

**Второй (заключительный) этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету
«Информатика», весна 2017 г.
Вариант № 9**

Задача 1 (8 баллов). Десятичное число 20,45 перевели в четверичную систему счисления. Найти 1999-ю цифру после запятой.

Задача 2 (8 баллов). Найти трехзначное число при следующих условиях: а) его цифры составляют геометрическую прогрессию; б) если из него вычесть 297, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке; в) если к цифрам данного числа прибавить соответственно 8, 5 и 1, то полученные суммы составят арифметическую прогрессию.

Задача 3 (8 баллов). На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость 4 окружности?

Задача 4 (8 баллов). При помощи тождеств алгебры логики выяснить, являются ли формулы $F1 = x \text{ and not } y \text{ or } y \text{ and not } z$ и $F2 = (x \text{ or not } y) \text{ and } (y \text{ or not } z)$ эквивалентными.

Задача 5 (8 баллов). Сколько имеется шестизначных чисел (первая цифра числа предполагается отличной от нуля), у которых три цифры четные, а три нечетные?

Задача 6 (8 баллов). Замените префиксное выражение $\sqrt{a^2 + d^2} + \sqrt{c^2 + b^2}$, где \wedge - знак операции возведения в степень, инфиксным. В искомом результате допустимы лишние круглые скобки, которые не являются ошибкой.

Задача 7 (12 баллов). Решить рекуррентную функцию, т. е. найти формулу для n-ого члена ряда чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, если $a_1 = -1, a_2 = 1$ и каждое a_n , начиная с a_3 , есть $a_n = -2 \cdot a_{n-1} - a_{n-2}$.

Задача 8 (12 баллов). Знаменатель дроби меньше квадрата ее числителя на единицу; если к числителю и знаменателю прибавить по 2, то значение дроби будет больше $\frac{1}{4}$; если от числителя и знаменателя отнять по 3, то значение дроби будет меньше $\frac{1}{10}$. Найти эту дробь (или все такие дроби).

Задача 9 (12 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal	C
<pre>var a: byte=54; b: byte=108; begin writeln(byte(not(byte(b shl 1) and byte(b shr 1))) and (byte((a or b) shr 1) or byte((a and b) shl 1))); end.</pre>	<pre>typedef unsigned char byte; int main() { byte a=54, b=108; printf("%d\n", (byte)(~((byte)(b << 1) & (byte)(b >> 1))) & ((byte)((a b) >> 1) (byte)((a & b) << 1))); return 0; }</pre>

Задача 10 (16 баллов). Постройте матрицу D после выполнения следующей программы и вычислите сумму элементов строго ниже побочной диагонали:

Pascal	C
<pre>const n=5; var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer; var i, j, k, l: integer; begin k:=0; l:=0; for i:=0 to n-1 do for j:=0 to n-1 do if ((i+j) mod 2 = 0) then begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end; for k:=0 to 1 do for i:=0 to n-1 do for j:=0 to n-1 do D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]); end.</pre>	<pre>#define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y)) const int n=5; int D[n][n]; int main() { int i, j, k=0, l=0; for (i=0; i<n; i++) for (j=0; j<n; j++) if ((i+j) % 2 == 0) D[i][j]=--k; else D[i][j]=++l; for (k=0; k<2; k++) for (i=0; i<n; i++) for (j=0; j<n; j++) D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]); return 0; }</pre>

Ответы варианта 9

Задача 1 (8 баллов). Десятичное число 20,45 перевели в четверичную систему счисления. Найти 1999-ю цифру после запятой.

Решение задачи 1.

Поскольку надо найти 1999-ю цифру после запятой, достаточно перевести в четверичную систему счисления дробную часть, то есть число 0,45. Имеем:

$$0,45 \times 4 = 1,8$$

$$0,8 \times 4 = 3,2$$

$$0,2 \times 4 = 0,8$$

$$0,8 \times 4 = 3,2 \text{ (дробная часть совпала с уже встречавшейся ранее).}$$

Получили бесконечную дробь с периодом (30) и непериодической частью, равной 1.

Таким образом, $0,45_{10} = 0,1(30)_4$.

Найдем теперь 1999-ю цифру этого числа. Первая цифра после запятой - единица; остаются еще 1998 цифр, находящихся в периодической части. Число 1998 четное, т.е. последовательность из двух цифр (30) повторится целое число раз. Поэтому 1999-ой цифрой будет 0.

Ответ: 0.

Задача 2 (8 баллов). Найти трехзначное число при следующих условиях: а) его цифры составляют геометрическую прогрессию; б) если из него вычесть 297, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке; в) если к цифрам данного числа прибавить соответственно 8, 5 и 1, то полученные суммы составят арифметическую прогрессию.

Ответ: 421.

Задача 3 (8 баллов). На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость 4 окружности?

Ответ: 14

Задача 4 (8 баллов). При помощи тождеств алгебры логики выяснить, являются ли формулы

$F1 = x \text{ and not } y \text{ or } y \text{ and not } z$ и $F2 = (x \text{ or not } y) \text{ and } (y \text{ or not } z)$ эквивалентными.

Ответ: НЕТ.

Задача 5 (8 баллов). Сколько имеется шестизначных чисел (первая цифра числа предполагается отличной от нуля), у которых три цифры четные, а три нечетные?

Ответ: 64800.

Задача 6 (8 баллов). Замените префиксное выражение $/+^a2^d2+^c2^b2$, где \wedge - знак операции возведения в степень, инфиксным. В искомом результате допустимы лишние круглые скобки, которые не являются ошибкой.

Ответ: $(a^2+d^2)/(c^2+b^2)$.

Задача 7 (12 баллов). Решить рекуррентную функцию, т. е. найти формулу для n -ого члена ряда чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, если $a_1 = -1, a_2 = 1$ и каждое a_n , начиная с a_3 , есть $a_n = -2 \cdot a_{n-1} - a_{n-2}$.

Ответ: $a_n = (-1)^n$.

Задача 8 (12 баллов). Знаменатель дроби меньше квадрата ее числителя на единицу; если к числителю и знаменателю прибавить по 2, то значение дроби будет больше $\frac{1}{4}$; если от числителя и знаменателя отнять по 3, то значение дроби будет меньше $\frac{1}{10}$. Найти эту дробь (или все такие дроби).

Ответ: $\frac{3}{8}$, или $\frac{4}{15}$, или $\frac{5}{24}$.

Задача 9 (12 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal	C
<pre>var a: byte=54; b: byte=108; begin writeln(byte(not(byte(b shl 1) and byte(b shr 1))) and (byte((a or b) shr 1) or byte((a and b) shl 1))); end.</pre>	<pre>typedef unsigned char byte; int main() { byte a=54, b=108; printf("%d\n", (byte)~((byte)(b << 1) & (byte)(b >> 1))) & ((byte)((a b) >> 1) (byte)((a & b) << 1)); return 0; }</pre>

Ответ: 111.

Задача 10 (16 баллов). Постройте матрицу D после выполнения следующей программы и вычислите сумму элементов строго ниже побочной диагонали:

Pascal	C
<pre>const n=5; var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer; var i, j, k, l: integer; begin k:=0; l:=0; for i:=0 to n-1 do for j:=0 to n-1 do if ((i+j) mod 2 = 0) then begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end; for k:=0 to 1 do for i:=0 to n-1 do for j:=0 to n-1 do D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]); end.</pre>	<pre>#define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y)) const int n=5; int D[n][n]; int main() { int i, j, k=0, l=0; for (i=0; i<n; i++) for (j=0; j<n; j++) if ((i+j) % 2 == 0) D[i][j]=--k; else D[i][j]=++l; for (k=0; k<2; k++) for (i=0; i<n; i++) for (j=0; j<n; j++) D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]); return 0; }</pre>

Решение задачи 10.

После первичного заполнения матрица D будет иметь вид:

-1	1	-2	2	-3
3	-4	4	-5	5
-6	6	-7	7	-8
8	-9	9	-10	10
-11	11	-12	12	-13

Для $k=0$ матрица D будет иметь вид:

-2	-1	-4	0	-5
1	-4	-3	-5	-4
-8	-9	-12	-8	-13
6	-9	2	-10	1
-13	-14	-17	-13	-18

Для $k=1$ матрица D будет иметь вид:

-2	-5	-8	-10	-9
-3	-8	-11	-13	-12
-12	-17	-28	-30	-29
-12	-17	-28	-30	-29
-17	-22	-33	-35	-34

ответ: Сумма элементов строго ниже побочной диагонали итоговой матрицы: -282.