

Второй (заключительный) этап академического соревнования

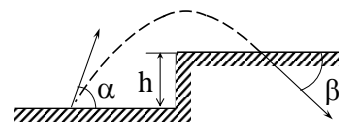
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Физика»,

весна 2017 г.

Вариант № 1

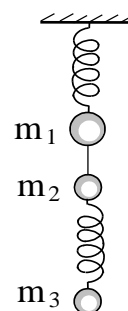
ЗАДАЧА 1.

Тело бросили под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 10 \text{ м/с}$. Тело падает на ступеньку высотой $h = 2 \text{ м}$. Под каким углом β тело подлетит к ступеньке? Принять $g = 10 \text{ м/с}^2$.



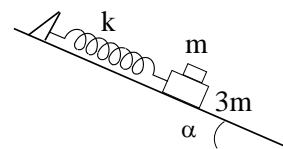
ЗАДАЧА 2.

Шарики с массами $m_1 = 5 \text{ кг}$, $m_2 = 1 \text{ кг}$ и $m_3 = 2 \text{ кг}$, подвешены к потолку с помощью двух невесомых пружин и лёгкой нити. Система покоится. Определите силу натяжения нити. Определите ускорение (направление и модуль) шара массой m_1 сразу после пережигания нити.



ЗАДАЧА 3.

На гладкой наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α колеблется как одно целое вдоль прямой брусок массы $3m$ и шайба массы m под действием пружины жесткости k , прикреплённой к бруску. Амплитуда колебаний равна A . При каком минимальном коэффициенте трения скольжения между шайбой и бруском шайба не будет проскальзывать относительно бруска?

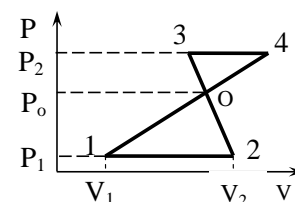


ЗАДАЧА 4.

Камень массой $m = 1 \text{ кг}$ падает без начальной скорости с высоты $h = 5 \text{ м}$ и попадает в ящик с песком массой $M = 5 \text{ кг}$, скользящий по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью $v = 6 \text{ м/с}$. Найдите на сколько увеличилась суммарная внутренняя энергия ящика песка, камня и окружающих тел.

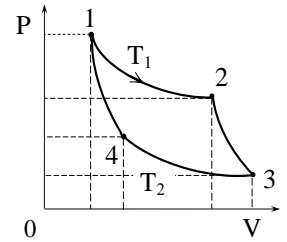
ЗАДАЧА 5.

Определите работу, которую совершает идеальный газ в замкнутом цикле 1–4–3–2–1, изображённом на рисунке, если $P_1 = 10^5 \text{ Па}$, $P_0 = 3 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $P_2 = 4 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $V_2 - V_1 = 10 \text{ л}$, а участки цикла 4–3 и 2–1 параллельны оси V .

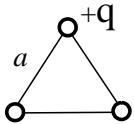


ЗАДАЧА 6.

Рабочим веществом идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно, является один моль идеального одноатомного газа. КПД цикла равен η . Определите температуру нагревателя, если работа, которую совершает газ при адиабатическом расширении, равна A .



ЗАДАЧА 7.

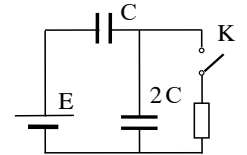


Три одинаковых металлических шарика расположены в вакууме в вершинах равностороннего треугольника со стороной a . Одному из шариков сообщили положительный заряд q . Затем его на некоторое время соединили тонким проводником поочерёдно с каждым из незаряженных шариков.

Определите потенциальную энергию системы после перераспределения зарядов.

ЗАДАЧА 8.

Какое количество тепла выделится на резисторе после замыкания ключа K ? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

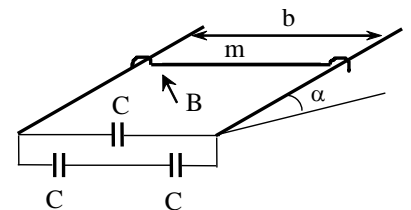


ЗАДАЧА 9.

В идеальном колебательном контуре происходят электромагнитные колебания с периодом $T = 2\pi \cdot 10^{-5} \text{ с}$. В некоторый момент времени заряд конденсатора $q = 5 \text{ нКл}$, а сила тока в контуре $I = 0,8 \text{ мА}$. Найдите величину амплитуды колебаний силы тока I_m в контуре.

ЗАДАЧА 10.

По двум параллельным металлическим направляющим, наклоненным под углом α к горизонту и расположенным на расстоянии b друг от друга, скользит без трения металлическая перемычка массы m . Направляющие замкнуты снизу на батарею конденсаторов, ёмкость каждого из которых равна C .



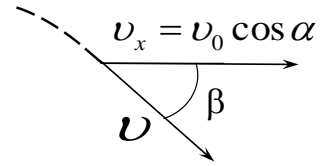
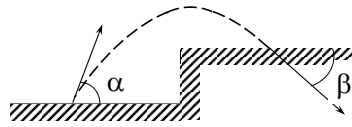
Вся конструкция находится в магнитном поле, индукция которого B направлена перпендикулярно плоскости, в которой перемещается перемычка. Определите ускорение перемычки. Сопротивлением направляющих, перемычки и индуктивностью контура пренебречь.

Решение варианта №1

ЗАДАЧА 1. (8 баллов)

Ответ:

$$\beta = \arccos\left(\frac{v_0 \cos \alpha}{\sqrt{v_0^2 - 2gh}}\right) = 50^\circ.$$



Из рисунка видно, что

$$\beta = \arccos\left(\frac{v_0 \cos \alpha}{v}\right).$$

Модуль скорости v найдём из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh, \text{ откуда } v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}, \text{ тогда } \beta = \arccos\left(\frac{v_0 \cos \alpha}{\sqrt{v_0^2 - 2gh}}\right).$$

Подставив $\alpha = 60^\circ$, $v_0 = 10 \text{ м/с}$, $h = 2 \text{ м}$, получим

$$\beta = \arccos\left(\frac{10 \cos 60^\circ}{\sqrt{10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 2}}\right) = \arccos\frac{5}{\sqrt{60}} = \arccos 0,646, \quad \beta = 50^\circ.$$

ЗАДАЧА 2. (8 баллов).

Ответ: $T = (m_2 + m_3)g = 30 \text{ Н}; \quad a = \frac{(m_2 + m_3)g}{m_1} = 6 \text{ м/с}^2.$

Вектор ускорения направлен вверх.

1. Сила натяжения нити найдём из условия равновесия $T = (m_2 + m_3)g$.

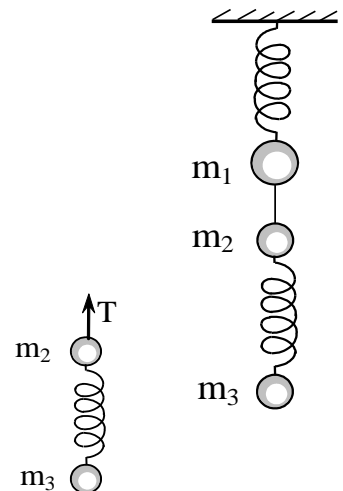
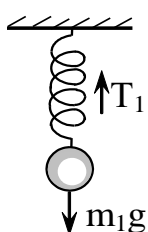
2. Сила упругости в верхней пружине

$$T_1 = (m_1 + m_2 + m_3)g.$$

3. Ускорение шарика массой m_1 :

После пережигания нити исчезает сила T и, следовательно, на шар массой m_1 действуют сила тяжести m_1g и сила упругости T_1 . Ускорение этого шара

$$a = \frac{T_1 - m_1g}{m_1} = \frac{(m_1 + m_2 + m_3 - m_1)g}{m_1} = \frac{(m_2 + m_3)g}{m_1}.$$



При $m_1 = 5\text{кг}$; $m_2 = 1\text{кг}$; $m_3 = 2\text{кг}$; $T = (1 + 2) \cdot 10 = 30\text{Н}$; $T_1 = (5 + 1 + 2) \cdot 10 = 80\text{Н}$

$$a = \frac{(1 + 2) \cdot 10}{5} = 6\text{м/с}^2. \text{ Вектор ускорения направлен вверх.}$$

ЗАДАЧА 3. (10 баллов)

Ответ:
$$\mu_{\min} = \text{tg} \alpha + \frac{A \cdot k}{4mg \cos \alpha}.$$

В соответствии со вторым законом Ньютона для

шайбы $m\vec{a} = \vec{F}_{\text{ТР}} + m\vec{g} + \vec{N}$. (1)

где $F_{\text{ТР}}$ - сила трения между шайбой и бруском.

При колебательном движении шайбы сила трения достигает максимального значения в крайнем нижнем положении шайбы. При этом ускорение шайбы

$a = A\omega^2$, где A – амплитуда колебаний,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{4m}} \text{ - циклическая частота.}$$

Для этого положения шайбы уравнение (1) в проекции на ось x будет иметь вид:

$$mA\omega^2 = \mu mg \cos \alpha - mg \sin \alpha \quad (2)$$

Совместные колебания шайбы и бруска будут возможны, если максимальная сила трения покоя будет больше или равна силе трения скольжения между шайбой и бруском:

$\mu mg \cos \alpha \geq mg \sin \alpha + mA\omega^2$. Отсюда минимальный коэффициент трения

$$\mu_{\min} = \text{tg} \alpha + \frac{A\omega^2}{g \cos \alpha} = \text{tg} \alpha + \frac{A \cdot k}{4mg \cos \alpha}.$$

ЗАДАЧА 4. (10 баллов)

Ответ:
$$Q = mgh + \frac{mMv^2}{2(m + M)} = 65 \text{ Дж}.$$

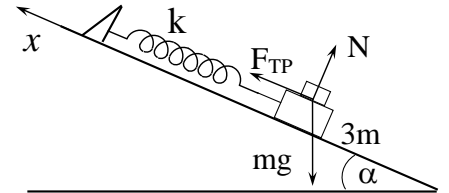
В соответствии с законом сохранения импульса

$$Mv = (M + m)u, \quad (1) \quad \text{где } u \text{ - скорость ящика с упавшим в него камнем.}$$

Отсюда
$$u = \frac{M}{M + m}v.$$

В соответствии с законом сохранения энергии
$$mgh + \frac{Mv^2}{2} = \frac{M + m}{2}u^2 + Q \quad (2),$$

где Q - выделившаяся теплота.



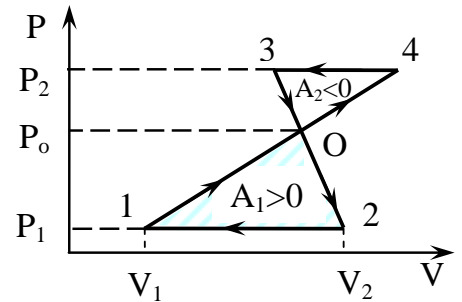
Из решения (1) и (2) получаем $Q = mgh + \frac{mMv^2}{2(m+M)}$.

Подставляя числовые значения, получим $Q = 1 \cdot 10 \cdot 5 + \frac{1 \cdot 5 \cdot 6^2}{2(1+5)} = 65 \text{ Дж}$.

ЗАДАЧА 5. (10 баллов)

Ответ: $A = 750 \text{ Дж}$.

Выполнение цикла 1 – 4 – 3 – 2 – 1 фактически эквивалентно выполнению двух простых циклов 1–0–2–1 и 0–4–3–0. Работа газа определяется площадью соответствующего цикла на P V – диаграмме.



Однако, если в первом цикле она положительна, то во втором случае она отрицательная (работа совершается над газом).

Обозначим $\Delta p_1 = p_o - p_1 = (3-1) \cdot 10^5 = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

$$\Delta p_2 = p_2 - p_o = (4-3) \cdot 10^5 = 1 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 = 10^{-2} \text{ м}^3.$$

Найдём работу A_1 , совершённую над газом в первом цикле 1–0–2–1 :

$$A_1 = \frac{(p_o - p_1)(V_2 - V_1)}{2} = \frac{\Delta p_1 \cdot \Delta V}{2} = 1 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Треугольник на P V – диаграмме, соответствующий второму циклу 0–4–3–0, подобен треугольнику, соответствующему циклу 1–0–2–1.

Учитывая, что площади подобных треугольников относятся как квадраты длин соответствующих элементов, в данном случае – высот, найдём работу A_2 в цикле 1–0–2–1 :

$$A_2 = -A_1 \left(\frac{\Delta p_2}{\Delta p_1} \right) = -1 \cdot 10^3 \left(\frac{1}{2} \right)^2 = -250 \text{ Дж} \quad \text{Полная работа } A \text{ за цикл будет, таким}$$

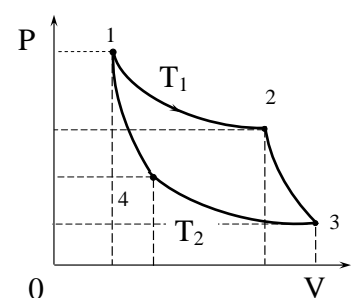
образом, равна

$$A = A_1 + A_2 = 1000 - 250 = 750 \text{ Дж}.$$

ЗАДАЧА 6. (10 баллов)

Ответ: $T_1 = \frac{2A}{3R\eta}$. КПД цикла $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$,

где T_1 – температура нагревателя, T_2 – холодильника.



Процесс 2–3 – адиабатическое расширение газа.

В соответствии с первым законом термодинамики для адиабатического процесса $\Delta U + A = 0$, тогда $A = -\Delta U$.

$$A = \frac{3}{2} \nu R (T_1 - T_2) = \frac{3}{2} \nu R T_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) = \frac{3}{2} \nu R T_1 \eta.$$

Отсюда $T_1 = \frac{2A}{3\nu R \eta}$. Для $\nu = 1$ $T_1 = \frac{2A}{3R\eta}$.

ЗАДАЧА 7. (10 баллов)

Ответ:
$$W = \frac{5 \cdot q^2}{64 \pi \epsilon_0 a}.$$

При каждом соединении заряженного шарика с незаряженным

происходит перераспределение зарядов: шарики заряжаются одинаковым по величине зарядом. Схема зарядов после перераспределения показана на рис. 2:

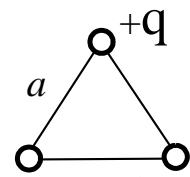


Рис. 1

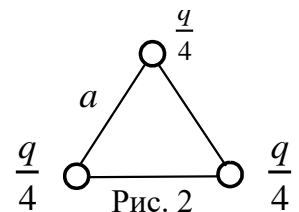


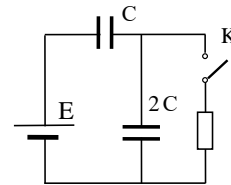
Рис. 2

Потенциальная энергия системы после перераспределения зарядов

$$W = K \frac{q^2}{8a} + K \frac{q^2}{8a} + K \frac{q^2}{16a} = K \frac{5}{16} \frac{q^2}{a} = \frac{5 \cdot q^2}{64 \pi \epsilon_0 a}, \text{ где } K = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0}.$$

ЗАДАЧА 8. (10 баллов.)

Ответ:
$$Q = \frac{1}{6} C \cdot E^2.$$



До замыкания ключа :

1) Ёмкость батареи конденсаторов $C_{\text{БАТ}} = \frac{C \cdot 2C}{C + 2C} = \frac{2C^2}{3C} = \frac{2}{3} C.$

2) Заряд на батарее конденсаторов $q_1 = \frac{2}{3} C \cdot E = \frac{2}{3} CE.$

3) Энергия батареи конденсаторов $W_1 = \frac{C_{\text{БАТ}} \cdot E^2}{2} = \frac{2CE^2}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3} CE^2.$

После замыкания ключа:

1) заряд на конденсаторе C $q_2 = CE.$

2) Энергия конденсатора C $W_2 = \frac{C \cdot E^2}{2}$.

3) Работа батареи конденсаторов $A = E(q_2 - q_1) = E\left(CE - \frac{2}{3}CE\right) = \frac{1}{3}CE^2$.

4) Количество тепла, которое выделится на резисторе после замыкания ключа К,

$$Q = A - (W_2 - W_1) = \frac{1}{3}CE^2 - \left[\frac{1}{2}C \cdot E^2 - \frac{1}{3}C \cdot E^2\right] = \frac{1}{6}C \cdot E^2, \quad \boxed{Q = \frac{1}{6}C \cdot E^2}.$$

ЗАДАЧА 9. (12 баллов)

Ответ: $\boxed{I_{\max} = \sqrt{\left(q \cdot \frac{2\pi}{T}\right)^2 + I^2} = 0,94 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 0,94 \text{ mA}}$.

В идеальном колебательном контуре заряд конденсатора изменяется по гармоническому закону

$$q = q_{\max} \cos(\omega t + \alpha), \quad (1)$$

где q_{\max} – амплитуда колебаний заряда, ω – циклическая частота колебаний, α – начальная фаза.

Сила тока есть производная заряда по времени $I = \frac{dq}{dt} = -q_{\max} \omega \sin(\omega t + \alpha) \quad (2).$

Максимальные (амплитудные) значения силы тока достигаются при $\sin(\omega t + \alpha) = \pm 1$.

Следовательно, амплитуда колебаний силы тока $I_{\max} = q_{\max} \omega$. Циклическая частота и период колебаний связаны между собой соотношением $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Из (1) и (2) $\frac{q}{q_{\max}} = \cos(\omega t + \alpha)$; $\frac{I}{q_{\max} \omega} = -\sin(\omega t + \alpha)$.

$$[\cos(\omega t + \alpha)]^2 + [-\sin(\omega t + \alpha)]^2 = 1$$

$$\left(\frac{q}{q_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{I}{q_{\max} \omega}\right)^2 = 1; \quad q_{\max} = \sqrt{q^2 + \left(\frac{I}{\omega}\right)^2} = 1;$$

$$I_{\max} = q_{\max} \omega = \sqrt{q^2 \omega^2 + I^2} = \sqrt{\left(q \cdot \frac{2\pi}{T}\right)^2 + I^2}. \text{ Подставив числовые значения, получим}$$

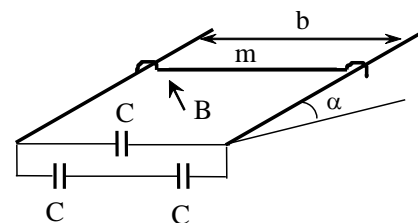
$$I_{\max} = \sqrt{(5 \cdot 10^{-9} \cdot 10^5)^2 + (0,8 \cdot 10^{-3})^2} = 0,94 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

ЗАДАЧА 10. (12 баллов)

Ответ:
$$a = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{2}{3}Cb^2B^2}.$$

При движении перемычки меняется магнитный поток, пронизывающий контур, «замыкаемый» перемычкой. В результате в контуре возникает ЭДС индукции.

В течение малого промежутка времени, когда скорость v перемычки можно считать неизменной, мгновенное значение ЭДС индукции равно



$$E = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = v b B.$$

Сила тока, текущего через перемычку в это время, равна

$$I = -\frac{\Delta q}{\Delta t}, \text{ где } \Delta q \text{ - заряд, накопившийся на конденсаторе за время } \Delta t, \text{ то есть}$$

$\Delta q = C_{\text{БАТ}} \Delta E = \frac{2}{3} C b B \Delta v$ (поскольку сопротивление направляющих и перемычки отсутствует, мгновенное значение напряжения на конденсаторе равно E).

Итак,
$$I = \frac{2}{3} C b B \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2}{3} C b B a,$$
 где a – ускорение, с которым движется перемычка.

На перемычку действует сила тяжести и сила Ампера.

Напишем уравнение движения перемычки:
$$m a = m g \sin \alpha - I b B = m g \sin \alpha - \frac{2}{3} C b^2 B^2 a.$$

Отсюда найдем
$$a = \frac{m g \sin \alpha}{m + \frac{2}{3} C b^2 B^2}.$$