Заключительный этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика» в 2015 г.

Вариант № 12

1. Одновременно из пункта A в пункт B отправляется автомобиль со скоростью 90 $км/ч$, а из пункта B в пункт C — поезд со скоростью 60 $км/ч$. Через 2 часа после начала движения они оказались на наименьшем расстоянии друг от друга. Найдите расстояние между пунктами, если все три пункта равноотстоят друг от друга и связаны прямолинейными дорогами. (8 баллов)

2. Решите неравенство $\log_x(5x-4) > 2$. (8 баллов)

3. Некоторые натуральные числа образуют возрастающую геометрическую прогрессию с целочисленным знаменателем. Найдите эти числа, если их сумма равна 211. (8 баллов)

4. Решите уравнение $\sqrt[4]{1-\cos^7 15x\cos^2 9x} = \sin 9x$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\left(2^{x^2-6} - 4\cdot 2^{x+4}\right)\log_{\cos\pi x}(x^2-2x+1) \geq 0$. (10 баллов)

6. Найдите сумму целых чисел, которые принадлежат множеству значений функции $f(x) = \log_2(5\cos 2x + 11)$ при $x \in \left[1{,}25\left(\operatorname{arctg}(1/3)\right)\cos(\pi + \arcsin(-0{,}6));\ \operatorname{arctg} 2\right]$. (10 баллов)

7. На стороне AC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает стороны AB и BC в точках D и E соответственно. Угол EDC равен $30°$, площадь треугольника AEC равна $\sqrt{3}/2$, а площадь треугольника DBE относится к площади треугольника ABC как $1:2$. Найдите длину отрезка BO, если O — точка пересечения отрезков AE и CD. (12 баллов)

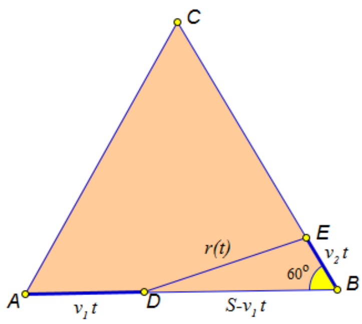
8. На прямой $y = -13/6$ найдите точку M, через которую проходят две касательные к графику функции $y = x^2/2$, угол между которыми равен $60°$. (12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений $(x-a)^2 = 9(y-x+a-2)$, $\log_{(x/2)}(y/2) = 1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (12 баллов)

10. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC с углом B, равным $90°$, и углом C, равным $30°$. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через центр боковой грани AA_1C_1C и вершину B и параллельной диагонали боковой грани AB_1, если расстояние от вершины C до секущей плоскости равно 2, а гипотенуза основания призмы равна 4? (12 баллов)

Решение варианта №12

1. Одновременно из пункта A в пункт B отправляется автомобиль со скоростью $90\,км/ч$, а из пункта B в пункт C — поезд со скоростью $60\,км/ч$. Через 2 часа после начала движения они оказались на наименьшем расстоянии друг от друга. Найдите расстояние между пунктами, если все три пункта равноотстоят друг от друга и связаны прямолинейными дорогами. (8 баллов)



Решение: Пусть $AB = BC = AC = S$. Обозначим расстояние между автомобилем и поездом через $r = r(t)$, где t — время от начала движения. Тогда по теореме косинусов имеем: $r^2 = (S-90t)^2 + (60t)^2 - 60t(S-90t)$. Для нахождения времени, при котором расстояние между автомобилем и поездом было наименьшим, вычислим производную функции $r^2 = r^2(t)$:

$(r^2)' = -2\cdot 90(S-90t) + 2\cdot 3600t - 60(S-90t) + 90\cdot 60t = -240S + 2(8100+3600+5400)t = 0$.

Так как наименьшее значение в процессе движения функция $r^2 = r^2(t)$ принимает при $t = 2$, то $-120S + (8100+3600+5400)\cdot 2 = 0$, и $S = 285$.

Ответ: 285 *км*.

2. Решите неравенство $\log_x(5x-4) > 2$.

Решение: $\log_x(5x-4) > 2$. ОДЗ: $x \in (4/5;1)\cup(1;+\infty)$. $\log_x \dfrac{x^2}{5x-4} < 0$.

1) $\begin{cases} 4/5 < x < 1 \\ 0 < x < 1, \\ \dfrac{x^2}{5x-4} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4/5 < x < 1, \\ x^2 - 5x + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4/5 < x < 1, \\ x < 1, \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow 4/5 < x < 1$.

2) $\begin{cases} 1 < x < +\infty, \\ \dfrac{x^2}{5x-4} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < +\infty, \\ x^2 - 5x + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < +\infty, \\ 1 < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 4$.

Ответ: $x \in (4/5;1)\cup(1;4)$.

3. Некоторые натуральные числа образуют возрастающую геометрическую прогрессию с целочисленным знаменателем. Найдите эти числа, если их сумма равна 211.

Решение: Если считать, что одно число образует возрастающую геометрическую прогрессию, то одно число 211 является решением задачи. По условию для некоторого натурального числа n справедливо равенство $b_1 + b_1q + b_1q^2 + \cdots + b_1q^{n-1} = 211$, или $b_1(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}) = 211$. Так как 211 — простое число (оно не делится на 2, 3, 5, 7, 11, 13,17), то $b_1 = 1,\ 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} = 211$ или $b_1 = 211,\ 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} = 1$. Второй случай не подходит. Следовательно, $b_1 = 1,\ q(1+q+q^2+\cdots+q^{n-2}) = 210$, $q(1+q+q^2+\cdots+q^{n-2}) = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$. Рассмотрим следующие случаи.

1) Если $n = 2$, то $q = 210$. Искомые числа: 1, 210.
2) Если $n = 3$, то $q^2 + q - 210 = 0$. Так как q - натуральное число, большее единицы, то $q = 14$. Искомые числа: 1, 14, 196.
3) Если $n \geq 4$, то $q(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2}) = 210$. Так как q - натуральное число, большее единицы, то $q^3 \leq q^{n-1} \leq 210$, $q \leq 5$, причем q является делителем числа $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Следовательно, q может принимать следующие значения: 2, 3, 5.
   1) Если $q = 2$, то $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-2} = 105$, $2^{n=1} - 1 = 105$, или $2^{n=1} = 106$, уравнение не имеет натуральных решений.
   2) Если $q = 3$, то $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-2} = 70$ $\dfrac{3^{n-1} - 1}{2} = 70$, $3^{n-1} = 141$, уравнение не имеет натуральных решений.
   3) Если $q = 5$, то $1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{n-2} = 42$, $\dfrac{5^{n-1} - 1}{4} = 42$, $5^{n-1} = 169$, уравнение не имеет натуральных решений.

Ответ: {211}, **{**1; 210} или **{**1; 14; 196}.

4. Решите уравнение $\sqrt[4]{1 - \cos^7 15x \cos^2 9x} = \sin 9x$. (8 баллов)

Решение: При условии $\sin 9x \geq 0$ обе части этого уравнения можно возвести в квадрат. При найденных ограничениях уравнение равносильно следующему:
$\sin^4 9x + \cos^7 15x \cos^2 9x - 1 = 0$, $(1 - \cos^2 9x)^2 + \cos^7 15x \cos^2 9x - 1 = 0$,
$-2\cos^2 9x + \cos^4 9x + \cos^7 15x \cos^2 9x = 0$, $\cos^2 9x(\cos^2 9x + \cos^7 15x - 2) = 0$. Таким образом, приходим к совокупности уравнений:
1) $\cos 9x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{\pi n}{9}$, $n \in Z$, с учетом условия $\sin 9x \geq 0$ имеем $x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2\pi n}{9}$, $n \in Z$.
2) $\cos^2 9x + \cos^7 15x - 2 = 0$, что равносильно системе уравнений $\begin{cases} \cos^2 9x = 1, \\ \cos^7 15x = 1, \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} 9x = \pi k, \\ 15x = 2\pi m, \end{cases}$ $k,\ m \in Z.$ Следовательно, $5k = 6m,\ k, m \in Z \Rightarrow m = 5s,\ k = 6s,\ s \in Z$
$\Rightarrow x = \dfrac{2\pi s}{3}$, $s \in Z$, что удовлетворяет условию $\sin 9x \geq 0$.

Таким образом, решения исходного уравнения: $x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2\pi n}{9},\ n \in Z,\ x = \dfrac{2\pi s}{3},\ s \in Z.$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2\pi n}{9},\ n \in Z,\ x = \dfrac{2\pi s}{3},\ s \in Z.$

5. Решите неравенство $\left(2^{x^2-6} - 4 \cdot 2^{x+4}\right)\log_{\cos \pi x}(x^2 - 2x + 1) \geq 0.$ (10 баллов)

Решение:
ОДЗ: $(x-1)^2 > 0,\ \cos \pi x > 0,\ \cos \pi x \neq 1,\ \Rightarrow\ x \in (-0{,}5 + 2k; 2k) \cup (2k; 0{,}5 + 2k)$, $k \in Z$.
Исходное неравенство на ОДЗ эквивалентно следующему
$(x^2 - x - 12)(\cos \pi x - 1)(x^2 - 2x) \geq 0 \ \Leftrightarrow\ (x-4)(x+3)(x-2)x \leq 0 \ \Rightarrow\ x \in [-3; 0] \cup [2; 4]$.
С учетом ОДЗ имеем $x \in (-2{,}5; -2) \cup (-2; -1{,}5) \cup (-0{,}5; 0) \cup (2; 2{,}5) \cup (3{,}5; 4)$.
Ответ: $x \in (-2{,}5; -2) \cup (-2; -1{,}5) \cup (-0{,}5; 0) \cup (2; 2{,}5) \cup (3{,}5; 4)$.

6. Найдите сумму целых чисел, которые принадлежат множеству значений функции $f(x)=\log_2(5\cos 2x+11)$ при $x\in[1{,}25(\operatorname{arctg}(1/3))\cos(\pi+\arcsin(-0{,}6));\ \operatorname{arctg}2]$. (10 баллов)

Решение:

Так как $\cos(\pi+\arcsin(-0{,}6))=\cos(\pi-\arcsin 0{,}6)=-\cos(\arcsin 0{,}6)=-0{,}8$, то $x\in[1{,}25(\operatorname{arctg}(1/3))\cos(\pi+\arcsin(-0{,}6));\ \operatorname{arctg}2]=[-\operatorname{arctg}(1/3);\ \operatorname{arctg}2]$. Следовательно, $2x\in[-2\operatorname{arctg}(1/3);\ 2\operatorname{arctg}2]$. Поскольку $0<\operatorname{arctg}(1/3)<\operatorname{arctg}1=\pi/4$, $0<2\operatorname{arctg}(1/3)<\pi/2$, $-\pi/2<-2\operatorname{arctg}(1/3)<0$, а также $\pi/4<\operatorname{arctg}2<\pi/2$, $\pi/2<2\operatorname{arctg}2<\pi$, то $\cos 2x\in[\cos(2\operatorname{arctg}2);1]$. Используя формулу $\cos 2\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, получаем $\cos(2\operatorname{arctg}2)=-0{,}6$, и $\cos 2x\in[-0{,}6;1]$. Отсюда имеем $5\cos 2x+11\in[8;16]$, и $f(x)=\log_2(5\cos 2x+11)\in[\log_2 8;\ \log_2 16]=[3;4]$.

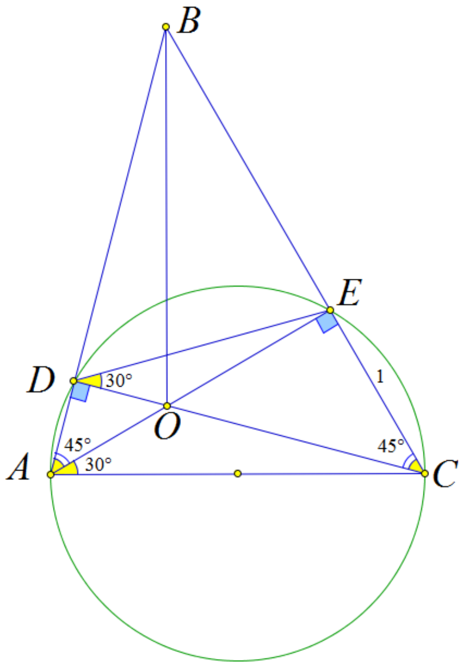
Отрезок $[3;4]$ является множеством значений функции $f(x)=\log_2(5\cos 2x+11)$ при $x\in[1{,}25(\operatorname{arctg}(1/3))\cos(\pi+\arcsin(-0{,}6));\ \operatorname{arctg}2]$.

Сумма целых чисел из отрезка $[3;4]$ равна 7.

Ответ: $E_f=[3;4]$, сумма целых чисел равна 7.

7. На стороне AC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает стороны AB и BC в точках D и E соответственно. Угол EDC равен 30°, площадь треугольника AEC равна $\sqrt{3}/2$, а площадь треугольника DBE относится к площади треугольника ABC как $1:2$. Найдите длину отрезка BO, если O — точка пересечения отрезков AE и CD.

Решение:



1) $\angle EDC=\angle EAC=30^\circ$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу);

2) AC - диаметр окружности $\Rightarrow \Delta AEC$ - прямоугольный, $\angle AEC=90^\circ,\ \angle ECA=60^\circ$,

$$AC=\frac{EC}{\sin 30^\circ}=2EC,\quad AE=EC\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}EC;$$

$$S_{AEC}=\frac{AE\cdot EC}{2}=\frac{\sqrt{3}EC^2}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow EC=1,$$

$AC=2,\ AE=\sqrt{3}$;

3) $\angle ADC=90^\circ,\ \angle EDC=30^\circ\Rightarrow\angle BDE=60^\circ\Rightarrow$

$$\Delta DBE\approx\Delta CBA\Rightarrow\frac{DE}{AC}=\frac{BD}{BC}=\frac{BE}{AB}=k,$$

$$k^2=\frac{S_{DBE}}{S_{ABC}}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ k=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \Rightarrow\ DE=\sqrt{2};$$

4) ΔDEC - теорема синусов: $\dfrac{DE}{\sin(\angle DCE)}=\dfrac{EC}{\sin 30^\circ}$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{\sin(\angle DCE)}=2\ \Rightarrow\ \sin(\angle DCE)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \Rightarrow\angle DCE=45^\circ\Rightarrow\Delta EOC$ - равнобедренный прямоугольный треугольник, $EO=EC=1$;

5) $\angle DAE = 45° \Rightarrow \Delta ABE$ - равнобедренный прямоугольный треугольник, $BE = AE = \sqrt{3}$;

6) ΔBEO - прямоугольный треугольник $\Rightarrow$ $BO^2 = BE^2 + EO^2$ (теорема Пифагора) $\Rightarrow$ $BO^2 = 3+1 = 4 \Rightarrow BO = 2.$

Ответ: 2.

8. На прямой $y = -13/6$ найдите точку M, через которую проходят две касательные к графику функции $y = x^2/2$, угол между которыми равен $60°$.

Решение (без применения производной).

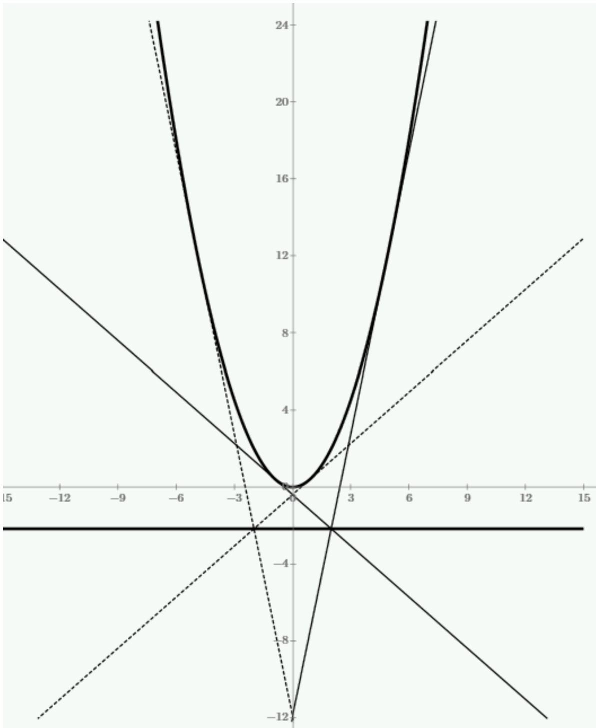
$y = x^2/2$, $M\left(x_0; -13/6\right)$.

Уравнение $\frac{1}{2}x^2 = -\frac{13}{6} + k(x - x_0)$, или $x^2 - 2kx + 2kx_0 + \frac{13}{3} = 0$, имеет единственное решение, если $\frac{D}{4} = k^2 - 2kx_0 - \frac{13}{3} = 0$. Найденные из этого уравнения два значения k должны удовлетворять условиям $k_1 + k_2 = 2x_0$ (1), $k_1 \cdot k_2 = -13/3$ (3).

Из условия $\alpha_2 - \alpha_1 = 60°$, $\operatorname{tg}\left(\alpha_2 - \alpha_1\right) = \sqrt{3}$ следует $\frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_1} = \sqrt{3}$, или $\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} = \sqrt{3}$. Отсюда, $k_2 - k_1 = \sqrt{3}\left(1 - \frac{13}{3}\right)$, $k_2 - k_1 = -\frac{10}{\sqrt{3}}$ (3).

Из (1) и (3) следует $k_1 = x_0 + \frac{5}{\sqrt{3}}$, $k_2 = x_0 - \frac{5}{\sqrt{3}}$. Из (3) следует $x_0^2 - \frac{25}{3} = -\frac{13}{3}$, $x_0^2 = 4$, $x_0 = \pm 2$. В силу симметрии оба значении подходят.

Ответ: $M\left(\pm 2; -13/6\right)$.



9. Укажите все значения a, при которых система уравнений $\left(x-a\right)^2=9(y-x+a-2)$, $\log_{(x/2)}\left(y/2\right)=1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

Решение. Второе уравнение равносильно системе: $x>0,\ \ x\neq 2,\ \ y=x$. Подставляя $y=x$ в первое уравнение, получаем; $(x-a)^2=9(a-2)$, или $x^2-2ax+a^2-9a+18=0$ (*), у которого $D/4=a^2-a^2+9a-18=9(a-2)$. Количество решений заданной системы уравнений зависит от числа корней этого квадратного уравнения.

Корень $x=2$ квадратного уравнения может получиться, когда $(2-a)^2=9(a-2)$, т.е. если 1) $a=2$, уравнение имеет вид $\left(x-2\right)^2=0$, тогда этот корень единственный и заданная система решений не имеет, или 2) $2-a=-9$, т.е. $a=11$, тогда для x получаем уравнение, у которого, кроме постороннего корня $x_1=2$, есть еще один корень $x_2=20$, удовлетворяющий условиям, и заданная система имеет единственное решение $(20;20)$.

Рассмотрим остальные случаи, когда решение системы будет единственным.

1. $\begin{cases} D/4=9(a-2)=0, \\ a>0, \quad a\neq 2. \end{cases}$ Система решений не имеет.

2. $a^2-9a+18<0$, т.е. при $3<a<6 \quad x=a+3\sqrt{a-2}$.

3. $a^2-9a+18=0$, отсюда $a=3$, $x^2-6x=0$, $x_1=0$ –посторонний корень, $x_2=6$ удовлетворяет условиям, или $a=6$, $x^2-12x=0$, $x_1=0$ –посторонний корень, $x_2=12$ удовлетворяет условиям.

Рассмотрим случаи, когда система будет иметь два различных решения. Квадратное уравнение (*) будет иметь два различных положительных корня $x_{1,2}=a\pm 3\sqrt{a-2}$, если

$$\begin{cases} 9(a-2)>0, \\ a>0, \\ a^2-9a+18>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>2, \\ \left[\begin{array}{l} a<3, \\ a>6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2<a<3, \\ a>6. \end{cases}$$

Из этого множества надо убрать рассмотренную ранее точку $a=11$.

Объединяя найденные значения a, получим ответ.

Ответ: $a\in\left(2;3\right)\cup\left(6;11\right)\cup\left(11;+\infty\right)$, $x=y=a\pm 3\sqrt{a-2}$;

$a\in\left[3;6\right]\cup\left\{11\right\}$, $x=y=a+3\sqrt{a-2}$.

10. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC с углом B, равным $90°$, и углом C, равным $30°$. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через центр боковой грани AA_1C_1C и вершину B и параллельной диагонали боковой грани AB_1, если расстояние от вершины C до секущей плоскости равно 2, а гипотенуза основания призмы равна 4?

Решение: Построение сечения. Через точку O – центр боковой грани AA_1C_1C – проведем $OS \| AB_1,\ S \in (ABC),\ OS = AB_1/2$ и $OH \parallel AA_1,\ H \in AC$. Тогда $SH \| AB,\ SH = AB/2$. Соединяем точки B и S, $D = BS \cap AC$. Продолжаем DO до пересечения с продолжением ребра CC_1; $T = (DO) \cap (CC_1)$, $E = DT \cap A_1C_1,\ F = BT \cap B_1C_1$. Трапеция $BDEF$ – искомое сечение.

Проведем $CK \perp BS$, тогда $TK \perp BS$ и плоскость треугольника TKC перпендикулярна секущей плоскости. Проведем $CP \perp TK,\ P \in TK$; длина CP равна заданному в условии расстоянию от вершины C до секущей плоскости. Введем обозначения: $AC = a,\ CP = d$.

Так как $\Delta HDS \sim \Delta ADB$ и $HS = AB/2,\ HD = AD/2 = a/6;\ EC_1 = AD = a/3$; $DC = 2EC_1$; $TD = 2TE,\ BD = 2FE$, а площадь треугольника BDT в четыре раза больше площади треугольника FET. Соответственно, площадь сечения $S_{BDEF} = 3/4 \cdot S_{\Delta BDT}$.

В плоскости основания проведем $CK \perp BS$ и $BM \perp AC$.

$BS = \sqrt{BF^2 + FS^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2\cdot 2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{4}$, $BD = \dfrac{2}{3}BS = \dfrac{a\sqrt{7}}{6}$. В треугольнике BDC

$CD = \dfrac{2}{3}a,\ BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\cdot 2},\ CK \cdot BD = BM \cdot CD$. Отсюда $CK = \dfrac{BM \cdot CD}{BD} = \dfrac{2a}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{6}{a\sqrt{7}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

В ΔCKT $KP = \sqrt{CK^2 - CP^2} = \sqrt{\dfrac{3}{7}a^2 - d^2} = \dfrac{\sqrt{3a^2 - 7d^2}}{\sqrt{7}}$;

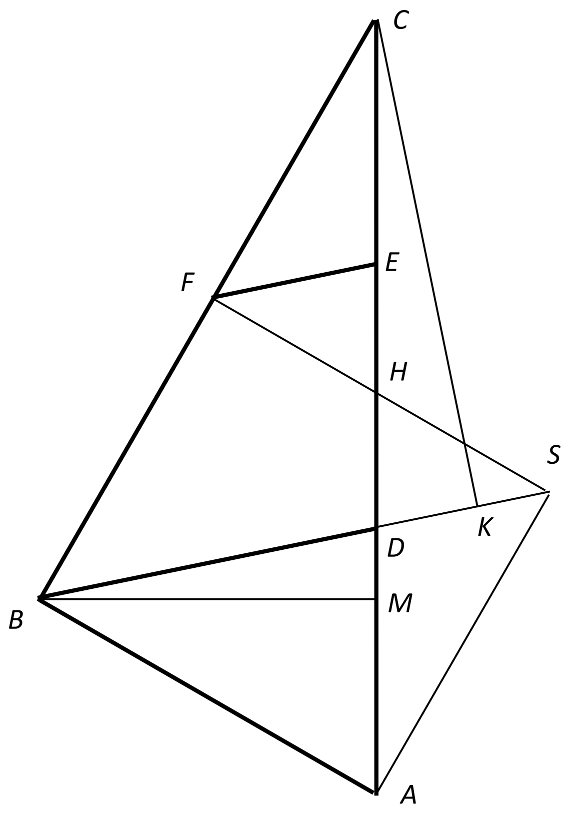
$$KT = \frac{CK^2}{KP} = \frac{3a^2}{7}\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3a^2 - 7d^2}} = \frac{3a^2}{\sqrt{7}\sqrt{3a^2 - 7d^2}}.$$

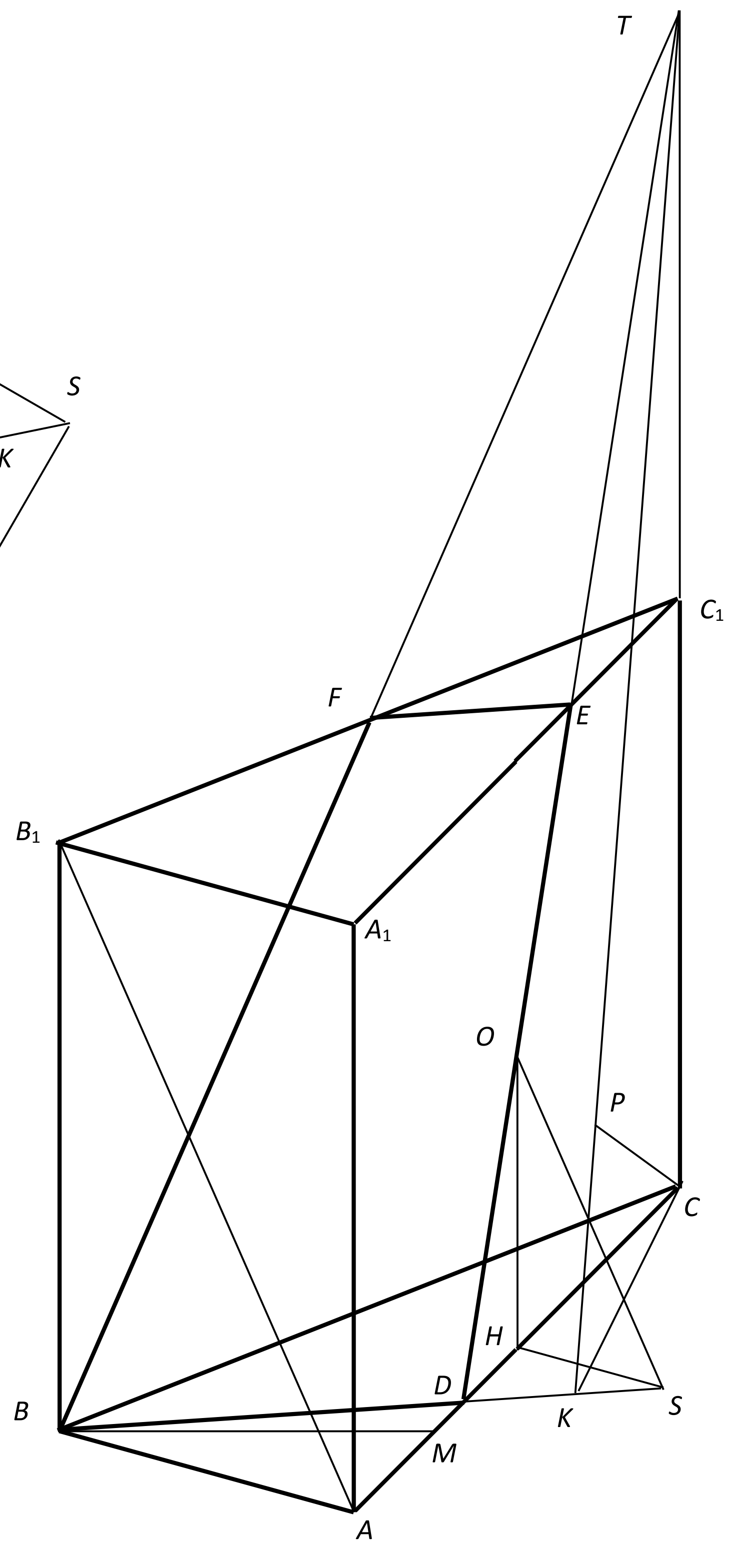
Площадь треугольника BDT $S_{\Delta BDT} = \dfrac{1}{2}BD \cdot KT = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{7}}{6} \cdot \dfrac{3a^2}{\sqrt{7}\sqrt{3a^2 - 7d^2}} = \dfrac{a^3}{4\sqrt{3a^2 - 7d^2}}$.

Площадь сечения $S_{BDEF} = \dfrac{3}{4} \cdot S_{\Delta BDT} = \dfrac{3a^3}{16\sqrt{3a^2 - 7d^2}} = \dfrac{3a^2}{16\sqrt{3 - 7\left(d/a\right)^2}}$.

Для сведения: высота пирамиды $h = \dfrac{\sqrt{3}\,d}{2\sqrt{3 - 7\left(d/a\right)^2}}$.

Ответы: $a = 4,\ d = 2,\ S = \dfrac{3\cdot 16}{16\sqrt{3 - 7\left(4/16\right)}} = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$ $\left(h = 2\sqrt{3/5}\right)$.


C
E
F
H
S
K
D
B
M
A


T
C$_1$
F
E
B$_1$
A$_1$
O
P
C
H
D
K
S
B
M
A