Заключительный этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика» в 2015 г.

Вариант № 11

1. Одновременно из пункта A в пункт B отправляется автомобиль со скоростью $80\,км/ч$, а из пункта B в пункт C — поезд со скоростью $50\,км/ч$. Через 7 часов после начала движения они оказались на наименьшем расстоянии друг от друга. Найдите расстояние между пунктами, если все три пункта равноотстоят друг от друга и связаны прямолинейными дорогами. (8 баллов)

2. Решите неравенство $\log_x(4x-3)>2$. (8 баллов)

3. Некоторые натуральные числа образуют возрастающую геометрическую прогрессию с целочисленным знаменателем. Найдите эти числа, если их сумма равна 157. (8 баллов)

4. Решите уравнение $\sqrt[4]{1-\cos^{15}3x\cos^2 5x}=\sin 5x$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\left(3^{x^2-1}-9\cdot 3^{5x+3}\right)\log_{\cos\pi x}(x^2-6x+9)\geq 0$. (10 баллов)

6. Найдите сумму целых чисел, которые принадлежат множеству значений функции $f(x)=\log_3(10\cos 2x+17)$ при $x\in\left[1{,}25\left(\operatorname{arctg}0{,}25\right)\cos(\pi-\arcsin(-0{,}6));\ \operatorname{arctg}3\right]$. (10 баллов)

7. На стороне AC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает стороны AB и BC в точках D и E соответственно. Угол EDC равен 30°, $EC=1$, а площадь треугольника DBE относится к площади треугольника ABC как $1:2$. Найдите длину отрезка BO, если O — точка пересечения отрезков AE и CD. (12 баллов)

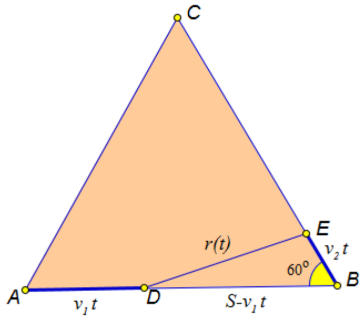
8. На прямой $y=-5/3$ найдите точку M, через которую проходят две касательные к графику функции $y=x^2/2$, угол между которыми равен 60°. (12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений $(x-a)^2=16(y-x+a-3),\ \log_{(x/3)}(y/3)=1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (12 баллов)

10. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC с углом B, равным 90°, и углом C, равным 30°. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через центр боковой грани AA_1C_1C и вершину B и параллельной диагонали боковой грани AB_1, если расстояние от вершины C до секущей плоскости равно 2, а гипотенуза основания призмы равна $\sqrt{14}$? (12 баллов)

Решение варианта №11

1. Одновременно из пункта A в пункт B отправляется автомобиль со скоростью 80 $км/ч$, а из пункта B в пункт C — поезд со скоростью 50 $км/ч$. Через 7 часов после начала движения они оказались на наименьшем расстоянии друг от друга. Найдите расстояние между пунктами, если все три пункта равноотстоят друг от друга и связаны прямолинейными дорогами.



Решение: Пусть $AB = BC = AC = S$. Обозначим расстояние между автомобилем и поездом через $r = r(t)$, где t — время от начала движения. Тогда по теореме косинусов имеем: $r^2 = (S-80t)^2 + (50t)^2 - 50t(S-80t)$. Для нахождения времени, при котором расстояние между автомобилем и поездом было наименьшим, вычислим производную функции $r^2 = r^2(t)$:

$$(r^2)' = -2\cdot 80(S-80t) + 2\cdot 2500t - 50(S-80t) + 80\cdot 50t = -210S + 2(6400+2500+4000)t = 0.$$

Так как наименьшее значение в процессе движения функция $r^2 = r^2(t)$ принимает при $t = 7$, то $-105S + (6400+2500+4000)\cdot 7 = 0$, и $S = 860$.

Ответ: 860 *км*.

2. Решите неравенство $\log_x(4x-3) > 2$.

Решение: $\log_x(4x-3) > 2$. ОДЗ: $x \in (3/4;1)\cup(1;+\infty)$. $\log_x \dfrac{x^2}{4x-3} < 0$.

1) $\begin{cases} 3/4 < x < 1 \\ 0 < x < 1, \\ \dfrac{x^2}{4x-3} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3/4 < x < 1, \\ x^2 - 4x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3/4 < x < 1, \\ \left[\begin{array}{l} x < 1, \\ x > 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 3/4 < x < 1.$

2) $\begin{cases} 1 < x < +\infty, \\ \dfrac{x^2}{4x-3} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < +\infty, \\ x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < +\infty, \\ 1 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 3.$

Ответ: $x \in (3/4;1)\cup(1;3)$.

3. Некоторые натуральные числа образуют возрастающую геометрическую прогрессию с целочисленным знаменателем. Найдите эти числа, если их сумма равна 157.

Решение: Если считать, что одно число образует возрастающую геометрическую прогрессию, то одно число 157 является решением задачи. По условию для некоторого натурального числа n справедливо равенство $b_1 + b_1q + b_1q^2 + \cdots + b_1q^{n-1} = 157$, или $b_1(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}) = 157$. Так как 157 — простое число (оно не делится на 2, 3, 5, 7, 11, 13), то $b_1 = 1,\ 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} = 157$, или $b_1 = 157,\ 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} = 1$. Второй случай не подходит. Следовательно, $b_1 = 1,\ q(1+q+q^2+\dots+q^{n-2}) = 156$, $q(1+q+q^2+\dots+q^{n-2}) = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 13$. Рассмотрим следующие случаи.

1) Если $n = 2$, то $q = 156$. Искомые числа: 1, 156.
2) Если $n = 3$, то $q^2 + q - 156 = 0$. Так как q - натуральное число, большее единицы, то $q = 12$. Искомые числа: 1, 12, 144.
3) Если $n \ge 4$, то $q(1+q+q^2+\dots+q^{n-2}) = 156$. Так как q - натуральное число, большее единицы, то $q^3 \le q^{n-1} \le 156$, $q \le 5$, причем q является делителем числа $156 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 13$. Следовательно, q может принимать следующие значения: 2, 3, 4.
   1) Если $q = 2$, то $1+2+2^2+\dots+2^{n-2} = 78$, $2^{n=1} - 1 = 156$, или $2^{n=1} = 157$, уравнение не имеет натуральных решений.
   2) Если $q = 3$, то $1+3+3^2+\dots+3^{n-2} = 52$, $\dfrac{3^{n-1}-1}{2} = 52$, $3^{n-1} = 105$, уравнение не имеет натуральных решений.
   3) Если $q = 4$, то $1+4+4^2+\dots+4^{n-2} = 39$, $\dfrac{4^{n-1}-1}{3} = 39$, $4^{n-1} = 118$, уравнение не имеет натуральных решений.

Ответ: {157}, **{**1; 156} или **{**1; 12; 144}.

4. .Решите уравнение $\sqrt[4]{1-\cos^{15} 3x \cos^2 5x} = \sin 5x$.

Решение:
При условии $\sin 5x \ge 0$ обе части этого уравнения можно возвести в квадрат. При найденных ограничениях уравнение равносильно следующему: $\sin^4 5x + \cos^{15} 3x \cos^2 5x - 1 = 0$, $(1-\cos^2 5x)^2 + \cos^{15} 3x \cos^2 5x - 1 = 0$, $-2\cos^2 5x + \cos^4 5x + \cos^{15} 3x \cos^2 5x = 0$, $\cos^2 5x(\cos^2 5x + \cos^{15} 3x - 2) = 0$. Таким образом, приходим к совокупности уравнений:

1) $\cos 5x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi n}{5},\ n \in Z$, с учетом условия $\sin 5x \ge 0$ имеем $x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi n}{5},\ n \in Z$.

2) $\cos^2 5x + \cos^{15} 3x - 2 = 0$, что равносильно системе уравнений $\begin{cases} \cos^2 5x = 1, \\ \cos^{15} 3x = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \pi k, \\ 3x = 2\pi m, \end{cases}$ $k,\ m \in Z$. Следовательно, $3k = 10m,\ k, m \in Z \Rightarrow m = 3s,\ k = 10s,\ s \in Z \Rightarrow x = 2\pi s,\ s \in Z$, что удовлетворяет условию $\sin 5x \ge 0$.

Таким образом, решения исходного уравнения: $x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi n}{5},\ n \in Z,\ x = 2\pi s,\ \ s \in Z.$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi n}{5},\ n \in Z,\ x = 2\pi s,\ \ s \in Z.$

5. Решите неравенство $\left(3^{x^2-1}-9\cdot 3^{5x+3}\right)\log_{\cos\pi x}(x^2-6x+9)\ge 0.$

Решение:

ОДЗ: $(x-3)^2>0,\quad \cos\pi x>0,\ \cos\pi x\ne 1,\ \Rightarrow\ x\in(-0{,}5+2k;\,2k)\cup(2k;\,0{,}5+2k)$, $k\in Z$.

Исходное неравенство на ОДЗ эквивалентно следующему

$(x^2-5x-6)(\cos\pi x-1)(x^2-6x+8)\ge 0\ \Leftrightarrow\ (x-6)(x+1)(x-2)(x-4)\le 0\ \Rightarrow$

$x\in[-1;\,2]\cup[4;\,6]$.

С учетом ОДЗ имеем $x\in(-0{,}5;\,0)\cup(0;\,0{,}5)\cup(1{,}5;\,2)\cup(4;\,4{,}5)\cup(5{,}5;\,6)$.

Ответ: $x\in(-0{,}5;\,0)\cup(0;\,0{,}5)\cup(1{,}5;\,2)\cup(4;\,4{,}5)\cup(5{,}5;\,6)$.

6. Найдите сумму целых чисел, которые принадлежат множеству значений функции $f(x)=\log_3(10\cos 2x+17)$ при $x\in\left[1{,}25\left(\operatorname{arctg}0{,}25\right)\cos(\pi-\arcsin(-0{,}6));\,\operatorname{arctg}3\right]$. (10 баллов)

Решение:

Так как $\cos(\pi-\arcsin(-0{,}6))=\cos(\pi+\arcsin 0{,}6)=-\cos(\arcsin 0{,}6)=-0{,}8$, то $x\in\left[1{,}25\left(\operatorname{arctg}0{,}25\right)\cos(\pi-\arcsin(-0{,}6));\,\operatorname{arctg}3\right]=\left[-\operatorname{arctg}0{,}25;\,\operatorname{arctg}3\right]$. Следовательно, $2x\in\left[-2\operatorname{arctg}0{,}25;\,2\operatorname{arctg}3\right]$. Поскольку $0<\operatorname{arctg}0{,}25<\operatorname{arctg}1=\pi/4$, $0<2\operatorname{arctg}0{,}25<\pi/2$, $-\pi/2<-2\operatorname{arctg}0{,}25<0$, а также $\pi/4<\operatorname{arctg}3<\pi/2$, $\pi/2<2\operatorname{arctg}3<\pi$, то $\cos 2x\in[\cos(2\operatorname{arctg}3);\,1]$. Используя формулу $\cos 2\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, получаем $\cos(2\operatorname{arctg}3)=-0{,}8$, и $\cos 2x\in[-0{,}8;1]$. Отсюда имеем $10\cos 2x+17\in[9;\,27]$, и $f(x)=\log_3(10\cos 2x+17)\in[\log_3 9;\,\log_3 27]=[2;\,3]$.

Отрезок $[2;\,3]$ является множеством значений функции $f(x)=\log_3(10\cos 2x+17)$ при $x\in\left[1{,}25\left(\operatorname{arctg}0{,}25\right)\cos(\pi-\arcsin(-0{,}6));\,\operatorname{arctg}3\right]$.

Сумма целых чисел из отрезка $[2;3]$ равна 5.

Ответ: $E_f=[2;\,3]$, сумма целых чисел равна 5.

7. На стороне AC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает стороны AB и BC в точках D и E соответственно. Угол EDC равен 30°, $EC=1$, а площадь треугольника DBE относится к площади треугольника ABC как $1:2$. Найдите длину отрезка BO, если O — точка пересечения отрезков AE и CD.

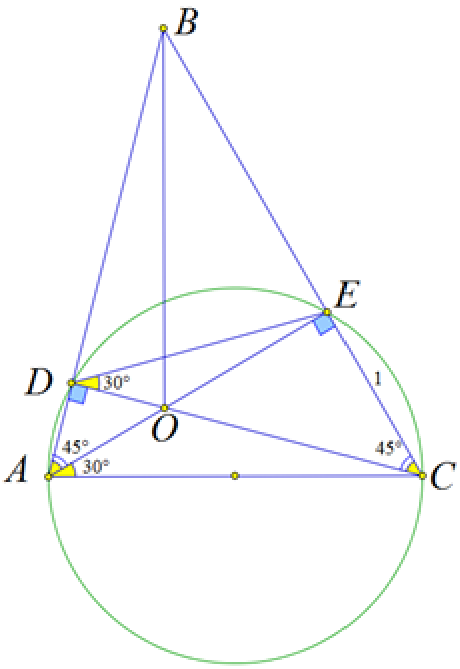
Решение:

1) $\angle EDC=\angle EAC=30^\circ$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу);
2) AC - диаметр окружности $\Rightarrow\Delta AEC$ - прямоугольный, $\angle AEC=90^\circ$, $\angle ECA=60^\circ$,

$AC=\dfrac{EC}{\sin 30^\circ}=2,\quad AE=EC\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}$;

3) $\angle ADC = 90°,\ \angle EDC = 30° \Rightarrow \angle BDE = 60° \Rightarrow \Delta DBE \approx \Delta CBA \Rightarrow \dfrac{DE}{AC} = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BE}{AB} = k$,

$k^2 = \dfrac{S_{DBE}}{S_{ABC}} = \dfrac{1}{2} \ \Rightarrow \ k = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \ \Rightarrow \ DE = \sqrt{2}$;



4) ΔDEC - теорема синусов: $\dfrac{DE}{\sin(\angle DCE)} = \dfrac{EC}{\sin 30°}$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{\sin(\angle DCE)} = 2 \ \Rightarrow \ \sin(\angle DCE) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \ \Rightarrow$

$\angle DCE = 45° \Rightarrow \Delta EOC$ - равнобедренный прямоугольный треугольник, $EO = EC = 1$;

5) $\angle DAE = 45° \Rightarrow \Delta ABE$ - равнобедренный прямоугольный треугольник, $BE = AE = \sqrt{3}$;

6) ΔBEO - прямоугольный треугольник $\Rightarrow$

$BO^2 = BE^2 + EO^2$ (теорема Пифагора) $\Rightarrow$

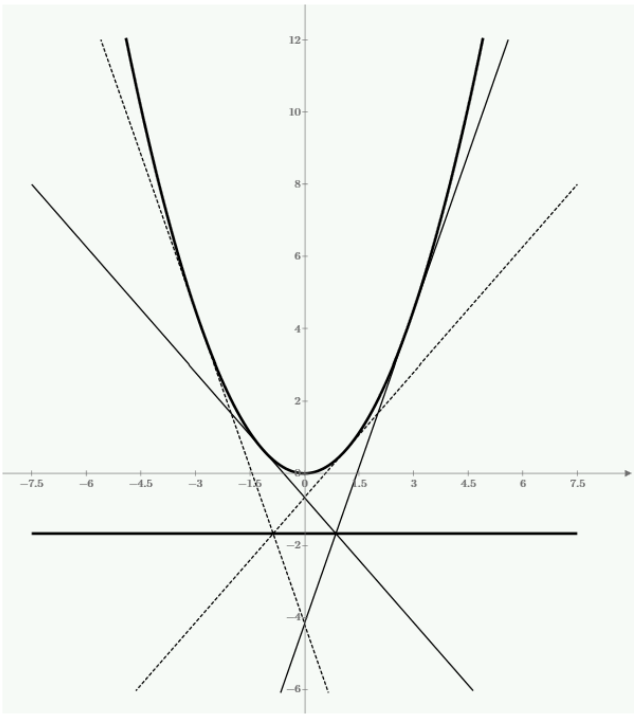
$BO^2 = 3 + 1 = 4 \Rightarrow BO = 2$.

Ответ: 2.

8. На прямой $y = -5/3$ найдите точку M, через которую проходят две касательные к графику функции $y = x^2/2$, угол между которыми равен $60°$.

Решение (без применения производной).

$y = x^2/2$, $M(x_0; -5/3)$.



Уравнение $\dfrac{1}{2}x^2 = -\dfrac{5}{3} + k(x - x_0)$, или

$x^2 - 2kx + 2kx_0 + \dfrac{10}{3} = 0$, имеет единственное решение, если $\dfrac{D}{4} = k^2 - 2kx_0 - \dfrac{10}{3} = 0$.

Найденные из этого уравнения два значения k должны удовлетворять условиям $k_1 + k_2 = 2x_0$ (1), $k_1 \cdot k_2 = -10/3$ (3).

Из условия

$\alpha_2 - \alpha_1 = 60°,\ \mathrm{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \sqrt{3}$ следует

$\dfrac{\mathrm{tg}\alpha_2 - \mathrm{tg}\alpha_1}{1 + \mathrm{tg}\alpha_2 \cdot \mathrm{tg}\alpha_1} = \sqrt{3}$, или $\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} = \sqrt{3}$.

Отсюда, $k_2 - k_1 = \sqrt{3}\left(1 - \dfrac{10}{3}\right)$,

$$k_2 - k_1 = -\frac{7}{\sqrt{3}}.$$

Из (1) и (3) следует $k_1 = x_0 + \frac{7}{2\sqrt{3}}$, $k_2 = x_0 - \frac{7}{2\sqrt{3}}$. Из (3) следует $x_0^2 - \frac{49}{12} = -\frac{10}{3}$, $x_0^2 = \frac{3}{4}$, $x_0 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. В силу симметрии оба значении подходят.

Ответ: $M\left(\pm\sqrt{3}/2; -5/3\right)$.

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений $(x-a)^2 = 16(y-x+a-3),\ \log_{(x/3)}(y/3) = 1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

Решение. Второе уравнение равносильно системе: $x > 0,\ x \neq 3,\ y = x$. Подставляя $y = x$ в первое уравнение, получаем; $(x-a)^2 = 16(a-3)$, или $x^2 - 2ax + a^2 - 16a + 48 = 0$ (*), у которого $D/4 = a^2 - a^2 + 16a - 48 = 16(a-3)$. Количество решений заданной системы уравнений зависит от числа корней этого квадратного уравнения.

Корень $x = 3$ квадратного уравнения может получиться, когда $(3-a)^2 = 16(a-3)$, т.е. если 1) $a = 3$, уравнение имеет вид $(x-3)^2 = 0$, тогда этот корень единственный и заданная система решений не имеет, или 2) $3 - a = -16$, т.е. $a = 19$, тогда для x получаем уравнение $(x-19)^2 = 16\cdot 16,\ x = 19 \pm 16$, у которого, кроме постороннего корня $x_1 = 3$, есть еще один корень $x_2 = 35$, удовлетворяющий условиям, и заданная система имеет единственное решение $(35;35)$.

Рассмотрим остальные случаи, когда решение системы будет единственным.

1. $\begin{cases} D/4 = 16(a-3) = 0, \\ a > 0, \quad a \neq 3. \end{cases}$ Система решений не имеет.

2. $a^2 - 16a + 48 < 0$, т.е. при $4 < a < 12 \quad x = a + 4\sqrt{a-3}$.

3. $a^2 - 16a + 48 = 0$, отсюда $a = 4$, $x^2 - 8x = 0$, $x_1 = 0$ –посторонний корень, $x_2 = 8$ удовлетворяет условиям, или $a = 12$, $x^2 - 24x = 0$, $x_1 = 0$ –посторонний корень, $x_2 = 24$ удовлетворяет условиям.

Рассмотрим случаи, когда система будет иметь два различных решения. Квадратное уравнение (*) будет иметь два различных положительных корня $x_{1,2} = a \pm 4\sqrt{a-3}$, если

$$\begin{cases} 16(a-3) > 0, \\ a > 0, \\ a^2 - 16a + 48 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 3, \\ \left[\begin{array}{l} a < 4, \\ a > 12 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 < a < 4, \\ a > 12. \end{array}\right.$$

Из этого множества надо убрать рассмотренную ранее точку $a = 19$.

Объединяя найденные значения a, получим ответ.

Ответ: $a \in (3;4) \cup (12;19) \cup (19;+\infty)$, $x = y = a \pm 4\sqrt{a-3}$;

$a \in [4;12] \cup \{19\}$, $x = y = a + 4\sqrt{a-3}$.

10. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC с углом B, равным $90°$, и углом C, равным $30°$. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через центр боковой грани AA_1C_1C и вершину B и параллельной диагонали боковой грани AB_1, если расстояние от вершины C до секущей плоскости равно 2, а гипотенуза основания призмы равна $\sqrt{14}$?

Решение: Построение сечения. Через точку O – центр боковой грани AA_1C_1C – проведем $OS \| AB_1$, $S \in (ABC)$, $OS = AB_1/2$ и $OH \,\square\, AA_1$, $H \in AC$. Тогда $SH \| AB$, $SH = AB/2$. Соединяем точки B и S, $D = BS \cap AC$. Продолжаем DO до пересечения с продолжением ребра CC_1; $T = (DO) \cap (CC_1)$, $E = DT \cap A_1C_1$, $F = BT \cap B_1C_1$. Трапеция $BDEF$ – искомое сечение.

Проведем $CK \perp BS$, тогда $TK \perp BS$ и плоскость треугольника TKC перпендикулярна секущей плоскости. Проведем $CP \perp TK$, $P \in TK$; длина CP равна заданному в условии расстоянию от вершины C до секущей плоскости. Введем обозначения: $AC = a$, $CP = d$.

Так как $\Delta HDS \sim \Delta ADB$ и $HS = AB/2$, $HD = AD/2 = a/6$; $EC_1 = AD = a/3$; $DC = 2EC_1$; $TD = 2TE$, $BD = 2FE$, а площадь треугольника BDT в четыре раза больше площади треугольника FET. Соответственно, площадь сечения $S_{BDEF} = 3/4 \cdot S_{\Delta BDT}$.

В плоскости основания проведем $CK \perp BS$ и $BM \perp AC$.

$BS = \sqrt{BF^2 + FS^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2\cdot 2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{4}$, $BD = \frac{2}{3}BS = \frac{a\sqrt{7}}{6}$. В треугольнике BDC $CD = \frac{2}{3}a$, $BM = \frac{a\sqrt{3}}{2\cdot 2}$, $CK \cdot BD = BM \cdot CD$. Отсюда $CK = \frac{BM \cdot CD}{BD} = \frac{2a}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{6}{a\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

В ΔCKT $KP = \sqrt{CK^2 - CP^2} = \sqrt{\frac{3}{7}a^2 - d^2} = \frac{\sqrt{3a^2 - 7d^2}}{\sqrt{7}}$;

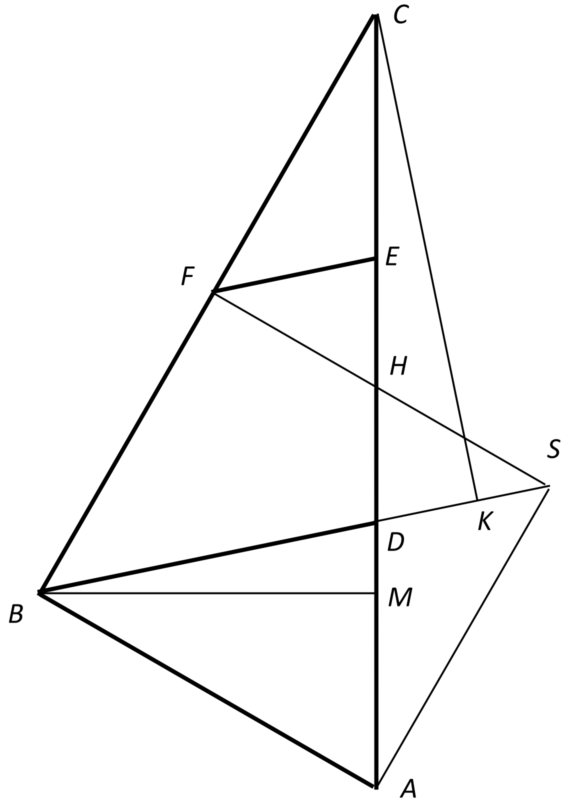
$$KT = \frac{CK^2}{KP} = \frac{3a^2}{7}\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3a^2 - 7d^2}} = \frac{3a^2}{\sqrt{7}\sqrt{3a^2 - 7d^2}}.$$

Площадь треугольника BDT $S_{\Delta BDT} = \frac{1}{2}BD \cdot KT = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{6} \cdot \frac{3a^2}{\sqrt{7}\sqrt{3a^2 - 7d^2}} = \frac{a^3}{4\sqrt{3a^2 - 7d^2}}$.

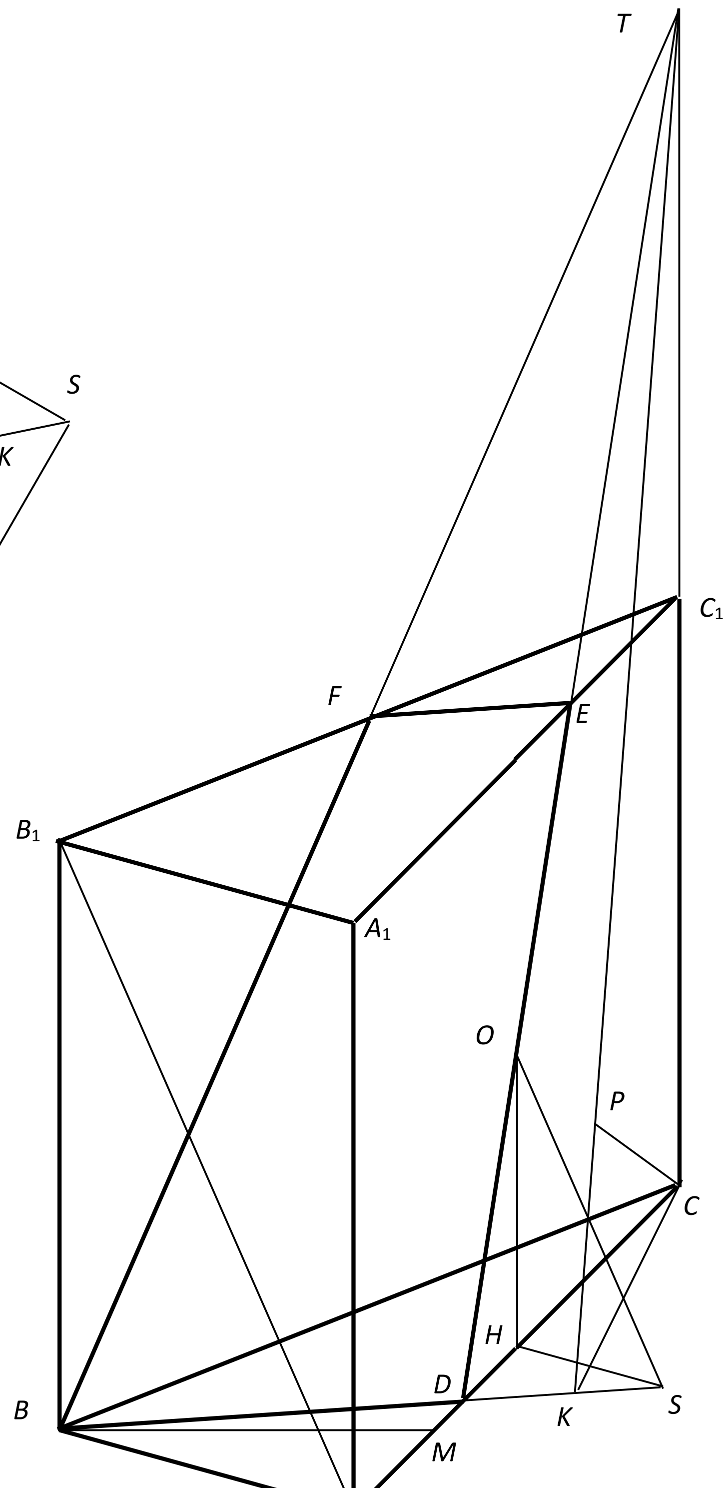
Площадь сечения $S_{BDEF} = \frac{3}{4} \cdot S_{\Delta BDT} = \frac{3a^3}{16\sqrt{3a^2 - 7d^2}} = \frac{3a^2}{16\sqrt{3 - 7(d/a)^2}}$.

Для сведения: высота пирамиды $h = \frac{\sqrt{3}\,d}{2\sqrt{3 - 7(d/a)^2}}$.

Ответы: $a = \sqrt{14}$, $d = 2$, $S = \frac{3 \cdot 14}{16\sqrt{3 - 7(4/14)}} = \frac{21}{8}$ $\quad (h = \sqrt{3})$.



C
E
F
H
S
K
D
B
M
A



T
C1
F
E
B1
A1
O
P
C
H
D
K
S
B
M
A