Первый (отборочный) этап академического соревнования Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика», осень 2016 г.

Вариант № 5

1. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два велосипедиста. Когда первый велосипедист проехал половину пути, второму осталось проехать 24 км, а когда второй проехал половину пути, первому осталось проехать 15 км. Найдите расстояние между пунктами A и B.

(8 баллов)

2. Решите неравенство $\sqrt{\frac{x-24}{x}}-\sqrt{\frac{x}{x-24}}<\frac{24}{5}$. (8 баллов)

3. Три числа, сумма которых 114, являются, с одной стороны, тремя последовательными членами геометрической прогрессии, а с другой ─ первым, четвертым и двадцать пятым членами арифметической прогрессии соответственно. Найдите эти числа.

(8 баллов)

4. Решите уравнение $\operatorname{ctg} 2x\sqrt{\sin x\cos x}-\sqrt{1-\sin x\cos x}=0$ (8 баллов)

5. Решите неравенство $\sqrt{x+4-|x+3|}>x-3+|x+5|$.. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$f(x)=g\left(2\sqrt{2{,}5-g(x)}\right)$, где $g(x)=3/(|x-2|+1)$ (10 баллов)

7. В трапецию $ABCD$ вписана окружность, касающаяся боковой стороны AB в точке M, а боковой стороны CD в точке K, причем $AM=9$, $CK=3$. Найдите диагонали трапеции, если её периметр равен 56. (12 баллов)

8. Какую наименьшую площадь может иметь фигура на плоскости xy, расположенная между прямыми $x=-5$ и $x=1$ и ограниченная снизу осью x, а сверху – касательной к графику функции $y=7-6x-x^2$ с абсциссой x_0 точки касания, лежащей в промежутке $-5\le x_0\le 1$?

(12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$$y-1=|x|/x;\ (x-a)^2=y+a$$

имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (12 баллов)

10. Основанием пирамиды $TABCD$ служит прямоугольник со сторонами $AB=12$ и $AD=4$, а боковые ребра соответственно равны $TA=3$, $TD=5$, $TC=13$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину T, центр симметрии основания и точку M, лежащую на ребре BC? На какие части делит точка M ребро BC в этом случае? (12 баллов)

Решение варианта №5

1. Из пункта А в пункт В одновременно выехали два велосипедиста. Когда первый велосипедист проехал половину пути, второму осталось проехать 24 км, а когда второй проехал половину пути, первому осталось проехать 15 км. Найдите расстояние между пунктами А и В.

Решение:

Пусть s – расстояние между пунктами A и B, v_1, v_2 – скорости велосипедистов. Тогда $\frac{s}{2v_1}=\frac{s-24}{v_2}$ и $\frac{s-15}{v_1}=\frac{s}{2v_2}$. Отсюда $\frac{s}{2(s-24)}=\frac{(s-15)\cdot 2}{s}$; $s^2=4s^2-4\cdot 39s+60\cdot 24$; $s^2-52s+480=0$; $s_{1,2}=26\pm 14$. $s_1=40,\quad s_2=12$ не удовлетворяет условиям задачи $s>15,\ s>24$.

Ответ: 40 км.

2. Решите неравенство $\sqrt{\frac{x-24}{x}}-\sqrt{\frac{x}{x-24}}<\frac{24}{5}$.

Решение: $\sqrt{\frac{x}{x-24}}=y>0;\ \frac{1}{y}-y<\frac{24}{5};\ 5y^2+24y-5>0$; $y_{1,2}=\frac{-12\pm\sqrt{144+25}}{5}=\frac{-12\pm 13}{5}$, $y_1=\frac{1}{5}, y_2=-5$. След. $y>\frac{1}{5}$, $\frac{x}{x-24}>\frac{1}{25}\Leftrightarrow\frac{x+1}{x-24}>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1,\\ x>24.\end{array}\right.$

Ответ: $x\in(-\infty;-1)\cup(24;+\infty)$.

3. Три числа, сумма которых 114, являются, с одной стороны, тремя последовательными членами геометрической прогрессии, а с другой ─ первым, четвертым и двадцать пятым членами арифметической прогрессии соответственно. Найдите эти числа.

Решение: Пусть a, b, c - искомые числа, d - разность арифметической прогрессии. Тогда

$$\begin{cases}a+b+c=114,\\ ac=b^2,\\ b=a+3d,\\ c=a+24d,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a+27d=114,\\ a(a+24d)=(a+3d)^2,\\ b=a+3d,\\ c=a+24d,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=38-9d,\\ 24ad=6ad+9d^2,\\ b=a+3d,\\ c=a+24d,\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=38-9d,\\ d(2a-d)=0,\\ b=a+3d,\\ c=a+24d,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=38-9d,\\ \left[\begin{array}{l}d=0,\\ d=2a,\end{array}\right.\\ b=a+3d,\\ c=a+24d,\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=0,\ a=b=c=38,\\ d=4,\ a=2,\ b=14,\ c=98.\end{array}\right.$$

Ответ: $a_1=38,\quad b_1=38,\quad c_1=38,$ или $a_2=2,\quad b_2=14,\quad c_2=98.$

4. Решите уравнение $\operatorname{ctg}2x\sqrt{\sin x\cos x}-\sqrt{1-\sin x\cos x}=0$.

Решение:

$\operatorname{ctg}2x\sqrt{\sin x\cos x}=\sqrt{1-\sin x\cos x}$. При условии $\operatorname{ctg}2x\ge 0$ возводим в квадрат обе части уравнения ($1-\sin x\cos x>0$ для всех x): $\operatorname{ctg}^2 2x\,\sin x\cos x=1-\sin x\cos x \Leftrightarrow$

$\operatorname{ctg}^2 2x\,\sin 2x=2-\sin 2x \quad\Leftrightarrow \sin 2x\ne 0,\quad \cos^2 2x=\sin 2x(2-\sin 2x) \Leftrightarrow$

$\sin 2x(2-\sin 2x)=1-\sin^2 2x \Leftrightarrow \sin 2x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$. С учетом условия

$\operatorname{ctg}2x\ge 0$ окончательно имеем $x=\dfrac{\pi}{12}+\pi n,\ n\in Z$.

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{12}+\pi n,\ \ n\in Z$.

5. Решите неравенство $\sqrt{x+4-|x+3|}>x-3+|x+5|$. (10 баллов)

Решение:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3+|x+5|<0,\\ x+4-|x+3|\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x-3+|x+5|\ge 0,\\ x+4-|x+3|>(x-3+|x+5|)^2,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3<x+5<3-x,\\ -x-4\le x+3\le x+4,\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x+5\ge 3-x,\\ x+5\le x-3,\end{array}\right.\\ x+4-|x+3|>(x-3+|x+5|)^2,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1,\\ x\ge -3{,}5,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge -1,\\ 1>(2x+2)^2,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in[-3{,}5;\,-1),\\ \begin{cases}x\ge -1,\\ (1-2x-2)(1+2x+2)>0,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in[-3{,}5;\,-1),\\ \begin{cases}x\ge -1,\\ (2x+1)(2x+3)<0,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in[-3{,}5;\,-1),\\ x\in[-1;\,-0{,}5),\end{array}\right. \Leftrightarrow\ x\in[-3{,}5;\,-0{,}5).$$

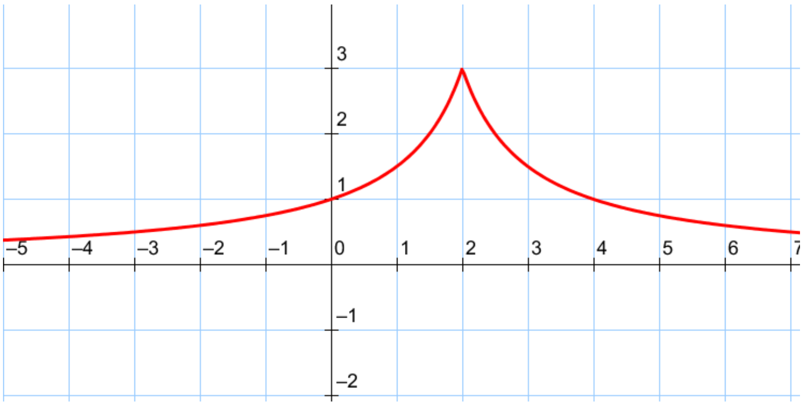
Ответ: $x\in[-3{,}5;\,-0{,}5)$.

6. Найдите множество значений функции $f(x)=g(2\sqrt{2{,}5-g(x)})$, где

$g(x)=\dfrac{3}{|x-2|+1}$.

Решение:

Функция $g(x)=\dfrac{3}{|x-2|+1}$ определена на всей числовой оси и принимает все значения из промежутка $(0;3]$. Функция $g(x)$ достигает максимального значения в точке $x=2$, $g_{\max}=g(2)=3$, на промежутке $(-\infty;2)$ функция $g(x)$ возрастает, на промежутке $(2;+\infty)$ – убывает. График функции $g(x)$ изображен на рисунке.

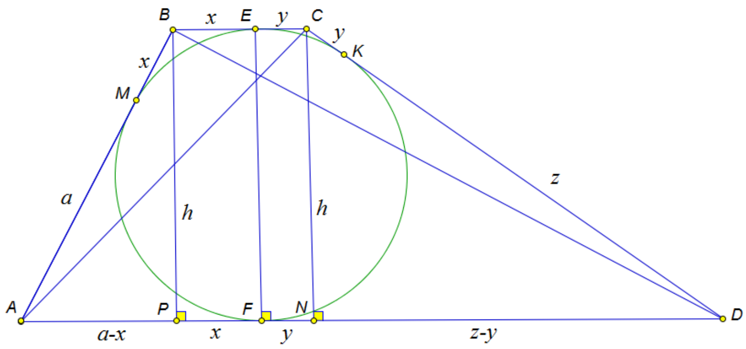


Функция $\phi(t)=2\sqrt{2,5-t}$ определена для $t\in(-\infty;2,5]$. При $t=g(x)$ функция $\phi(t)=2\sqrt{2,5-t}$ принимает свои значения при $t\in(0;2,5]$, причем множество значений этой функции есть отрезок $[0;2\sqrt{2,5})$. Для нахождения множества значений функции $f(x)$ достаточно найти множество значений функции $g(x)$ на промежутке $[0;2\sqrt{2,5})$. На указанном промежутке $g(x)$ принимает все значения из множества $[1;3]$.

Ответ: $E_f=[1;3]$.

7. В трапецию $ABCD$ вписана окружность, касающаяся боковой стороны AB в точке M, а боковой стороны CD в точке K, причем $AM=9$, $CK=3$. Найдите диагонали трапеции, если её периметр равен 56.

Решение: M, E, K, F - точки касания окружности со сторонами AB, BC, CD, AD соответственно. Тогда



$AM=AF=a=9$,

$BM=BE=x$, $CE=CK=y=3$,

$DK=DF=z$.

$P_{ABCD}=2(9+x+3+z)=56$,

$x+z=16$.

Пусть $BP\perp AD, CN\perp AD$.

В треугольнике ABP по теореме Пифагора имеем: $h^2+(a-x)^2=(a+x)^2$, $h^2=4ax$. В треугольнике CDN по теореме Пифагора имеем: $h^2+(z-y)^2=(z+y)^2$, $h^2=4yz$. Тогда $ax=yz$, $3x=z$. Так как $x+z=16$, то

$x=4,\ z=12.$ Находим стороны трапеции $AB=13$, $BC=7$, $CD=15$, $AD=21$ и высоту $h=12.$ Из треугольника DBP имеем по теореме Пифагора находим BD:

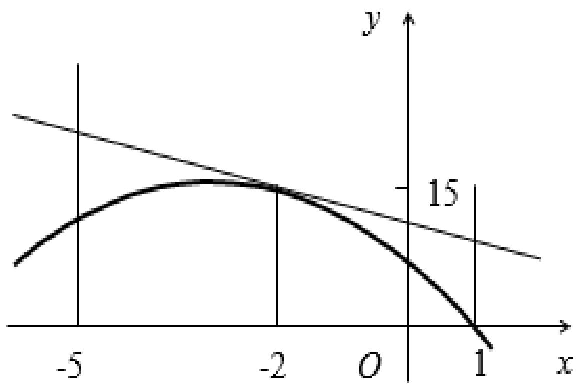
$$BD^2=BP^2+PD^2=h^2+(x+z)^2=12^2+16^2=400,\ BD=20.$$

Из треугольника CAN по теореме Пифагора находим AC:

$$AC^2=AN^2+CN^2=(a+y)^2+h^2=12^2+12^2=288,\ AC=12\sqrt{2}.$$

Ответ: $AC=12\sqrt{2}$, $BD=20$.

8. Какую наименьшую площадь может иметь фигура на плоскости xy, расположенная между прямыми $x=-5$ и $x=1$ и ограниченная снизу осью x, а сверху касательной к графику функции $y=7-6x-x^2$ с абсциссой x_0 точки касания, лежащей в промежутке $-5\le x_0\le 1$?



Решение:

$y=7-6x-x^2,\quad x_1=-5,\quad x_2=1.$

Уравнение касательной: $y=7-6x_0-x_0^2-\left(2x_0+6\right)\left(x-x_0\right)$, или $y=x_0^2+7-\left(2x_0+6\right)x$.

$y_1=y\left(x_1\right)=x_0^2+7-\left(2x_0+6\right)\left(-5\right)$; $y_2=y\left(x_2\right)=x_0^2+7-\left(2x_0+6\right)\cdot 1$.

Полученная фигура – трапеция, площадь которой равна

$$S\left(x_0\right)=0{,}5\left(y_1+y_2\right)\ \left(x_2-x_1\right)=\left(x_0^2+7-\left(2x_0+6\right)\left(-2\right)\right)6=6\left(x_0^2+4x_0+19\right).$$

$S'\left(x_0\right)=6\left(2x_0+4\right)=0,\quad x_0=-2$. $\min S\left(x_0\right)=S\left(-2\right)=6\left(4-8+19\right)=90$.

Ответ: 90 кв. ед.

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений $y=\dfrac{x+|x|}{x};\ (x-a)^2=y+a$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

Решение:

I. При $x>0$ $y=2,\quad x^2-2ax+a^2-a-2=0$ (*). Уравнение (*) имеет два различных

положительных корня $x_{1,2}=a\pm\sqrt{a+2}$, если: $\begin{cases} D/4=a+2>0, \\ a>0, \\ a^2-a-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-2, \\ a>0, \\ \left[\begin{array}{l} a<-1, \\ a>2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow a>2$.

Уравнение (*) имеет один положительный корень $x_{1,2}=a+\sqrt{a+2}$, если: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D=0, \\ a>0, \end{cases} \\ a^2-a-2<0, \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=-1, \\ a=2 \end{array}\right. \\ a>0 \end{cases} \end{array}\right.$

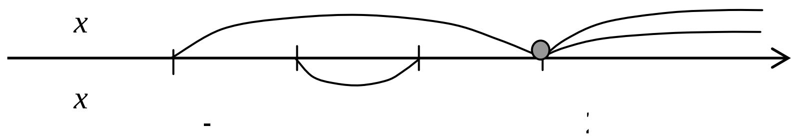
$\Leftrightarrow -1<a\le 2$.

II. При $x<0,\ y=0,\ x^2-2ax+a^2-a=0$ (**). Уравнение (**) не может иметь двух

отрицательных корней, так как система неравенств $\begin{cases} D/4=a>0, \\ a<0, \\ a^2-a>0. \end{cases}$ решений не имеет.

Уравнение (**) имеет один отрицательный корень $x=a-\sqrt{a}$, если

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D/4=a=0, \\ a<0, \end{cases} \\ a^2-a<0, \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=0, \\ a=1 \end{array}\right. \\ a<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 0<a<1$



Ответ: при $a\in(-1;0]\cup[1;2]$ $x=a+\sqrt{a+2},\ y=2$;

при $(0;1)$ $x_1=a+\sqrt{a+2},\ y_1=2;\ x_2=a-\sqrt{a};\ y_2=0$;

при $a\in(2;+\infty)$ $x_{1,2}=a\pm\sqrt{a+2},\ y_{1,2}=2$.

10. Основанием пирамиды $TABCD$ служит прямоугольник со сторонами $AB=12$ и $AD=4$, а боковые ребра соответственно равны $TA=3$, $TD=5$, $TC=13$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину T, центр симметрии основания и точку M, лежащую на ребре BC? На какие части делит точка M ребро BC в этом случае?

Решение:

При построении чертежа следует учесть следующее.

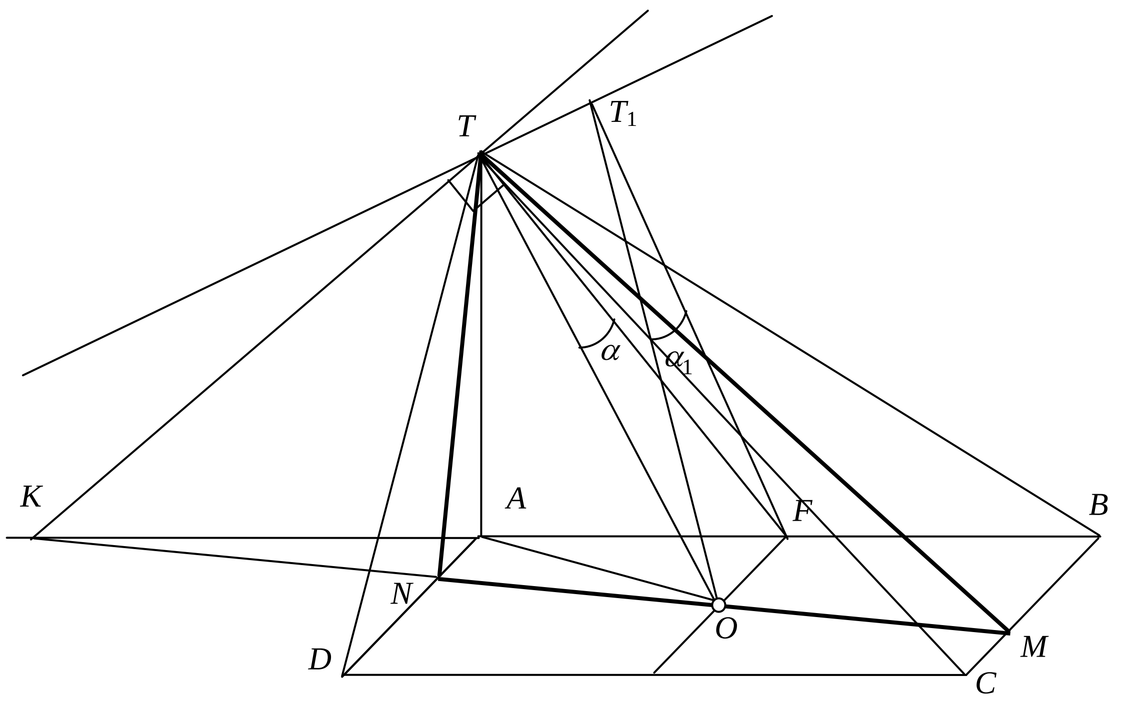
$TA^2 + AD^2 = TD^2, \left(3^2 + 4^2 = 5^2\right) \Rightarrow \angle TAD = \pi/2$

$AB = DC = 12$

$DC^2 + TD^2 = TC^2, \left(12^2 + 5^2 = 13^2\right) \Rightarrow \angle TDC = \pi/2$

$DC \perp TAD,\ AB \perp TAD,\ \angle TAB = \pi/2$

Следовательно, $TA \perp ABCD$.



При любом положении точки M на стороне BC грань TAB является ортогональной проекцией сечения TMN. Площадь сечения будет наименьшей, если наименьшим будет угол между секущей плоскостью и гранью TAB. Так как секущая плоскость проходит через центр симметрии основания O и вершину пирамиды T, то отрезок OT является наклонной к плоскости грани TAB, и наименьшим возможным углом будет $\angle OTF$, где $OF \perp TAB,\ F \in AB$. Линия пересечения секущей плоскости и плоскости грани TAB $TK \perp TF$ и пересекает прямую AB в точке K. Если условие $TK \perp TF$ не выполнено, то $FT_1 < FT,\ \mathrm{tg}\alpha_1 > \mathrm{tg}\alpha,\ \cos\alpha_1 < \cos\alpha$ и $\dfrac{S_{\Delta ATB}}{\cos\alpha_1} > \dfrac{S_{\Delta ATB}}{\cos\alpha}$.

Прямая, проведенная через точки K и O, пересекает ребро AD в точке N и ребро BC в точке M, ΔNTM – искомое сечение.

Если обозначить $AB = a,\ BC = b,\ TA = c$, то $TF = \sqrt{(a/2)^2 + c^2}$;

$$TO = \sqrt{TF^2 + OF^2} = \sqrt{(a/2)^2 + c^2 + (b/2)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 4c^2}\Big/2,\ \cos\angle OTF = \frac{TF}{TO} = \frac{\sqrt{a^2 + 4c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + 4c^2}}.$$

$$S_{\Delta NTM} = \frac{S_{\Delta ATB}}{\cos\alpha} = \frac{ac\sqrt{a^2 + b^2 + 4c^2}}{2\sqrt{a^2 + 4c^2}} = \frac{ac\sqrt{(a/2)^2 + (b/2)^2 + c^2}}{2\sqrt{(a/2)^2 + c^2}}.$$

В ΔKTF $\angle KTF = 90°$, $AK = AT^2\big/AF = 2c^2\big/a$. $BK = AK + AB = \dfrac{2c^2}{a} + a$.

Точка M делит отрезок BC в отношении $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{BM}{AN} = \dfrac{BK}{AK} = \dfrac{a^2 + 2c^2}{2c^2} = 1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{a^2}{c^2}$.

AB	BC	TA	TF	TO	$\cos\alpha$	S_{NTM}	$BM{:}MC$	BM	MC
12	4	3	$3\sqrt{5}$	7	$3\sqrt{5}\big/7$	$42\big/\sqrt{5}$	9:1	18/5	9/5