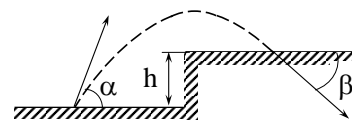


**Второй (заключительный) этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Физика»,
весна 2017 г.
Вариант № 3**

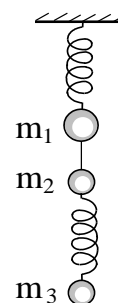
ЗАДАЧА 1.

Тело бросили под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 20 \text{ м/с}$. Тело падает на ступеньку высотой $h = 5 \text{ м}$. Под каким углом β тело подлетит к ступеньке? Принять $g = 10 \text{ м/с}^2$.



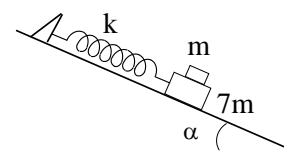
ЗАДАЧА 2.

Шарики с массами $m_1 = 2 \text{ кг}$, $m_2 = 5 \text{ кг}$ и $m_3 = 1 \text{ кг}$, подвешены к потолку с помощью двух невесомых пружин и лёгкой нити. Система покоится. Определите силу натяжения нити. Определите ускорение (направление и модуль) шара массой m_1 сразу после пережигания нити.



ЗАДАЧА 3.

На гладкой наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α колеблется как одно целое вдоль прямой брусок массы $7m$ и шайба массы m под действием пружины жесткости k , прикрепленной к бруску. Амплитуда колебаний равна A . При каком минимальном коэффициенте трения скольжения между шайбой и бруском шайба не будет проскальзывать относительно бруска?

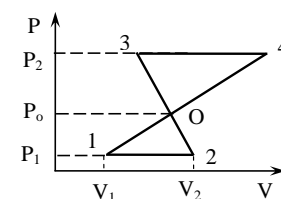


ЗАДАЧА 4.

Камень массой $m = 2 \text{ кг}$ падает без начальной скорости с высоты $h = 20 \text{ м}$ и попадает в ящик с песком массой $M = 10 \text{ кг}$, скользящий по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью $v = 6 \text{ м/с}$. Найдите на сколько увеличилась суммарная внутренняя энергия ящика песка, камня и окружающих тел.

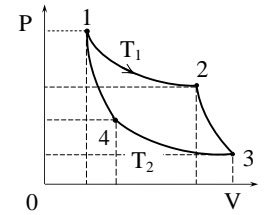
ЗАДАЧА 5.

Определите работу, которую совершает идеальный газ в замкнутом цикле 1–4–3–2–1, изображённом на рисунке, если $P_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $P_0 = 3 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $P_2 = 5 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $V_2 - V_1 = 6 \text{ л}$, а участки цикла 4–3 и 2–1 параллельны оси V .



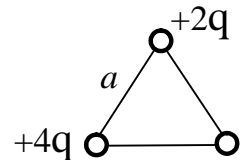
ЗАДАЧА 6.

Рабочим веществом идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно, являются два моля идеального одноатомного газа. КПД цикла известен и равен η . Определите температуру холодильника, если работа, которую совершает газ при адиабатическом расширении, равна A .



ЗАДАЧА 7.

Три одинаковых металлических шарика расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной a . Первому шарiku сообщили положительный заряд $2q$, второму шарiku - положительный заряд $4q$. Затем первый шарик на некоторое время соединили с третьим незаряженным шариком. Определите потенциальную энергию системы после перераспределения зарядов.

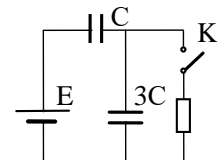


ЗАДАЧА 8.

Какое количество тепла выделится на резисторе после замыкания ключа К? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

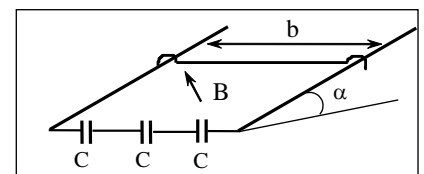
ЗАДАЧА 9.

В идеальном колебательном контуре происходят электромагнитные колебания с периодом $T = 6\pi \cdot 10^{-4} \text{ с}$. Амплитуда колебаний силы тока $I_m = 5 \text{ мА}$. В некоторый момент времени сила тока в контуре $I = 3 \text{ мА}$. Определите величину заряда конденсатора q в этот момент времени.



ЗАДАЧА 10.

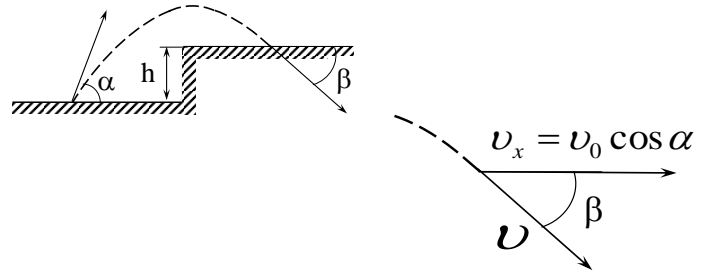
По двум параллельным металлическим направляющим, наклоненным под углом α к горизонту и расположенным на расстоянии b друг от друга, скользит без трения металлическая перемычка массы m . Направляющие замкнуты снизу на батарею конденсаторов, ёмкость каждого из которых равна C . Вся конструкция находится в магнитном поле, индукция которого \mathbf{B} направлена перпендикулярно плоскости, в которой перемещается перемычка. Определите ускорение перемычки. Сопротивлением направляющих, перемычки и индуктивностью контура пренебречь.



Решение варианта №3

ЗАДАЧА 1. (8 баллов)

Ответ: $\beta = \arccos\left(\frac{v_0 \cos \alpha}{\sqrt{v_0^2 - 2gh}}\right) = 36^\circ$



Из рисунка видно, что

$$\beta = \arccos\left(\frac{v_0 \cos \alpha}{v}\right).$$

Модуль скорости v найдём из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh, \text{ откуда } v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}, \text{ тогда } \beta = \arccos\left(\frac{v_0 \cos \alpha}{\sqrt{v_0^2 - 2gh}}\right).$$

Подставив $\alpha = 45^\circ$, $v_0 = 20 \text{ м/с}$, $h = 5 \text{ м}$,

получим $\beta = \arccos\left(\frac{20 \cos 45^\circ}{\sqrt{20^2 - 2 \cdot 10 \cdot 5}}\right) = \arccos \frac{10\sqrt{2}}{10\sqrt{3}} = \arccos 0,8, \beta = 36^\circ.$

ЗАДАЧА 2. (8 баллов).

Ответ: $T = (m_2 + m_3)g = 60 \text{ Н}; \quad a = \frac{(m_2 + m_3)g}{m_1} = 30 \text{ м/с}^2.$

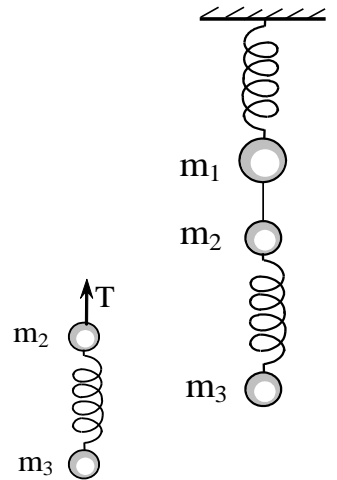
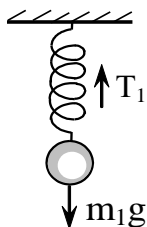
Вектор ускорения направлен вверх

1. Сила натяжения нити $T = (m_2 + m_3)g$.

2. Сила упругости в верхней пружине

$$T_1 = (m_1 + m_2 + m_3)g.$$

3. Ускорение шарика массой m_1 :



После пережигания нити исчезает сила T и, следовательно, на шар массой m_1 действуют сила тяжести mg и сила

упругости T_1 . Ускорение этого шара $a = \frac{T_1 - m_1g}{m_1} = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)g - m_1g}{m_1} = \frac{(m_2 + m_3)g}{m_1}.$

При $m_1 = 2 \text{ кг}; m_2 = 5 \text{ кг}; m_3 = 1 \text{ кг}; \quad T = (5 + 1) \cdot 10 = 60 \text{ Н}; \quad T_1 = (2 + 5 + 1) \cdot 10 = 80 \text{ Н}$

$$a = \frac{(5+1) \cdot 10}{2} = 30 \text{ м/с}^2. \text{ Вектор ускорения направлен вверх.}$$

ЗАДАЧА 3. (10 баллов)

Ответ:
$$\mu_{\min} = \text{tg} \alpha + \frac{A \cdot k}{8mg \cos \alpha}.$$

В соответствии со вторым законом Ньютона для шайбы

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{ТР}} + m\vec{g} + \vec{N}. \quad (1)$$

где $F_{\text{ТР}}$ - сила трения между шайбой и бруском.

При колебательном движении шайбы сила трения достигает максимального значения в крайнем нижнем положении шайбы. При этом ускорение шайбы $a = A\omega^2$, где A – амплитуда колебаний,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{8m}} \text{ - циклическая частота.}$$

Для этого положения шайбы уравнение (1) в проекции на ось x будет иметь вид:

$$mA\omega^2 = \mu mg \cos \alpha - mg \sin \alpha \quad (2)$$

$mA\omega^2 = \mu mg \cos \alpha - mg \sin \alpha$. Совместные колебания шайбы и бруска будут возможны, если максимальная сила трения покоя будет больше или равна силе трения скольжения между шайбой и бруском: $\mu mg \cos \alpha \geq mg \sin \alpha + mA\omega^2$.

Отсюда минимальный коэффициент трения
$$\mu_{\min} = \text{tg} \alpha + \frac{A\omega^2}{g \cos \alpha} = \text{tg} \alpha + \frac{A \cdot k}{8mg \cos \alpha}.$$

ЗАДАЧА 4. (10 баллов)

Ответ:
$$Q = mgh + \frac{mMv^2}{2(m+M)} = 430 \text{ Дж}.$$

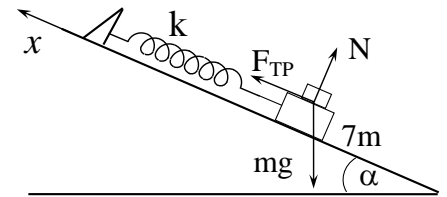
В соответствии с законом сохранения импульса

$$Mv = (M+m)u, \quad (1) \quad \text{где } u \text{ - скорость ящика с упавшим в него камнем.}$$

Отсюда
$$u = \frac{M}{M+m}v.$$

В соответствии с законом сохранения энергии
$$mgh + \frac{Mv^2}{2} = \frac{M+m}{2}u^2 + Q \quad (2),$$

где Q - выделившаяся теплота.



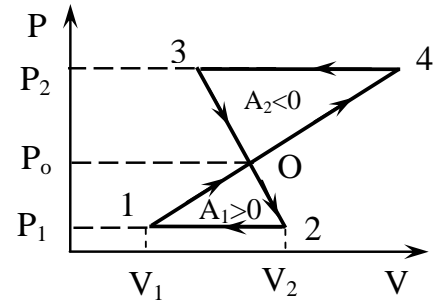
Из решения (1) и (2) получаем $Q = mgh + \frac{mMv^2}{2(m+M)}$.

Подставляя числовые значения, получим $Q = 2 \cdot 10 \cdot 20 + \frac{2 \cdot 10 \cdot 6^2}{2(2+10)} = 430 \text{ Дж}$.

ЗАДАЧА 5. (10 баллов)

Ответ: $A = -900 \text{ Дж}$.

Выполнение цикла 1 – 4 – 3 – 2 – 1 фактически эквивалентно выполнению двух простых циклов 1–0–2–1 и 0–4–3–0. Работа газа определяется площадью соответствующего цикла на PV – диаграмме. Однако, если в первом цикле она положительна, то во втором случае она отрицательная (работа совершается над газом).



Обозначим $\Delta p_1 = p_o - p_1 = (3 - 2) \cdot 10^5 = 1 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

$$\Delta p_2 = p_2 - p_o = (5 - 3) \cdot 10^5 = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Найдём работу A_1 , совершённую над газом в первом цикле 1–0–2–1 :

$$A_1 = \frac{(p_o - p_1)(V_2 - V_1)}{2} = \frac{\Delta p_1 \cdot \Delta V}{2} = 3 \cdot 10^2 \text{ Дж}.$$

Треугольник на PV – диаграмме, соответствующий второму циклу 0–4–3–0, подобен треугольнику, соответствующему циклу 1–0–2–1.

Учитывая, что площади подобных треугольников относятся как квадраты длин соответствующих элементов, в данном случае – высот, найдём работу A_2 в цикле 1–0–2–1 :

$$A_2 = -A_1 \left(\frac{\Delta p_2}{\Delta p_1} \right) = -3 \cdot 10^2 \cdot 2^2 = -12 \cdot 10^2 \text{ Дж}$$

Полная работа A за цикл будет, таким

образом, равна

$$A = A_1 + A_2 = 300 - 1200 = -900 \text{ Дж}.$$

ЗАДАЧА 6. (10 баллов)

Ответ:
$$T_2 = \frac{(1-\eta)A}{3R\eta}$$

КПД цикла $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$,

где T_1 – температура нагревателя, T_2 – температура холодильника.

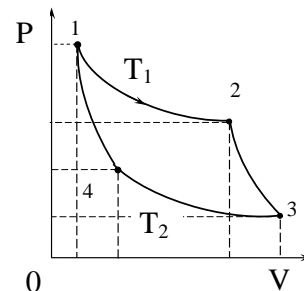
Процесс 2–3 – адиабатическое расширение газа.

В соответствии с первым законом термодинамики для адиабатического процесса $\Delta U + A = 0$, тогда $A = -\Delta U$.

$$A = \frac{3}{2}\nu R(T_1 - T_2) = \frac{3}{2}\nu RT_2 \left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right). \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{1-\eta}.$$

Тогда $A = \frac{3}{2}\nu RT_2 \left(\frac{\eta}{1-\eta} \right)$. Отсюда $T_2 = \frac{2(1-\eta)A}{3\nu R\eta}$. Для $\nu = 2$,

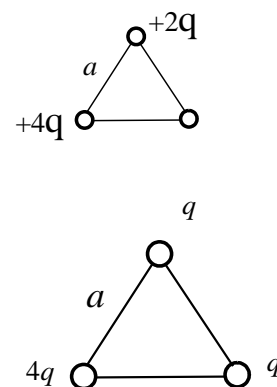
$$T_2 = \frac{(1-\eta)A}{3R\eta}.$$



ЗАДАЧА 7. (10 баллов)

Ответ:
$$W = \frac{9 \cdot q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

При каждом соединении заряженного шарика с незаряженным происходит перераспределение зарядов: шарики заряжаются одинаковым по величине зарядом. Схема зарядов после перераспределения:



Потенциальная энергия системы после перераспределения зарядов

$$W = K \frac{4q^2}{a} + K \frac{4q^2}{a} + K \frac{q^2}{a} = K \frac{9q^2}{a} = \frac{9 \cdot q^2}{4\pi\epsilon_0 a}, \quad \text{где } K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.$$

ЗАДАЧА 8. (10 баллов)

Ответ: $Q = \frac{1}{8} C \cdot E^2$.

До замыкания ключа :

1) Ёмкость батареи конденсаторов

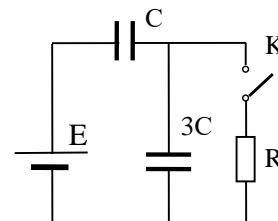
$$C_{\text{БАТ}} = \frac{C \cdot 3C}{C + 3C} = \frac{3C^2}{4C} = \frac{3}{4} C.$$

2) Заряд на батарее конденсаторов

$$q_1 = C_{\text{БАТ}} E = \frac{3}{4} C \cdot E.$$

3) Энергия батареи конденсаторов

$$W_1 = \frac{C_{\text{БАТ}} \cdot E^2}{2} = \frac{3CE^2}{4 \cdot 2} = \frac{3}{8} CE^2$$



После замыкания ключа:

1) заряд на конденсаторе C

$$q_2 = CE$$

2) Энергия конденсатора C

$$W_2 = \frac{C \cdot E^2}{2} = \frac{1}{2} CE^2.$$

3) Работа батареи конденсаторов

$$A = E(q_2 - q_1) = E \left(CE - \frac{3}{4} CE \right) = \frac{1}{4} CE^2$$

4) Количество тепла, которое выделится на резисторе с сопротивлением R после замыкания ключа K

$$Q = A - (W_2 - W_1) = \frac{1}{4} CE^2 - \left[\frac{1}{2} C \cdot E^2 - \frac{3}{8} C \cdot E^2 \right] = \frac{1}{4} C \cdot E^2 - \frac{1}{8} C \cdot E^2 = \frac{1}{8} C \cdot E^2,$$

$$Q = \frac{1}{8} C \cdot E^2.$$

ЗАДАЧА 9. (12 баллов.)

Ответ: $q = \sqrt{\frac{(I_{\text{max}}^2 - I^2) T^2}{(2\pi)^2}} = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл} = 1,2 \text{ мкКл}.$

В идеальном колебательном контуре заряд конденсатора изменяется по гармоническому закону

$$q = q_{\text{max}} \cos(\omega t + \alpha), \quad (1)$$

где q_{max} – амплитуда колебаний заряда, ω – циклическая частота колебаний,

α – начальная фаза.

Сила тока есть производная заряда по времени $I = \frac{dq}{dt} = -q_{\max} \omega \sin(\omega t + \alpha)$ (2).

Максимальные (амплитудные) значения силы тока достигаются при $\sin(\omega t + \alpha) = \pm 1$.

Следовательно, амплитуда колебаний силы тока $I_{\max} = q_{\max} \omega$, откуда $q_{\max} = \frac{I_{\max}}{\omega}$. Тогда

равенство (1) примет вид $q = \frac{I_{\max}}{\omega} \cos(\omega t + \alpha)$ (3), а равенство (2)

$$I = -I_{\max} \sin(\omega t + \alpha) \quad (4).$$

Циклическая частота и период колебаний связаны между собой соотношением $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Из (3) и (4) $\frac{q\omega}{I_{\max}} = \cos(\omega t + \alpha)$; $\frac{I}{I_{\max}} = -\sin(\omega t + \alpha)$.

$$[\cos(\omega t + \alpha)]^2 + [-\sin(\omega t + \alpha)]^2 = 1$$

$$\left(\frac{q\omega}{I_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{I}{I_{\max}}\right)^2 = 1; \quad q = \sqrt{\frac{I_{\max}^2 - I^2}{\omega^2}} = \sqrt{\frac{(I_{\max}^2 - I^2)T^2}{(2\pi)^2}}.$$

Подставив числовые значения, получим

$$q = \sqrt{\frac{(I_{\max}^2 - I^2)T^2}{(2\pi)^2}} = \sqrt{\frac{(5 \cdot 10^{-3} - 3 \cdot 10^{-3})^2 (6\pi \cdot 10^{-4})^2}{4\pi^2}} = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл} = 1,2 \text{ мкКл}.$$

ЗАДАЧА 10.

Ответ: $a = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{1}{3}Cb^2B^2 \cos^2 \alpha}$.

При движении перемычки меняется магнитный поток, пронизывающий контур, «замыкаемый» перемычкой.

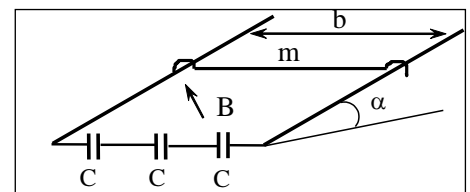
В результате в контуре возникает ЭДС индукции.

В течение малого промежутка времени, когда скорость v перемычки можно считать неизменной, мгновенное значение ЭДС индукции равно

$$E = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = vbB \cos \alpha$$

Сила тока, текущего через перемычку в это время, равна

$$I = -\frac{\Delta q}{\Delta t}, \text{ где } \Delta q \text{ - заряд, накопившийся на конденсаторе за время } \Delta t, \text{ т.е.}$$



$$I = \frac{1}{3} C \Delta E = \frac{1}{3} C b B \Delta v \cos \alpha \quad (\text{поскольку сопротивление направляющих и переключки}$$

отсутствует, мгновенное значение напряжения на конденсаторе равно E).

$$\text{Итак,} \quad I = \frac{1}{3} C b B \frac{\Delta v}{\Delta t} \cos \alpha = \frac{1}{3} C b B a \cos \alpha, \quad \text{где } a - \text{ускорение, с которым движется}$$

переключка.

На переключку действует сила тяжести и сила Ампера. Напишем уравнение движения переключки:

$$m a = m g \sin \alpha - I b B \cos \alpha = m g \sin \alpha - \frac{1}{3} C b^2 B^2 a \cos^2 \alpha. \quad \text{Отсюда найдем}$$

$$a = \frac{m g \sin \alpha}{m + \frac{1}{3} C b^2 B^2 \cos^2 \alpha}.$$