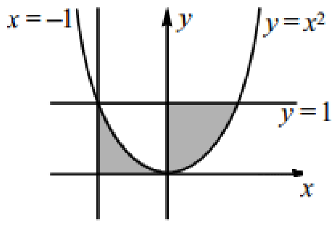
Первый (отборочный) этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету
«Информатика», осень 2016 г.
Вариант № 1

Задача 1 (8 баллов). Переведите шестнадцатеричное число A16 = 13CE,D2 в десятичную систему счисления. Ответ можно дать с точностью до 3-го знака после запятой.

Задача 2 (8 баллов). На любом языке программирования запишите условие, которое является истинным, когда точка с координатами *x*, *y* попадает в заштрихованные участки плоскости, включая их границы.



Задача 3 (8 баллов). Дано выражение, в котором используются поразрядные операции над 8-ми разрядными целыми числами без знака. В выражении используются круглые скобки и следующие знаки операций: поразрядное НЕ (~), поразрядное И (&), поразрядное ИЛИ (|), поразрядный сдвиг влево (<<), поразрядный сдвиг вправо (>>). Операции имеют следующие уровни приоритета: уровень 1 (~), уровень 2 (<< и >>), уровень 3 (&), уровень 4 (|). Вычислить значение следующего выражения: (b << 2 | b >> 2) | ~((a & b) >> 2 | (a | b) << 2) для a = 60 и b = 195. Ответ дать в двоичной и десятичной формах.

Задача 4 (8 баллов). Упростить логическую функцию:

$(A \rightarrow (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \vee \neg(A \rightarrow C))$.

Ответ должен содержать не более двух логических операций.

Задача 5 (8 баллов). Сколько существует положительных целых чисел, меньших 2003, которые a) делятся и на 4, и на 5, и на 6? b) делятся или на 4, или на 5, или на 6? c) не делятся ни на 4, ни на 5, ни на 6?

Задача 6 (8 баллов). Дана префиксная запись арифметического выражения: + a * x + b * x + c * x + d * x + e x. Постройте бинарное дерево, задающее это выражение, покажите порядок обхода вершин дерева, позволяющий вычислить значение этого выражения, вычислите значение этого выражения для x=3, a=5, b=4, c=3, d=2, e=1.

Задача 7 (12 баллов). Функция E определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом: $E(n, 0) = 1$ для $n >= 0$; $E(n, k) = (n-k)*E(n-1, k-1) + (k+1)*E(n-1, k)$ для $0 < k < n$. Очевидно, что $E(n, n) = 0$ при $n > 0$; $E(n, n-1) = 1$ при $n > 0$; $E(n, k) = 0$ при $k > n$. Вычислить вручную E(6, 4).

Задача 8 (12 баллов). Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$((\neg x_1 \to y_1) \wedge z_1) = ((\neg x_2 \vee y_2) \to z_2)$$

$$((\neg x_2 \to y_2) \wedge z_2) = ((\neg x_3 \vee y_3) \to z_3)$$

где $x_1, \ldots, x_3, y_1, \ldots, y_3$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнены данные равенства. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Задача 9 (12 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal

```
var a: array[0..7] of integer;
var j, i1, i2, i3, index: integer;
var s: array[0..39] of char
begin
for j := 0 to 7 do a[j] := 0;
s := 'HTHTHHHTHHHTHTHHHHTTTHTTTTTTHHTTTTHTHHHHT';
for j := 0 to 37 do begin
if ( s[j] = 'H' ) then i1 := 4 else i1 := 0;
if ( s[j+1] = 'H' ) then i2 := 2 else i2 := 0;
if ( s[j+2] = 'H' ) then i3 := 1 else i3 := 0;
index := i1 + i2 + i3;
inc(a[index]);
end;
for index := 0 to 7 do write(a[index]:5);
writeln;
end.
```

C

```
int a[8] = { 0 };
int main(void) {
int j, index;
char s[] = "
HTHTHHHTHHHTHTHHHHTTTHTTTTTTHHTTTTHTHHHHT";
for (j = 0; j < 38; ++j) {
index = ( s[j] == 'H' ? 4 : 0 )
+ ( s[j+1] == 'H' ? 2 : 0 )
+ ( s[j+2] == 'H' ? 1 : 0 );
a[index]++;
}
for (unsigned index = 0; index < 8; ++index)
printf("%5d", a[index]);
printf("\n");
return 0;
}
```

Задача 10 (16 баллов). Постройте матрицу **D** после выполнения следующей программы и вычислите сумму элементов строго ниже побочной диагонали:

Pascal

```
const n=5;
var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
var i, j, k, l: integer;
begin
k:=0; l:=0;
for i:=0 to n-1 do
for j:=0 to n-1 do
if ((i+j) mod 2 <> 0) then
begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end
else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end;
for k:=0 to 1 do
for j:=0 to n-1 do
for i:=0 to n-1 do
D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]);
end.
```

C

```
#define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y))
const int n=5;
int D[n][n];
int main() {
int i, j, k=0, l=0;
for (i=0; i<n; i++)
for (j=0; j<n; j++)
if ((i+j) % 2 != 0) D[i][j]=--k;
else D[i][j]=++l;
for (k=0; k<2; k++)
for (j=0; j<n; j++)
for (i=0; i<n; i++)
D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]);
return 0;
}
```

Решение варианта 4

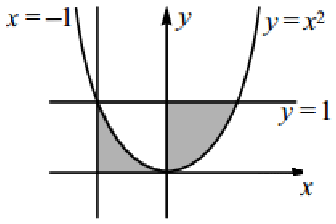
Задача 1 (8 баллов). Переведите шестнадцатеричное число A_{16} = 13CE,D2 в десятичную систему счисления. Ответ можно дать с точностью до 3-го знака после запятой.

Решение.

13CE,D2 = $1*16^3 + 3*16^2 + 12*16^1 + 14*16^0 + 13*16^{-1} + 2*16^{-2}$ = 4096 + 768 + 192 + 14 + 0,8125 + 0,0078125 = 5070 + 0,8203125 = 5070,8203125.

Ответ: 5070,8203125.

Задача 2 (8 баллов). Запишите одно единственное условие, которое является истинным, когда точка с координатами x, y попадает в заштрихованные участки плоскости, включая их границы.



Решение.

Используя нотацию, принятую в языке C, будем иметь

((x <= 0 && x >= -1) && (y >= 0 && y <= 1) && (y <= x*x)) ||

((x >= 0) && (y >= 0 && y <= 1) && (y >= x*x))

Задача 3 (8 баллов). Дано выражение, в котором используются поразрядные операции над 8-ми разрядными целыми числами без знака. В выражении используются круглые скобки и следующие знаки операций: поразрядное НЕ (~), поразрядное И (&), поразрядное ИЛИ (|), поразрядный сдвиг влево (<<), поразрядный сдвиг вправо (>>). Операции имеют следующие уровни приоритета: уровень 1 (~), уровень 2 (<< и >>), уровень 3 (&), уровень 4 (|). Вычислить значение следующего выражения: (b << 2 | b >> 2) | ~((a & b) >> 2 | (a | b) << 2) для a = 60 и b = 195. Ответ дать в двоичной и десятичной формах.

Решение.

1) a = $3c_{16} = 00111100_2$
2) b = $c3_{16} = 11000011_2$
3) b << 2 = $c_{16} = 00001100_2$
4) b >> 2 = $30_{16} = 00110000_2$
5) b << 2 | b >> 2) = $3c_{16} = 00111100_2$
6) a & b = $0_{16} = 00000000_2$
7) (a & b) >> 2 = $0_{16} = 00000000_2$

8) $a \mid b = ff_{16} = 11111111_2$

9) $(a \mid b) << 2 = fc_{16} = 11111100_2$

10) $(a \& b) >> 2 \mid (a \mid b) << 2) = fc_{16} = 11111100_2$

11) $\sim((a \& b) >> 2 \mid (a \mid b) << 2) = 3_{16} = 00000011_2$

12) $(b << 2 \mid b >> 2) \mid \sim((a \& b) >> 2 \mid (a \mid b) << 2) = 3f_{16} = 00111111_2 = 63_{10}$.

Ответ: $00111111_2 = 63_{10}$

Задача 4 (8 баллов). Упростить логическую функцию:

$(A \rightarrow (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \vee \neg(A \rightarrow C))$. Ответ должен содержать не более двух логических операций.

Ответ: $\neg A \vee B$.

Задача 5 (8 баллов). Сколько существует положительных целых чисел, меньших 2003, которые a) делятся и на 4, и на 5, и на 6? b) делятся или на 4, или на 5, или на 6? c) не делятся ни на 4, ни на 5, ни на 6?

Решение.

Пусть универсум **U** будет множеством всех неотрицательных целых чисел, меньших 2003. Следовательно, |**U**| = 2003.

Имеется всего $\lfloor 2003/4 \rfloor = 500$ целых чисел, которые делятся на 4.

Имеется всего $\lfloor 2003/5 \rfloor = 400$ целых чисел, которые делятся на 5.

Имеется всего $\lfloor 2003/6 \rfloor = 333$ целых чисел, которые делятся на 6.

Имеется всего $\lfloor 2003/20 \rfloor = 100$ целых чисел, которые делятся на 4 и на 5.

Имеется всего $\lfloor 2003/30 \rfloor = 66$ целых чисел, которые делятся на 5 и на 6.

Имеется всего $\lfloor 2003/12 \rfloor = 166$ целых чисел, которые делятся на 4 и на 6.

Имеется всего $\lfloor 2003/60 \rfloor = 33$ целых числа, которые делятся на 4 и на 5 и на 6.

Следовательно, количество чисел, которые делятся на 4 или на 5 или на 6, равно 500 + 400 + 333 – 100 – 66 – 166 + 33 = 934. Количество чисел, которые не делятся ни на одно из указанных целых чисел, равно 2003 – 934 = 1069.

Ответ: a) 33; b) 934; c) 1069.

Задача 6 (8 баллов). Дана префиксная запись арифметического выражения: + a * x + b * x + c * x + d * x + e x. Постройте бинарное дерево, задающее это выражение, покажите порядок обхода вершин дерева, позволяющий вычислить значение этого выражения, вычислите значение этого выражения для x=3, a=5, b=4, c=3, d=2, e=1.

Решение.

Линейная форма представления бинарного дерева выражения будет иметь вид ((((((((((e+x)*x)+d)*x)+c)*x)+b)*x)+a). Для наглядности дерево можно изобразить по правилу «корень вверху, листья внизу». Подставляя значения, получим ((((((((((1+3)*3)+2)*3)+3)*3)+4)*3)+5) = 422.

Ответ: 422.

Задача 7 (12 баллов). Функция E определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом: E(n, 0) = 1 для n >= 0; E(n, k) = (n-k)*E(n-1, k-1) + (k+1)*E(n-1, k) для 0 < k < n. Очевидно, что E(n, n) = 0 при n > 0; E(n, n-1) = 1 при n > 0; E(n, k) = 0 при k > n. Вычислить вручную E(6, 4).

Решение.

Производим вычисления по формуле и результаты заносим в таблицу размером 7x7. В итоге будет получен следующий треугольник чисел:

n	k						
	0	1	2	3	**4**	5	6
0	1						
1	1	0					
2	1	1	0				
3	1	4	1	0			
4	1	11	11	1	0		
5	1	26	66	26	1	0	
6	1	57	302	302	**57**	1	0

Ответ: E(6, 4) = 57.

Задача 8 (12 баллов). Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$((\neg x_1 \rightarrow y_1) \wedge z_1) = ((\neg x_2 \vee y_2) \rightarrow z_2)$$

$$((\neg x_2 \rightarrow y_2) \wedge z_2) = ((\neg x_3 \vee y_3) \rightarrow z_3)$$

где $x_1, \ldots, x_3, y_1, \ldots, y_3$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнены данные равенства. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение.

1) перепишем систему уравнений в более понятном виде:

$$(\bar{x}_1 \rightarrow y_1) \cdot z_1 = (\bar{x}_2 + y_2) \rightarrow z_2$$
$$(\bar{x}_2 \rightarrow y_2) \cdot z_2 = (\bar{x}_3 + y_3) \rightarrow z_3$$

2) рассмотрим первое уравнение

$$(\bar{x}_1 \to y_1) \cdot z_1 = (\bar{x}_2 + y_2) \to z_2$$

его левая часть равна 1, если $(x_1, y_1) = (0,1), (1,0), (1,1)$ при $z_1 = 1$; таким образом, есть всего 3 различных варианта, дающих 1 в левой части:

$$(x_1, y_1, z_1) = (011), (101), (111)$$

3) в левой части первого уравнения 3 переменных, поэтому всего есть $2^3 = 8$ комбинаций этих данных; в оставшихся 5 комбинациях левая часть первого уравнения равна 0

	1-е уравнение	
обе части равны…	$x_1y_1z_1$	$x_2y_2z_2$
1	011 101 111	
0	000 001 010 100 110	

4) аналогично находим, что правая часть первого уравнения равна 0 при 3-х комбинациях переменных $(x_2, y_2, z_2) = (000), (010), (110)$, причём каждой из них соответствует 5 троек (x_1, y_1, z_1); эта же правая часть равна 1 для пяти остальных комбинаций (x_2, y_2, z_2), причём каждой из них соответствует 3 комбинации (x_1, y_1, z_1):

	1-е уравнение	
обе части равны…	$x_1y_1z_1$	$x_2y_2z_2$
1	011 101 111	001 (3) 011 (3) 100 (3) 101 (3) 111 (3)
0	000 001 010 100 110	000 (5) 010 (5) 110 (5)

5) поэтому первое уравнение имеет 5·3 + 3·5 = 30 решений: 15 решений, при которых обе части равны 0, и 15 решений, при которых обе части равны 1

6) теперь подключаем второе уравнение: выпишем в следующий столбец все комбинации (x_2, y_2, z_2), при которых его левая часть равна 0, и в следующую строку – все комбинации (x_2, y_2, z_2), при которых его левая часть равна 1, указав соответствующее число решений первого уравнения:

	1-е уравнение		2-е уравнение	
обе части равны…	$x_1y_1z_1$	$x_2y_2z_2$	$x_2y_2z_2$	$x_3y_3z_3$
1	011 101 111	001 (3) 011 (3) 100 (3) 101 (3) 111 (3)	011 (3) 101 (3) 111 (3)	001 (9) 011 (9) 100 (9) 101 (9) 111 (9)
0	000 001 010 100 110	000 (5) 010 (5) 110 (5)	000 (5) 001 (3) 010 (5) 100 (3) 110 (5)	000 (21) 010 (21) 110 (21)

таким образом, на каждую комбинацию (x_3, y_3, z_3), при которых правая часть второго уравнения равна 1, приходится 3 + 3 + 3 = 9 допустимых троек (x_2, y_2, z_2), а на каждую комбинацию (x_3, y_3, z_3), при которых правая часть второго уравнения равна 0, приходится 5 + 3 + 5 + 3 + 5 = 21 допустимая тройка (x_2, y_2, z_2).

	1-е уравнение		2-е уравнение	
обе части равны…	$x_1y_1z_1$	$x_2y_2z_2$	$x_2y_2z_2$	$x_3y_3z_3$
1	011 101 111	001 (3) 011 (3) 100 (3) 101 (3) 111 (3)	011 (3) 101 (3) 111 (3)	
0	000 001 010 100 110	000 (5) 010 (5) 110 (5)	000 (5) 001 (3) 010 (5) 100 (3) 110 (5)	

несложно проверить, что 5 троек (x_3, y_3, z_3) дают 1 в правой части второго уравнения, а оставшиеся 3 тройки – 0:

	1-е уравнение		2-е уравнение	
обе части равны…	$x_1y_1z_1$	$x_2y_2z_2$	$x_2y_2z_2$	$x_3y_3z_3$
1	011 101 111	001 (3) 011 (3) 100 (3) 101 (3) 111 (3)	011 (3) 101 (3) 111 (3)	001 (9) 011 (9) 100 (9) 101 (9) 111 (9)
0	000 001 010 100 110	000 (5) 010 (5) 110 (5)	000 (5) 001 (3) 010 (5) 100 (3) 110 (5)	000 (21) 010 (21) 110 (21)

7) для получения ответа нужно сложить числа в скобках в последнем столбце таблицы:

8) 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 21 + 21 + 21 = 108

Ответ: 108.

Задача 9 (12 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal

```
var a: array[0..7] of integer;
var j, i1, i2, i3, index: integer;
var s: array[0..39] of char
begin
for j := 0 to 7 do a[j] := 0;
s := 'HTHTHHHTHHHTHTHHHHTTTHTTTTTHHTTTTHTHHHHT';
for j := 0 to 37 do begin
if ( s[j] = 'H' ) then i1 := 4 else i1 := 0;
if ( s[j+1] = 'H' ) then i2 := 2 else i2 := 0;
if ( s[j+2] = 'H' ) then i3 := 1 else i3 := 0;
index := i1 + i2 + i3;
inc(a[index]);
end;
for index := 0 to 7 do write(a[index]:5);
writeln;
end.
```

C

```
int a[8] = { 0 };
int main(void)
{
int j, index;
char s[] =  "
HTHTHHHTHHHTHTHHHHTTTHTTTTTHHTTTTHTHHHHT";
for (j = 0; j < 38; ++j) {
index = ( s[j] == 'H' ? 4 : 0 )
+ ( s[j+1] == 'H' ? 2 : 0 )
+ ( s[j+2] == 'H' ? 1 : 0 );
a[index]++;
}
for (unsigned index = 0; index < 8; ++index)
printf("%5d", a[index]);
printf("\n");
return 0;
}
```

Ответ: 6 3 4 5 3 6 5 6.

Задача 10 (16 баллов). Постройте матрицу **D** после выполнения следующей программы и вычислите сумму элементов строго ниже побочной диагонали:

Pascal

```
const n=5;
var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
var i, j, k, l: integer;
begin
k:=0; l:=0;
for i:=0 to n-1 do
for j:=0 to n-1 do
if ((i+j) mod 2 <> 0) then
begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end
else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end;
for k:=0 to 1 do
for j:=0 to n-1 do
for i:=0 to n-1 do
D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]);
end.
```

C

```
#define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y))
const int n=5;
int D[n][n];
int main() {
int i, j, k=0, l=0;
for (i=0; i<n; i++)
for (j=0; j<n; j++)
if ((i+j) % 2 != 0) D[i][j]=--k;
else D[i][j]=++l;
for (k=0; k<2; k++)
for (j=0; j<n; j++)
for (i=0; i<n; i++)
D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]);
return 0;
}
```

Решение.

Исходная матрица будет иметь вид:

1	-1	2	-2	3
-3	4	-4	5	-5
6	-6	7	-7	8
-8	9	-9	10	-10
11	-11	12	-12	13

Для k = 0 матрица D будет иметь вид:

1	-1	2	-2	3
-3	4	-4	5	-5
6	-6	7	-7	8
-8	9	-9	10	-10
11	-11	12	-12	13

Для k = 1 матрица D будет иметь вид:

-4	-5	-9	-10	-10
-7	-8	-12	-13	-13
-13	-14	-26	-27	-27
-16	-17	-29	-30	-30
-18	-19	-31	-32	-32

Итоговая матрица D будет иметь вид:

-4	-5	-9	-10	-10
-7	-8	-12	-13	-13
-13	-14	-26	-27	-27
-16	-17	-29	-30	-30
-18	-19	-31	-32	-32

Ответ: Сумма элементов итоговой матрицы D строго ниже побочной диагонали равна: -270