

МГТУ им. Н.Э.Баумана
Олимпиада школьников «Шаг в будущее»,
2 тур, 8 класс, 15 февраля 2015 года

ВАРИАНТ 1

1. Докажите, что выражение $7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{1580}$ делится на 400.
2. В одном из областных центров 20% семей, имеющих дочку, имеют также и сына, 25% семей, имеющих сына, имеют также и дочку, а 20% всех семей не имеют детей. Сколько % семей в городе имеют и сына и дочь?
3. Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 7 и дает остаток равный 1, при делении на каждое из чисел 2, 3, 4, 5, 6.
4. Найдите все значения параметра a , при которых площадь фигуры, ограниченной на координатной плоскости прямыми $y = 2x + b$, $y = -2x - b$, $y = 2x$, $y = -2x$, равна 9.
5. Найдите все целые значения параметра a , при которых уравнение $2x^7 + x^5 - 4x^3 - 2(a + 4)x^2 + 15x - 5a - 13 = 0$ имеет хотя бы один целый корень.
6. Дан пятиугольник $KLMNP$, в котором прямая KL параллельна прямой MN , прямая NP параллельна прямой LM , длина диагонали KM равна 20, длина диагонали MP равна 16. Найдите расстояние от точки N до прямой KM , если расстояние от точки L до прямой PM равно 15.
7. На плоскости расположено 2015 точек так, что площадь любого треугольника с вершинами в этих точках не превосходит 1. Докажите, что все эти точки можно покрыть одним треугольником площади 4.

Задание	1	2	3	4	5	6	7	Итого
Баллы	12	12	12	16	16	16	16	100

МГТУ им. Н.Э.Баумана
Олимпиада школьников «Шаг в будущее»,
2 тур, 8 класс, 15 февраля 2015 года

ВАРИАНТ 2

1. Докажите, что выражение $3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2015}$ делится на 121.
2. Известно, что в одном из городов 10% болельщиков «Зенита» болеют за «Динамо», 20% болельщиков «Динамо» болеют за «Зенит» и 30% болельщиков футбола болеют за другие команды. Сколько % болельщиков футбола в городе болеет и за «Динамо» и за «Зенит»?
3. Укажите наименьшее натуральное число, отличное от 1, которое при делении на каждое из чисел 2, 3, 5 и 9, дает в остатке 1.
4. Найдите все значения параметра a , при которых площадь фигуры, ограниченной на координатной плоскости прямыми $y = 2x + a$, $y = 2x - a$, $y = x + a$, $y = x - a$, равна 36.
5. Найдите все целые значения параметра a , при которых уравнение $x^6 + 2x^4 - (a + 5)x^2 - 4a + 25 = 0$ имеет хотя бы один целый корень.
6. Дан пятиугольник $ABCDE$, в котором прямая AB параллельна прямой CD , прямая DE параллельна прямой BC , длина диагонали AC равна 24, длина диагонали CE равна 20. Найдите расстояние от точки D до прямой AC , если расстояние от точки B до прямой CE равно 18.
7. На плоскости расположено 1580 точек так, что площадь любого треугольника с вершинами в этих точках не превосходит 1. Докажите, что все эти точки можно покрыть одним треугольником площади 4.

Задание	1	2	3	4	5	6	7	Итого
Баллы	12	12	12	16	16	16	16	100

**Решение заданий 2 тура 8 класса олимпиады МГТУ «Шаг в будущее»
2014-2015 учебный год**

Задание 1 (1 вариант). Докажите, что выражение $7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{1580}$ делится на 400.

Решение. Сгруппируем слагаемые по четыре и вынесем общий множитель в каждой группе.

$$\begin{aligned} 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{1580} &= 7(1 + 7 + 7^2 + 7^3) + 7^5(1 + 7 + 7^2 + 7^3) + \dots + 7^{1577}(1 + 7 + 7^2 + 7^3) = \\ &= 400(7 + 7^5 + \dots + 7^{1577}). \end{aligned}$$

Очевидно, полученное выражение делится на 400.

Задание 1 (2 вариант). Докажите, что выражение $3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2015}$ делится на 121.

Решение. Сгруппируем слагаемые по пять и вынесем общий множитель в каждой группе.

$$\begin{aligned} 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2015} &= \\ &= 3(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^6(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{2011}(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) = \\ &= 121(3 + 3^6 + \dots + 3^{2011}). \end{aligned}$$

Очевидно, полученное выражение делится на 121.

Задание 2 (1 вариант). В одном из областных центров 20% семей, имеющих дочку, имеют также и сына, 25% семей, имеющих сына, имеют также и дочку, а 20% всех семей не имеют детей. Сколько % семей в городе имеют и сына и дочь?

Решение. Пусть в городе x семей, y семей имеют дочь, z семей имеют сына. Тогда, по условию задачи имеем $0,2y = 0,25z$ и $y + z - 0,25z + 0,2x = x$, откуда $z = 0,4x$, значит, $0,25z = 0,1x$.

Ответ: 10 процентов.

Задание 2 (2 вариант). Известно, что в одном из городов 10% болельщиков «Зенита» болеют за «Динамо», 20% болельщиков «Динамо» болеют за «Зенит» и 30% болельщиков футбола болеют за другие команды. Сколько % болельщиков футбола в городе болеет и за «Динамо» и за «Зенит»?

Решение. Пусть в городе x болельщиков, y болельщиков «Зенита», z болельщиков «Динамо». Тогда, по условию задачи имеем $0,1y = 0,2z$ и $y + z - 0,2z + 0,3x = x$, откуда $z = 0,25x$, значит, $0,2z = 0,05x$.

Ответ: 5 процентов.

Задание 3 (1 вариант). Найти наименьшее натуральное число, которое делится на 7 и дает остаток равный 1, при делении на каждое из чисел 2, 3, 4, 5, 6.

Решение. Найдем наименьшее общее кратное чисел 2, 3, 4, 5, 6 : оно равно 60. Тогда, исходя из условия задачи, получаем $7n = 60m + 1$. Если левая часть этого уравнения делится на 7, то и правая часть тоже должна делиться на 7.

Представив $m = 7t \pm r$, и подставляя в уравнение $7n = 60m + 1$ различные значения r , получим $m = 5$.

Таким образом, искомое число равно 301.

Ответ: 301.

Задание 3 (2 вариант). Укажите наименьшее натуральное число, отличное от 1, которое при делении на каждое из чисел 2, 3, 5 и 9, дает в остатке 1.

Решение. Пусть n искомое натуральное число, тогда $n = 2a + 1 = 3b + 1 = 5c + 1 = 9d + 1$, откуда следует, что число $n - 1$ должно одновременно делиться на 2, 5 и 9. Получаем $n = [2,5,9]+1=91$.

Ответ: 91.

Задание 4 (1 вариант). Найдите все значения параметра a , при которых площадь фигуры, ограниченной на координатной плоскости прямыми $y = 2x + b$, $y = -2x - b$, $y = 2x$, $y = -2x$, равна 9.

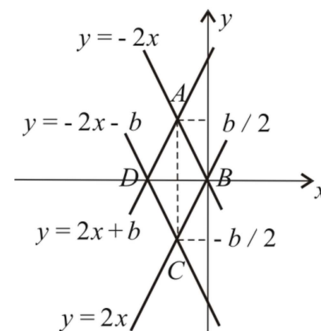
Решение. Полученная фигура является параллелограммом, поскольку угловые коэффициенты прямых попарно равны. Найдем координаты A, B, C, D вершин этого параллелограмма.

1) Для вершины A : $2x + b = -2x$, $A\left(-\frac{b}{4}; \frac{b}{2}\right)$;

2) Для вершины B : $2x = -2x$, $B(0;0)$;

3) Для вершины C : $-2x - b = 2x$, $C\left(-\frac{b}{4}; -\frac{b}{2}\right)$;

4) Для вершины D : $2x + b = -2x - b$, $D\left(-\frac{b}{2}; 0\right)$.



Поскольку совпадают первые координаты точек A и C и вторые координаты точек B и D , то диагонали AC и BD перпендикулярны, следовательно параллелограмм $ABCD$ является ромбом.

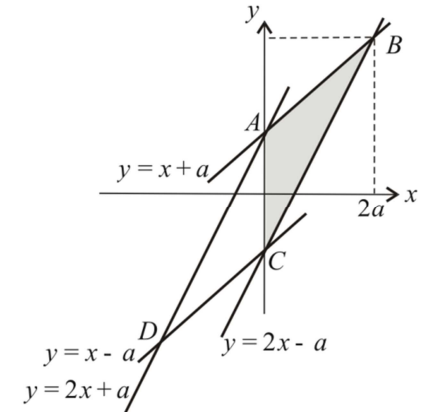
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD| = \frac{1}{2}|b| \cdot \left| \frac{b}{2} \right| = \frac{1}{4}b^2 = 9. \text{ Получаем } b = \pm 6.$$

Ответ: $b = \pm 6$.

Задание 4 (2 вариант). Найдите все значения параметра a , при которых площадь фигуры, ограниченной на координатной плоскости прямыми $y = 2x + a$, $y = 2x - a$, $y = x + a$, $y = x - a$, равна 36.

Решение. Полученная фигура является параллелограммом, поскольку угловые коэффициенты прямых попарно равны. Найдём координаты A, B, C, D вершин этого параллелограмма.

- 1) Для вершины A : $2x + a = x + a$, $A(0; a)$;
- 2) Для вершины B : $2x - a = x + a$, $B(2a; 3a)$;
- 3) Для вершины C : $2x - a = x - a$, $C(0; -a)$;
- 4) Для вершины D : $2x - a = x + a$, $D(-2a; -3a)$.



Поскольку первые координаты точек A и C равны нулю,

то эти точки лежат на оси y , значит параллелограмм разбивается диагональю AC на 2 равновеликих треугольника и

$$S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2}|AC| \cdot |x_B| = |2a| \cdot |2a| = 4a^2 = 36. \text{ Получаем } a = \pm 3.$$

Ответ: $a = \pm 3$.

Задание 5 (1 вариант). Найдите все целые значения параметра a , при которых уравнение $2x^7 + x^5 - 4x^3 - 2(a + 4)x^2 + 15x - 5a - 13 = 0$ имеет хотя бы один целый корень.

Решение.

Заметим, что относительно параметра a уравнение является линейным, и его можно переписать в виде $a(2x^2 + 5) = 2x^7 + x^5 - 4x^3 - 8x^2 + 15x - 13$.

Произведем деление «уголком» левой части уравнения на коэффициент при параметре a , получим $a = x^5 - 2x^3 - 3x - 4 + \frac{7}{2x^2 + 5}$. Поскольку, по условию задачи, значения a и x

должны быть целыми, дробь $\frac{7}{2x^2 + 5}$ должна принимать целые значения. Это, с учетом положительности x^2 , возможно лишь в случае $2x^2 + 5 = 7$, откуда $x = \pm 1$. Подставляя найденные значения x в выражение для a , находим, что $a = -5$ и $a = -1$.

Ответ: $-5; -1$.

Задание 5 (2 вариант). Найдите все целые значения параметра a , при которых уравнение $x^6 + 2x^4 - (a + 5)x^2 - 4a + 25 = 0$ имеет хотя бы один целый корень.

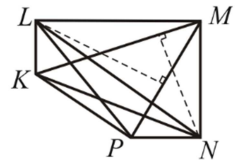
Решение. Заметим, что относительно параметра a уравнение является линейным, и его можно переписать в виде $a(2x^2 + 4) = x^6 - 2x^4 - 5x^2 + 25$.

Произведем деление «уголком» левой части уравнения на коэффициент при параметре a , получим $a = x^4 - 2x^2 + 3 + \frac{13}{x^2 + 4}$. Поскольку, по условию задачи, значения a и x должны быть целыми, дробь $\frac{13}{x^2 + 4}$ должна принимать целые значения. Это, с учетом положительности x^2 , возможно лишь в случае $x^2 + 4 = 13$, откуда $x = \pm 3$. Подставляя найденные значения x в выражение для a , находим, что $a = 67$.

Ответ: 67 .

Задание 6 (1 вариант). Дан пятиугольник $KLMNP$, в котором прямая KL параллельна прямой MN , прямая NP параллельна прямой LM , длина диагонали KM равна 20, длина диагонали MP равна 16. Найдите расстояние от точки N до прямой KM , если расстояние от точки L до прямой PM равно 15.

Решение. Поскольку расстояния между параллельными прямыми равны, то $S_{PML} = S_{LNM}$, $S_{LNM} = S_{KNM}$ как площади треугольников с равными основаниями и высотами, следовательно, $S_{PML} = S_{KNM}$, то есть



$$\frac{1}{2} PM \cdot r(L, PM) = \frac{1}{2} KM \cdot r(N, KM), \text{ откуда } r(N, KM) = \frac{15 \cdot 16}{20} = 12.$$

Ответ: 12 .

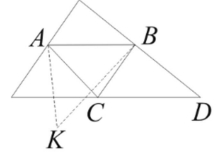
Задание 6 (2 вариант). Дан пятиугольник $ABCDE$, в котором прямая AB параллельна прямой CD , прямая DE параллельна прямой BC , длина диагонали AC равна 24, длина диагонали CE равна 20. Найдите расстояние от точки D до прямой AC , если расстояние от точки B до прямой CE равно 18.

Решение. Аналогично решению 1 варианта, $r(D, AC) = \frac{20 \cdot 18}{24} = 15$.

Ответ: 15 .

Задание 7 (1 и 2 вариант). На плоскости расположено n точек так, что площадь любого треугольника с вершинами в этих точках не превосходит 1. Докажите, что все эти точки можно покрыть одним треугольником площади 4.

Решение. Среди всех треугольников с вершинами в данных точках выберем такой, площадь которого не меньше площади любого из остальных треугольников, и обозначим его ABC . Проведем прямую CD параллельно стороне AB . Все точки будут лежать по ту же сторону от прямой CD , что и точки A и B (или на прямой CD). Иначе, найдется такая точка K , что $S_{ADK} > S_{ABC}$, этого не может быть в силу выбора ABC . Заметим, что $S_{CDB} = S_{ABC}$, поскольку $ABCD$ параллелограмм.



Проведя аналогичные прямые через вершины A и B , получим, что все точки лежат внутри треугольника, площадь которого в 4 раза больше площади треугольника ABC , т. е. меньше или равна 4, что и требовалось доказать.

Критерии проверки заданий 8-го класса

Задание	1	2	3	4	5	6	7	Итого
Баллы	12	12	12	16	16	16	16	100

Задача 1.

Баллы	
12	Обоснованно получен правильный ответ.
10	При правильном понимании условия задачи и правильном ответе, есть замечания к четкости изложения обоснования.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 2.

Баллы	
12	Обоснованно получен правильный ответ.
6	Верно составлена система уравнений по условию задачи, дальнейшее решение содержит ошибки.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 3.

Баллы	
12	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи (в том числе подбором, если рассмотрены все числа меньше искомого).
10	При правильном ходе решения есть замечания к четкости его изложения.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 4.

Баллы	
16	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	Найдено только одно из двух значений параметра.
5	Верно построена геометрическая модель задачи.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 5.

Баллы	
16	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При правильном ходе решения допущена арифметическая ошибка.
3	При попытке найти условия существования корней уравнения имеются верные рассуждения.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 6.

Баллы	
16	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
14	При правильном ходе доказательства есть замечания к четкости его изложения.
6	Получены промежуточные результаты, необходимые для решения задачи.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 7.

Баллы	
16	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
14	При правильном ходе доказательства есть замечания к четкости его изложения.
6	Получены промежуточные результаты, необходимые для решения задачи.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.