Первый (заочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету

«Математика», осень 2016 г.

10 КЛАСС

1. Буратино, Карабас-Барабас и Дуремар бегают по тропинке вокруг круглого пруда. Они стартуют одновременно в одной точке, Буратино бежит в одну сторону, а Карабас-Барабас и Дуремар в другую. Буратино бегает в три раза быстрее Дуремара и в четыре раза быстрее Карабаса-Барабаса. После того, как Буратино встретил Дуремара, через 150 метров он встретил Карабаса-Барабсаса. Какова длина тропинки вокруг пруда?

*(*15 *баллов)*

2. Известно, что a, b и c - натуральные числа, $НОК(a,b)=945$, $НОК(b,c)=525$. Чему может равняться $НОК(a,c)$?

(15 баллов)

3. На плоскости отмечены 3 различные точки M, G и T так, что фигура, составленная из точек M, G и T, не имеет ни одной оси симметрии. Постройте на этой плоскости такую точку U, чтобы фигура, составленная из точек M, G, T и U, имела хотя бы одну ось симметрии. Сколько существует различных таких точек в данной плоскости?

(15 баллов)

4. При каких значениях a и b уравнения $2x^3+ax-12=0$ и $x^2+bx+2=0$ имеют два общих корня?

(15 баллов)

5. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{2016\frac{1}{2}+x}+\sqrt{2016\frac{1}{2}+y}=114 \\ \sqrt{2016\frac{1}{2}-x}+\sqrt{2016\frac{1}{2}-y}=56 \end{cases}$.

(20 баллов)

6. Около равнобедренного треугольника с углом 45^0 при вершине описана окружность. Вторая окружность касается первой внутренним образом и двух боковых сторон данного треугольника. Расстояние от центра второй окружности до данной вершины треугольника равно 4 см. Найдите расстояние от этого центра до центра окружности, вписанной в данный треугольник.

(20 баллов)

Решение задач заочного тура 10 класс.

Задача 1. Буратино, Карабас-Барабас и Дуремар бегают по тропинке вокруг круглого пруда. Они стартуют одновременно в одной точке, Буратино бежит в одну сторону, а Карабас-Барабас и Дуремар в другую. Буратино бегает в три раза быстрее Дуремара и в четыре раза быстрее Карабаса-Барабаса. После того, как Буратино встретил Дуремара, через 150 метров он встретил Карабаса-Барабсаса. Какова длина тропинки вокруг пруда?

Решение:

Пусть длина тропинки S.

Так как Буратино бегает в три раза быстрее Дуремара, то к моменту их встречи Буратино пробежал три четверти круга (3/4 S), а Дуремар четверть. Так как Буратино бегает в четыре раза быстрее Карабаса-Барабаса, то к моменту их встречи Буратино пробежал четыре пятых круга, а Карабас-Барабас пятую часть (1/5 S).

Расстояние между точками встреч 150 метров. Получаем равенство:

$$\frac{3}{4}S + 150 + \frac{1}{5}S = S$$

$$S = 3000$$

Ответ: 3000 метров.

Задача 2. Известно, что a, b и c - натуральные числа, $НОК(a,b) = 945$, $НОК(b,c) = 525$. Чему может равняться $НОК(a,c)$?

Решение:

Разложим числа на простые множители, так как 3^3 встречается только в $НОК(a,b)$, следовательно $a \vdots 3^3$, аналогично получаем, что $b \vdots 5^2$

$$\begin{cases} НОК(a,b) = 945 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \\ НОК(b,c) = 525 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \vdots 3^3 \\ b \vdots 5^2 \end{cases} \Rightarrow НОК(a,c) \vdots (3^3 \cdot 5^2).$$

Заметим, что

$$\begin{cases} НОК(a,b,c) \vdots НОК(a,b) \\ НОК(a,b,c) \vdots НОК(b,c) \\ НОК(a,b,c) \vdots НОК(a,c) \end{cases} \Rightarrow НОК(a,b,c) \vdots НОК(945,525) \Rightarrow$$

$$НОК(a,b,c) \vdots (3^3 \cdot 5^2 \cdot 7).$$

Учитывая три факта: $\begin{cases} НОК(a,b,c)\vdots(3^3\cdot5^2\cdot7) \\ НОК(a,b,c)\vdots НОК(a,c) \\ НОК(a,c)\vdots(3^3\cdot5^2) \end{cases}$, получаем, что

$НОК(a,c)=3^3\cdot5^2$, например, при $a=3^3\cdot5,\ b=7\ ,c=3\cdot5^2$ или

$НОК(a,c)=3^3\cdot5^2\cdot7$, например, при $a=3^3\cdot5,\ b=7\ ,c=3\cdot5^2\cdot7$

Ответ: 675 или 4725

Задача 3. На плоскости отмечены 3 различные точки M, G и T так, что фигура, составленная из точек M, G и T, не имеет ни одной оси симметрии. Постройте на этой плоскости такую точку U, чтобы фигура, составленная из точек M, G, T и U, имела хотя бы одну ось симметрии. Сколько существует различных таких точек в данной плоскости?

Решение:

Если точки M, G и T являются вершинами прямоугольного треугольника, то таких точек 5, иначе 6. Действительно 3 таких точки – это точки симметричные данным относительно прямой, содержащей две другие, т.к. все 3 точки не лежат на одной прямой (по условию). Например, симметричная M относительно прямой GT и т.д. Еще 3 таких точки – это точки симметричные данным относительно прямой, являющейся серединным перпендикуляром к отрезку с вершинами в двух других. Например, симметричная M относительно серединного перпендикуляра к отрезку GT и т.д. Для прямоугольного треугольника две точки из трех совпадают.

Задача 4. При каких значениях a и b уравнения $2x^3+ax-12=0$ и $x^2+bx+2=0$ имеют два общих корня?

Решение:

Пусть x_0 - общий корень двух уравнений, то есть выполняются следующие равенства $\begin{cases} 2x_0^{\ 3}+ax_0-12=0 \\ x_0^{\ 2}+bx_0+2=0 \end{cases}$.

Заметим, что $x_0=0$ не является решением квадратного уравнения, и домножим обе части этого равенства на $2x_0$.

$$\begin{cases} 2x_0^{\ 3}+ax_0-12=0 \\ 2x_0^{\ 3}+2bx_0^{\ 2}+4x_0=0 \end{cases}.$$

Вычтем из нижнего равенства верхнее, получим $2bx_0^{\ 2}-ax_0+4x_0+12=0$,

Заметим, что при $b=0$ исходное квадратное уравнение не имеет решений, домножим это уравнение на $2b$, получим второе равенство в системе:

$$\begin{cases} 2bx_0{}^2 - ax_0 + 4x_0 + 12 = 0 \\ 2bx_0{}^2 + 2b^2x_0 + 4b = 0 \end{cases}.$$

Вычтем из одного равенства другое.

$$(2b^2 + a - 4)x_0 + 4b - 12 = 0. \quad (*)$$

Для того, чтобы исходная система имела два общих корня, уравнение $(*)$ должно иметь два различных корня, это верно при условии:

$\begin{cases} 2b^2 + a - 4 = 0 \\ 4b - 12 = 0 \end{cases}$, решаем систему, получаем $\begin{cases} a = -14 \\ b = 3 \end{cases}$.

Подставляем полученные значения параметров в исходную систему, выполняем проверку:

$\begin{cases} 2x^3 - 14x - 12 = 0 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases}$, корни квадратного уравнения -1 и -2 являются также и корнями первого уравнения.

Ответ: $a = -14$, $b = 3$.

Задача 5. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{2016\frac{1}{2} + x} + \sqrt{2016\frac{1}{2} + y} = 114 \\ \sqrt{2016\frac{1}{2} - x} + \sqrt{2016\frac{1}{2} - y} = 56 \end{cases}$.

Решение:

Воспользуемся неравенством $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$ (среднее квадратическое двух чисел больше их среднего арифметического). Заметим, что правая часть неравенства равна левой при равенстве значений a и b.

Приняв один из корней равенства за a, а другой за b, получим следующие неравенства:

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{2016\frac{1}{2} + x + 2016\frac{1}{2} + y}{2}} \geq \dfrac{114}{2} \\ \sqrt{\dfrac{2016\frac{1}{2} - x + 2016\frac{1}{2} - y}{2}} \geq \dfrac{56}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} \sqrt{\dfrac{4033 + x + y}{2}} \geq \dfrac{114}{2} \\ \sqrt{\dfrac{4033 - x - y}{2}} \geq \dfrac{56}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{4033}{2} + \dfrac{x+y}{2} \geq 57^2 \\ \dfrac{4033}{2} - \dfrac{x+y}{2} \geq 28^2 \end{cases}$$

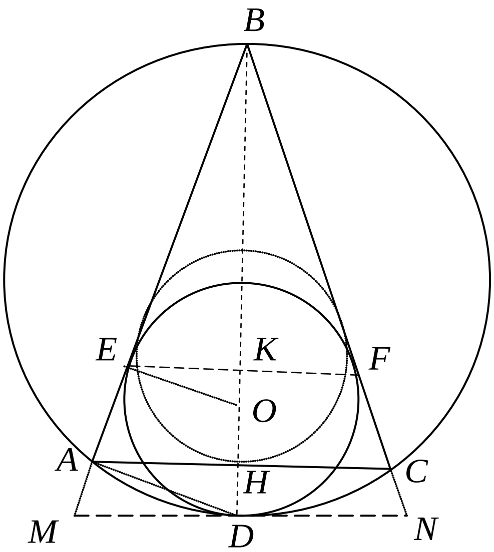
$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} \geq 1232{,}5 \\ \dfrac{x+y}{2} \leq 1232{,}5 \end{cases}$, следовательно, $\dfrac{x+y}{2} = 1232{,}5$.

В этом случае оба неравенства превращаются в равенства, значит $2016\frac{1}{2} \pm x = 2016\frac{1}{2} \pm y$, получаем, что $x = y = 1232,5$

Ответ: $(1232\frac{1}{2};1232\frac{1}{2})$

Задача 6. Около равнобедренного треугольника с углом 45^0 при вершине описана окружность. Вторая окружность касается первой внутренним образом и двух боковых сторон данного треугольника. Расстояние от центра второй окружности до данной вершины треугольника равно 4 см. Найдите расстояние от этого центра до центра окружности, вписанной в данный треугольник.

Решение:



1. Проведем BD – диаметр первой (описанной) окружности. Пусть E, F – точки касания второй окружности с боковыми сторонами данного треугольника, а D – с первой окружностью. Тогда BH – высота данного треугольника ABC, где H – точка пересечения BD и AC. По свойству вписанного угла: угол BAD – прямой (опирается на диаметр). Но угол BEO тоже прямой (т.к. BA – касательная ко второй окружности, а точка O – ее центр). Следовательно, треугольники ABD и EBO – подобные по двум углам (угол B – общий).

2. Так как BD - ось симметрии треугольника, то EF – перпендикулярна BD. По свойству прямоугольного треугольника OBE: $\cos\angle OBE = \frac{BE}{BO} = \frac{BK}{BE}$ $\Rightarrow \cos^2\angle OBE = \frac{BE}{BO}\cdot\frac{BK}{BE} = \frac{BK}{BO}$. Аналогично для треугольника DBA: $\cos^2\angle OBE = \frac{BA}{BD}\cdot\frac{BH}{BA} = \frac{BH}{BD}$.

3. Проведем касательную MN к первой окружности в точке D и продолжим AB и BC до пересечения с ней. Тогда треугольник MBN подобен (гомотетичен относительно вершины B) треугольнику ABC. При данной гомотетии точа H переходит в точку D, а точка К в точку O).

4. Для треугольника MBN вторая окружность является вписанной в него, следовательно, центр третьей (вписанной в ABC) окружности совпадает с точкой К, а искомое в задаче расстояние – это

$$KO = BO - BK = BO(1-\cos^2\angle OBE) = BO\sin^2\angle OBE = 4\cdot\frac{1-\cos 45^0}{2} = 2-\sqrt{2}.$$

Ответ: $2-\sqrt{2}$.

Критерии проверки заданий 10-го класса

Задание	1	2	3	4	5	6	Итого
Баллы	15	15	15	15	20	20	100

Задача 1.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При правильном ответе есть замечания к четкости его изложения и обоснования.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 2.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При правильном ответе есть замечания к четкости его изложения и обоснования.
8	Верно приведен один из вариантов (треугольник прямоугольный или непрямоугольный).
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 3.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При правильном ответе есть замечания к четкости его изложения и обоснования, например, не приведены примеры чисел при правильно найденных НОК
8	Верно найден один из вариантов решения.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 4.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При правильном ответе есть замечания к четкости его изложения и обоснования.

8	Задача верно сведена к исследованию линейного уравнения.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 5.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
15	При правильном ответе есть замечания к четкости его изложения и обоснования.
8	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 6.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
15	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
8	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.