) ? (X) : (Y)) const int n=5; int D[n][n]; int main() { int i, j, k=0, l=0; for (i=0; i&lt;n; i++) for (j=0; j&lt;n; j++) if ((i+j) % 2 == 0) D[i][j]=--k; else D[i][j]=++l; for (k=0; k&lt;2; k++) for (i=0; i&lt;n; i++) for (j=0; j&lt;n; j++) D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]); return 0; }</pre> |

**Решение задачи 10.**

После первичного заполнения матрица D будет иметь вид:

|     |    |     |     |     |
|-----|----|-----|-----|-----|
| -1  | 1  | -2  | 2   | -3  |
| 3   | -4 | 4   | -5  | 5   |
| -6  | 6  | -7  | 7   | -8  |
| 8   | -9 | 9   | -10 | 10  |
| -11 | 11 | -12 | 12  | -13 |

Для  $k=0$  матрица D будет иметь вид:

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| -2  | -1  | -4  | 0   | -5  |
| 1   | -4  | -3  | -5  | -4  |
| -8  | -9  | -12 | -8  | -13 |
| 6   | -9  | 2   | -10 | 1   |
| -13 | -14 | -17 | -13 | -18 |

Для  $k=1$  матрица D будет иметь вид:

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| -2  | -5  | -8  | -10 | -9  |
| -3  | -8  | -11 | -13 | -12 |
| -12 | -17 | -28 | -30 | -29 |
| -12 | -17 | -28 | -30 | -29 |
| -17 | -22 | -33 | -35 | -34 |

ответ: Сумма элементов строго ниже побочной диагонали итоговой матрицы: -282.