

2 тур 10 класс олимпиады МГТУ «Шаг в будущее»

2014-2015 учебный год

ВАРИАНТ 1

1. Сравните числа  $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$  и  $\sqrt[4]{\frac{4}{5}}$ .

2. Пусть  $\{a_n\}$  - арифметическая прогрессия, вычислите значение выражения (если оно определено)

$$\left( \left( \frac{1}{a_{2015}} + \frac{1}{a_{1580}} \right) : \left( \frac{1}{a_{2015}} - \frac{1}{a_{1580}} \right) \right)^{-1} \cdot \frac{\frac{1}{a_{2014}} + \frac{1}{a_{1581}}}{\frac{1}{a_{2014}} - \frac{1}{a_{1581}}}$$

3. Лицеист сбежал вниз по движущемуся эскалатору станции метро Чертановская и насчитал 30 ступенек. На станции он увидел завуча лица, побежал вверх по тому же эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора и насчитал 150 ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы, спустившись по неподвижному эскалатору?

4. Решите уравнение  $\frac{2|\cos x|}{\cos x} = x^2 - 10x + 23$ .

5. Найдите все целые числа  $x$  и  $y$ , удовлетворяющие уравнению  $(2y - 2x - 3633)(1580^{x^2} + x^2 + x + 3) = 1580$ .

6. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $(x^2 + 2x + (a + 3))^2 = a^2 x^2$  имеет три различных корня.

7. Решите уравнение  $|x - 1| + |x + 1| + |x - 2| + |x + 2| + \dots + |x - 10| + |x + 10| = 20x$ .

8. Найдите сумму корней уравнения  $f^3(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 8x^3 + \frac{2}{x}$ , где  $f(x) = 3x^3 - x$ .

9. В каждой вершине равностороннего треугольника со стороной  $\sqrt{10}$  построили окружности радиуса  $\sqrt{5}$ , внутренние области которых закрасили серой, бурой и малиновой краской. Найдите площадь серо-буро-малиновой области.

10. Дан треугольник со сторонами  $2\sqrt{13}, 2\sqrt{5}, 8$ . На его сторонах во внешнюю сторону построены квадраты. Найдите площадь треугольника с вершинами в центрах этих квадратов.

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Итого
Баллы	8	8	10	10	10	10	10	10	12	12	100

## ВАРИАНТ 2

1. Сравните числа  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  и  $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ .

2. Пусть  $\{a_n\}$  - арифметическая прогрессия, вычислите значение выражения (если оно определено)

$$\frac{\frac{1}{a_{2015}} - \frac{1}{a_{1580}}}{\frac{1}{a_{2015}} + \frac{1}{a_{1580}}} : \left( \left( \frac{1}{a_{2014}} + \frac{1}{a_{1581}} \right) : \left( \frac{1}{a_{2014}} - \frac{1}{a_{1581}} \right) \right)^{-1}$$

3. Бауманец сбежал вниз по движущемуся эскалатору станции метро Бауманская и насчитал 40 ступенек. На станции он вспомнил, что забыл в Университете курсовую работу, побежал вверх по тому же эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора и насчитал 280 ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы, спустившись по неподвижному эскалатору?

4. Решите уравнение  $\frac{2|\sin x|}{\sin x} = 8x - x^2 - 14$ .

5. Найдите все целые числа  $x$  и  $y$ , удовлетворяющие уравнению  $(2y + 2x + 3023)(1580x^2 + x^2 - x - 3) = 2014$ .

6. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $(x^2 + 3x + (a + 4))^2 = a^2x^2$  имеет три различных корня.

7. Решите уравнение  $|x + 1| + |x - 1| + |x + 2| + |x - 2| + \dots + |x + 10| + |x - 10| = -20x$ .

8. Найдите сумму корней уравнения  $g^3(x) - g\left(\frac{1}{x}\right) = 5x^3 + \frac{1}{x}$ , где  $g(x) = x^3 + x$ .

9. В каждой вершине квадрата со стороной  $\sqrt{6}$  построили окружности радиуса  $\sqrt{6}$ , внутренние области которых закрасили разными цветами: серым, бурым, малиновым и в крапинку. Найдите площадь области, закрашенной всеми четырьмя цветами.

10. Дан треугольник со сторонами  $2\sqrt{13}$ ,  $2\sqrt{5}$ ,  $8$ . На его сторонах во внутреннюю сторону построены квадраты. Найдите площадь треугольника с вершинами в центрах этих квадратов.

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Итого
Баллы	8	8	10	10	10	10	10	10	12	12	100

**Задание 1( 1 вариант).**

Сравните числа  $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$  и  $\sqrt[4]{\frac{4}{5}}$ .

**Решение.**

$$\sqrt[3]{\frac{3}{4}} < \sqrt[4]{\frac{4}{5}} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{1/3} < \left(\frac{4}{5}\right)^{1/4} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^4 < \left(\frac{4}{5}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{81}{256} < \frac{64}{125} \Leftrightarrow \frac{81}{256} < \frac{81}{162} = \frac{64}{128} < \frac{64}{125}.$$

**Ответ:**  $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} < \sqrt[4]{\frac{4}{5}}$ .

**Задание 1( 2 вариант).**

Сравните числа  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  и  $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ .

**Решение.**  $\sqrt{\frac{2}{3}} < \sqrt[3]{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} < \left(\frac{3}{4}\right)^{1/3} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^3 < \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{8}{27} < \frac{9}{16} \Leftrightarrow \frac{8}{27} < \frac{8}{19} < \frac{9}{16}.$

**Ответ:**  $\sqrt{\frac{2}{3}} < \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ .

**Задание 2( 1 вариант).**

Пусть  $\{a_n\}$ - арифметическая прогрессия, вычислите значение выражения (если оно определено)

$$\left( \left( \frac{1}{a_{2015}} + \frac{1}{a_{1580}} \right) : \left( \frac{1}{a_{2015}} - \frac{1}{a_{1580}} \right) \right)^{-1} \cdot \frac{\frac{1}{a_{2014}} + \frac{1}{a_{1581}}}{\frac{1}{a_{2014}} - \frac{1}{a_{1581}}}$$

**Решение.**

$$\left( \left( \frac{1}{a_{2015}} + \frac{1}{a_{1580}} \right) : \left( \frac{1}{a_{2015}} - \frac{1}{a_{1580}} \right) \right)^{-1} \cdot \frac{\frac{1}{a_{2014}} + \frac{1}{a_{1581}}}{\frac{1}{a_{2014}} - \frac{1}{a_{1581}}} =$$

$$= \left( \frac{a_{1580} + a_{2015}}{a_{1580} \cdot a_{2015}} : \frac{a_{1580} - a_{2015}}{a_{1580} \cdot a_{2015}} \right)^{-1} \cdot \frac{\frac{a_{1581} + a_{2014}}{a_{1581} \cdot a_{2014}}}{\frac{a_{1581} - a_{2014}}{a_{1581} \cdot a_{2014}}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{a_{1580} + a_{2015}}{a_{1580} - a_{2015}} \right)^{-1} \cdot \frac{a_{1581} + a_{2014}}{a_{1581} - a_{2014}} = \frac{a_{1580} - a_{2015}}{a_{1580} + a_{2015}} \cdot \frac{a_{1581} + a_{2014}}{a_{1581} - a_{2014}} = \\
&= \frac{(a_1 + 1579d) - (a_1 + 2014d)}{a_{1580} + a_{2015}} \cdot \frac{a_{1580} + d + a_{2015} - d}{(a_1 + 1580d) - (a_1 + 2013d)} = \\
&= \frac{1579d - 2014d}{a_{1580} + a_{2015}} \cdot \frac{a_{1580} + a_{2015}}{1580d - 2013d} = \frac{-435d}{-433d} = \frac{435}{433}
\end{aligned}$$

**Ответ:**  $\frac{435}{433}$ .

### Задание 2( 2 вариант).

Пусть  $\{a_n\}$ - арифметическая прогрессия, вычислите значение выражения (если оно определено)

$$\frac{\frac{1}{a_{2015}} - \frac{1}{a_{1580}}}{\frac{1}{a_{2015}} + \frac{1}{a_{1580}}} : \left( \left( \frac{1}{a_{2014}} + \frac{1}{a_{1581}} \right) : \left( \frac{1}{a_{2014}} - \frac{1}{a_{1581}} \right) \right)^{-1}$$

**Решение.**

$$\begin{aligned}
&\frac{\frac{1}{a_{2015}} - \frac{1}{a_{1580}}}{\frac{1}{a_{2015}} + \frac{1}{a_{1580}}} : \left( \left( \frac{1}{a_{2014}} + \frac{1}{a_{1581}} \right) : \left( \frac{1}{a_{2014}} - \frac{1}{a_{1581}} \right) \right)^{-1} = \\
&= \frac{a_{1580} - a_{2015}}{a_{1580} + a_{2015}} : \left( \frac{a_{1581} + a_{2014}}{a_{1581} \cdot a_{2014}} : \frac{a_{1581} - a_{2014}}{a_{1581} \cdot a_{2014}} \right)^{-1} = \\
&= \frac{a_{1580} - a_{2015}}{a_{1580} + a_{2015}} : \left( \frac{a_{1581} + a_{2014}}{a_{1581} - a_{2014}} \right)^{-1} = \frac{a_{1580} - a_{2015}}{a_{1580} + a_{2015}} \cdot \frac{a_{1581} + a_{2014}}{a_{1581} - a_{2014}} = \\
&= \frac{(a_1 + 1579d) - (a_1 + 2014d)}{a_{1580} + a_{2015}} \cdot \frac{a_{1580} + d + a_{2015} - d}{(a_1 + 1580d) - (a_1 + 2013d)} = \\
&= \frac{1579d - 2014d}{a_{1580} + a_{2015}} \cdot \frac{a_{1580} + a_{2015}}{1580d - 2013d} = \frac{-435d}{-433d} = \frac{435}{433}
\end{aligned}$$

**Ответ:**  $\frac{435}{433}$ .

### Задание 3( 1 вариант).

Лицеист сбежал вниз по движущемуся эскалатору станции метро Чертановская и насчитал 30 ступенек. На станции он увидел завуча лица, побежал вверх по тому же эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора и насчитал 150 ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы, спустившись по неподвижному эскалатору?

**Решение.**

При движении вниз лицеист насчитал меньше ступеней, чем при движении вверх, следовательно, эскалатор движется вниз.

Пусть  $n$  - число ступеней у неподвижного эскалатора,

$x \left( \frac{\text{ступеней}}{\text{минута}} \right)$  - скорость движения лицеиста относительно эскалатора,

$y \left( \frac{\text{ступеней}}{\text{минута}} \right)$  - скорость движения эскалатора,

$t_1$  (мин) - время движения вниз,

$t_2$  (мин) - время движения вверх, тогда

$$\begin{cases} xt_1 = 30 = n - yt_1 \\ xt_2 = 150 = n + yt_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{30}{t_1} = \frac{n}{t_1} - y \\ x = \frac{150}{t_2} = \frac{n}{t_2} + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{30}{t_1} = \frac{150}{t_2} \\ \frac{30}{t_1} = \frac{n}{t_1} - y \\ \frac{150}{t_2} = \frac{n}{t_2} + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_2 = 5t_1 \\ \frac{30}{t_1} + \frac{150}{t_2} = \frac{n}{t_1} + \frac{n}{t_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{60}{t_1} = \frac{n}{t_1} + \frac{n}{5t_1} \Rightarrow 6n = 300 \Leftrightarrow n = 50$$

**Ответ:** 50.

**Задание 3** ( 2 вариант).

Бауманец сбежал вниз по движущемуся эскалатору станции метро Бауманская и насчитал 40 ступенек. На станции он вспомнил, что забыл в Университете курсовую работу, побежал вверх по тому же эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора и насчитал 280 ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы, спустившись по неподвижному эскалатору?

**Решение.**

При движении вниз бауманец насчитал меньше ступеней, чем при движении вверх, следовательно, эскалатор движется вниз.

Пусть  $n$  - число ступеней у неподвижного эскалатора,

$x \left( \frac{\text{ступеней}}{\text{минута}} \right)$  - скорость движения бауманца относительно эскалатора,

$y \left( \frac{\text{ступеней}}{\text{минута}} \right)$  - скорость движения эскалатора,

$t_1$  (мин) - время движения вниз,

$t_2$  (мин) - время движения вверх, тогда

$$\begin{cases} xt_1 = 40 = n - yt_1 \\ xt_2 = 280 = n + yt_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{40}{t_1} = \frac{n}{t_1} - y \\ x = \frac{280}{t_2} = \frac{n}{t_2} + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{40}{t_1} = \frac{280}{t_2} \\ \frac{40}{t_1} = \frac{n}{t_1} - y \\ \frac{280}{t_2} = \frac{n}{t_2} + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_2 = 7t_1 \\ \frac{40}{t_1} + \frac{280}{t_2} = \frac{n}{t_1} + \frac{n}{t_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{80}{t_1} = \frac{n}{t_1} + \frac{n}{7t_1} \Rightarrow 8n = 560 \Leftrightarrow n = 70$$

**Ответ:** 70.

**Задание 4**(1 вариант). Решите уравнение  $\frac{2|\cos x|}{\cos x} = x^2 - 10x + 23$ .

**Решение.**

$$\frac{2|\cos x|}{\cos x} = x^2 - 10x + 23 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > 0 \\ x^2 - 10x + 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > 0 \\ x = 7; 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 7.$$

$$\begin{cases} \cos x < 0 \\ x^2 - 10x + 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x < 0 \\ x = 5 \end{cases}$$

**Ответ:** 7.

**Задание 4**(2 вариант) Решите уравнение  $\frac{2|\sin x|}{\sin x} = 8x - x^2 - 14$ .

**Решение.**

$$\frac{2|\sin x|}{\sin x} = 8x - x^2 - 14 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ x^2 - 8x + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$$

$$\begin{cases} \sin x < 0 \\ x^2 - 8x + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < 0 \\ x = 2; 6 \end{cases}$$

**Ответ:** 6.

**Задание 5**(1 вариант) Найдите все целые числа  $x$  и  $y$ , удовлетворяющие уравнению  $(2y - 2x - 3633)(1580x^2 + x^2 + x + 3) = 1580$ .

**Решение.** Произведение двух целых чисел равно 1580 – четному числу. Выражение в первой скобке – нечетное число. Значит, выражение во второй скобке должно быть четным числом. Запишем  $1580x^2 + x^2 + x + 3 = 1580x^2 + x(x+1) + 3$ . Выражение  $x(x+1)$  - четное,  $x(x+1) + 3$  - нечетное, значит,  $1580x^2$  должно быть нечетным. Это возможно в единственном случае при  $x=0$ . Подставляем найденное значение  $x$ , получим уравнение  $(2y - 3633)4 = 1580$ , откуда  $y = 2014$ .

**Ответ:**  $x = 0, y = 2014$ .

**Задание 5** (2 вариант) Найдите все целые числа  $x$  и  $y$ , удовлетворяющие уравнению  $(2y + 2x + 3023)(1580x^2 + x^2 - x - 3) = 2014$ .

**Решение.** Аналогично решению 1 варианта,  $x=0$ . Подставляем найденное значение  $x$ , получим уравнение  $(2y + 3023)(-2) = 2014$ , откуда  $y = -2015$ .

**Ответ:**  $x = 0, ..$

**Задание 6** (1 вариант) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $(x^2 + 2x + (a+3))^2 = a^2x^2$  имеет три различных корня.

**Решение.** Преобразуем данное уравнение как разность квадратов.

$$(x^2 + 2x + (a+3))^2 = a^2x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + (a+3) = ax \\ x^2 + 2x + (a+3) = -ax \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (2-a)x + (a+3) = 0 \quad (1) \\ x^2 + (2+a)x + (a+3) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Исходное уравнение имеет три различных корня в 3-х случаях: а) если уравнения (1) и (2) имеют по два различных корня, из которых один общий; б) уравнение (1) имеет два различных корня, уравнение (2) имеет единственный корень и у уравнений нет общих корней; в) уравнение (2) имеет два различных корня, уравнение (1) имеет единственный корень и у уравнений нет общих корней.

Рассмотрим случай а):  $x^2 + (2-a)x + (a+3) = x^2 + (2+a)x + (a+3) = 0 \Leftrightarrow ax = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ .

Подставим  $a = 0$ . Имеем  $\begin{cases} x^2 + 2x + 3 = 0 \\ x^2 + 2x + 3 = 0 \end{cases}$ . Полученные уравнения корней не имеют,

значит,  $a = 0$  не подходит.

Подставим  $x=0$ . Имеем  $a=-3$ , откуда  $\begin{cases} x^2+5x=0 \\ x^2-x=0 \end{cases}$ . Данная система имеет три

различных корня, значит,  $a=-3$  подходит.

$$\text{Рассмотрим случаи б) и в): } \begin{cases} D(1) > 0 \\ D(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 8a - 8 > 0 \\ a^2 - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\sqrt{8} \\ a = 4 + 2\sqrt{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} D(2) > 0 \\ D(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 8 > 0 \\ a^2 - 8a - 8 = 0 \end{cases}$$

**Ответ:**  $-3; -\sqrt{8}; 4 + 2\sqrt{6}$ .

**Задание 6** (2 вариант) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение

$(x^2 + 3x + (a+4))^2 = a^2x^2$  имеет три различных корня.

**Решение.** Аналогично решению варианта 1, имеем

$$(x^2 + 3x + (a+4))^2 = a^2x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (3-a)x + (a+4) = 0 \quad (1) \\ x^2 + (3+a)x + (a+4) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

В случае а) имеем, либо  $a=0$ , либо  $x=0$ . При  $a=0$  уравнения не имеют решений,

при  $x=0$  получаем, что  $a=-4$ , при котором совокупность  $\begin{cases} x^2 + 7x = 0 \\ x^2 - x = 0 \end{cases}$  имеет три

различных решения.

$$\text{В случаях б) и в) имеем } \begin{cases} a^2 - 10a - 7 > 0 \\ a^2 + 2a - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 + 4\sqrt{2} \\ a = -1 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 2a - 7 > 0 \\ a^2 - 10a - 7 = 0 \end{cases}$$

**Ответ:**  $-4; -1 - 2\sqrt{2}; 5 + 4\sqrt{2}$ .

**Задание 7** (1 вариант).

Решите уравнение  $|x-1| + |x+1| + |x-2| + |x+2| + \dots + |x-10| + |x+10| = 20x$ .

**Решение.**



Левая часть уравнения может принимать только неотрицательные значения

$$\Rightarrow 20x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1 \geq 1 > 0 \\ x+2 \geq 2 > 0 \\ \dots \\ x+10 \geq 10 > 0 \end{cases} \quad \text{тогда уравнение примет вид}$$

$$|x-1| + |x-2| + \dots + |x-10| + (x+1) + (x+2) + \dots + (x+10) = 20x$$

$$|x-1| + |x-2| + \dots + |x-10| + 10x + 55 = 20x$$

$$|x-1| + |x-2| + \dots + |x-10| = 10x - 55 \Rightarrow 10x - 55 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5,5 \Rightarrow \begin{cases} x-5 \geq 0,5 > 0 \\ \dots \\ x-1 \geq 4,5 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(x-1) + (x-2) + \dots + (x-5) + |x-6| + |x-7| + \dots + |x-10| = 10x - 55$$

$$5x - 15 + |x-6| + |x-7| + \dots + |x-10| = 10x - 55$$

$$|x-6| + |x-7| + \dots + |x-10| = 5x - 40 \Rightarrow 5x - 40 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 8 \Rightarrow \begin{cases} x-6 \geq 2 > 0 \\ x-7 \geq 1 > 0 \\ x-8 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(x-6) + (x-7) + (x-8) + |x-9| + |x-10| = 5x - 40$$

$$3x - 21 + |x-9| + |x-10| = 5x - 40$$

$$|x-9| + |x-10| = 2x - 19 \Rightarrow 2x - 19 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 9,5 \Rightarrow x - 9 \geq 0,5 > 0$$

$$x - 9 + |x-10| = 2x - 19$$

$$|x-10| = x - 10 \Rightarrow x \geq 10$$

**Ответ:**  $[10; +\infty)$ .

**Задание 7** (2 вариант).

Решите уравнение  $|x+1| + |x-1| + |x+2| + |x-2| + \dots + |x+10| + |x-10| = -20x$ .

**Решение.**

Левая часть уравнения может принимать только неотрицательные значения

$$\Rightarrow -20x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 \leq -1 < 0 \\ x-2 \leq -2 < 0 \\ \dots \\ x-10 \leq -10 < 0 \end{cases} \quad \text{тогда уравнение примет вид}$$

$$|x+1| + |x+2| + \dots + |x+10| - (x-1) - (x-2) - \dots - (x-10) = -20x$$

$$|x+1|+|x+2|+\dots+|x+10|-10x+55=-20x$$

$$|x+1|+|x+2|+\dots+|x+10|=-10x-55 \Rightarrow -10x-55 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \leq -5,5 \Rightarrow \begin{cases} x+5 \leq -0,5 < 0 \\ \dots \\ x+1 \leq -4,5 < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$-(x+1)-(x+2)-\dots-(x+5)+|x+6|+|x+7|+\dots+|x+10|=-10x-55$$

$$-5x-15+|x+6|+|x+7|+\dots+|x+10|=-10x-55$$

$$|x+6|+|x+7|+\dots+|x+10|=-5x-40 \Rightarrow -5x-40 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -8 \Rightarrow \begin{cases} x+6 \leq -2 < 0 \\ x+7 \leq -1 < 0 \Rightarrow \\ x+8 \leq 0 \end{cases}$$

$$-(x+6)-(x+7)-(x+8)+|x+9|+|x+10|=-5x-40$$

$$-3x-21+|x+9|+|x+10|=-5x-40$$

$$|x+9|+|x+10|=-2x-19 \Rightarrow -2x-19 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -9,5 \Rightarrow x+9 \leq -0,5 < 0$$

$$-(x+9)+|x+10|=-2x-19$$

$$|x+10|=-x-10 \Rightarrow x+10 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -10$$

**Ответ:**  $(-\infty; -10]$ .

**Задание 8** (1 вариант).

Найдите сумму корней уравнения  $f^3(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 8x^3 + \frac{2}{x}$ , где  $f(x) = 3x^3 - x$ .

**Решение.**

Рассмотрим функцию  $g(x) = f^3(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) - 8x^3 - \frac{2}{x}$ , тогда корни исходного уравнения – корни уравнения  $g(x) = 0$ .

Иследуем функцию  $g$  на четность:

1.  $D(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  - симметрична относительно 0

2.  $f(-x) = 3(-x)^3 - (-x) = -3x^3 + x = -(3x^3 - x) = -f(x)$

$$g(-x) = f^3(-x) + f\left(\frac{1}{-x}\right) - 8(-x)^3 - \frac{2}{-x} = -f^3(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) + 8x^3 + \frac{2}{x} = -g(x)$$

Следовательно,  $g$  - нечетная функция  $\Rightarrow$  если  $x_0$  - корень исходного уравнения, то  $-x_0$  также является корнем уравнения  $\Rightarrow$  сумма корней равна нулю, если корни существуют

Проверим  $x=1$ :  $f(1) = 3 \cdot 1^3 - 1 = 2$ ,  $f\left(\frac{1}{1}\right) = f(1) = 2$ , подставляем в исходное уравнение:  $10=10$  - верно  $\Rightarrow x=1$  - корень  $\Rightarrow$  корни существуют

**Ответ:** 0.

**Задание 8** (2 вариант).

Найдите сумму корней уравнения  $g^3(x) - g\left(\frac{1}{x}\right) = 5x^3 + \frac{1}{x}$ , где  $g(x) = x^3 + x$ .

**Решение.**

Рассмотрим функцию  $f(x) = g^3(x) - g\left(\frac{1}{x}\right) - 5x^3 - \frac{1}{x}$ , тогда корни исходного уравнения – корни уравнения  $f(x) = 0$ .

Исследуем функцию  $f$  на четность:

1.  $D(f) = R \setminus \{0\}$  - симметрична относительно 0

2.  $g(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -g(x)$

$$f(-x) = g^3(-x) - g\left(\frac{1}{-x}\right) - 5(-x)^3 - \frac{1}{-x} = -g^3(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) + 5x^3 + \frac{1}{x} = -f(x)$$

Следовательно,  $f$  - нечетная функция  $\Rightarrow$  если  $x_0$  - корень исходного уравнения, то  $-x_0$  также является корнем уравнения  $\Rightarrow$  сумма корней равна нулю, если корни существуют

Проверим  $x=1$ :  $g(1) = 1^3 + 1 = 2$ ,  $g\left(\frac{1}{1}\right) = g(1) = 2$ , подставляем в исходное уравнение:

$6=6$  - верно  $\Rightarrow x=1$  - корень  $\Rightarrow$  корни существуют

**Ответ:** 0.

**Задание 9** (1 вариант). В каждой вершине равностороннего треугольника со стороной  $\sqrt{10}$  построили окружности радиуса  $\sqrt{5}$ , внутренние области которых закрасили серой, бурой и малиновой краской. Найдите площадь серо-буро-малиновой области.

**Решение.** В силу симметрии, площади фигур, образованных при пересечении окружностей и треугольника, равны. Площадь всего треугольника равна

$$3s + 3p + x = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ (} a \text{-сторона треугольника), площадь сектора с углом } 60^\circ \text{ равна}$$

$$s + 2p + x = \frac{\pi R^2}{6} = \frac{5\pi}{6} \text{ (} R \text{-радиус окружности). Из прямоугольного треугольника } DEC \text{ имеем}$$

$$DE = \sqrt{DC^2 - EC^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2} = EC.$$

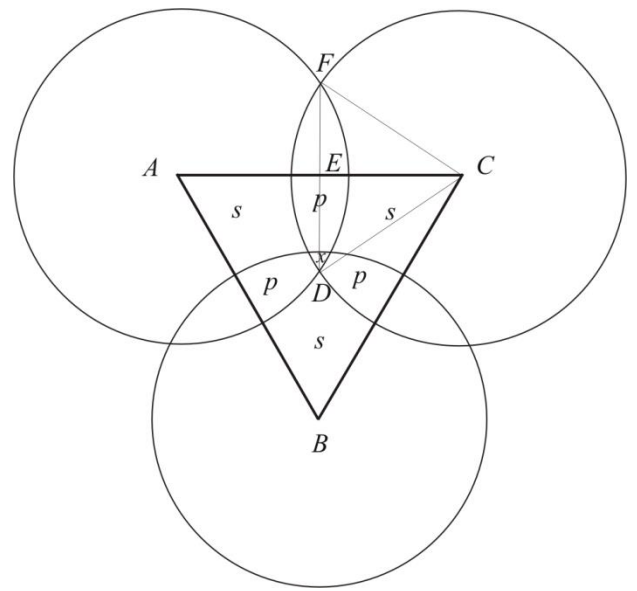
Следовательно, треугольник  $DEC$  — равнобедренный и  $\angle DCE = 45^\circ$ , значит,  $\angle DCF = 90^\circ$  и площадь сектора  $DCF$  равна

$$S_{\text{сект} DCF} = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{5\pi}{4}.$$

Поскольку площадь треугольника  $DCF$  равна

$$S_{DCF} = \frac{1}{2} DF \cdot EC = \frac{5}{2}, \text{ то площадь сегмента с дугой}$$

$$DF \text{ равна } S_{\text{сегм}} = \frac{5\pi}{4} - \frac{5}{2}.$$



Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 3s + 3p + x = \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ s + 2p + x = \frac{5\pi}{6} \\ p + x = \frac{5\pi}{4} - \frac{5}{2} \end{cases}, \text{ решая которую,}$$

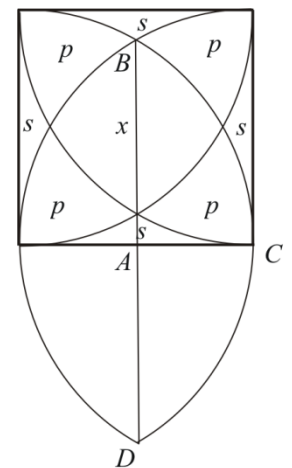
находим, что  $x = \frac{5\pi}{4} - \frac{15}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}.$

Ответ:  $\frac{5\pi}{4} - \frac{15}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}.$

**Задание 9** (2 вариант). В каждой вершине квадрата со стороной  $\sqrt{6}$  построили окружности радиуса  $\sqrt{6}$ , внутренние области которых закрасили разными цветами: серым, бурым, малиновым и в крапинку. Найдите площадь области, закрашенной всеми четырьмя цветами.

**Решение.** Площадь квадрата равна  $4s + 4p + x = R^2 = 6$  ( $R$ -радиус окружности), площадь сектора с углом  $90^\circ$  равна  $2s + 3p + x = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{3\pi}{2}.$

Площадь сегмента с дугой  $BD$  равна площади сектора с дугой  $BD$  без площади треугольника  $BKD$ , значит,  $x + 2p + s = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{1}{2} BD \cdot AC$ , откуда (учитывая, что для треугольника  $ABC$  выполнено  $AC = \frac{1}{2} BC$ )



$$x + 2p + s = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{\sqrt{3}R^2}{4}.$$

Получаем систему уравнений 
$$\begin{cases} 4s + 4p + x = 6 \\ 2s + 3p + x = \frac{3\pi}{2} \\ x + 2p + s = 2\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases},$$
 решая которую, находим, что

$$x = 2\pi - 6\sqrt{3} + 6.$$

Ответ:  $2\pi - 6\sqrt{3} + 6$ .

**Задание 10** (1 вариант). Дан треугольник со сторонами  $2\sqrt{13}, 2\sqrt{5}, 8$ . На его сторонах во внешнюю сторону построены квадраты. Найдите площадь треугольника с вершинами в центрах этих квадратов.

Решение. Пусть  $ABC$  данный треугольник и  $AB = 2\sqrt{13}, BC = 2\sqrt{5}, AC = 8$ . Пусть  $K, M, N$  соответственно центры квадратов, построенных на сторонах  $AB, BC, AC$ .

Тогда, по теореме косинусов для треугольников  $AKN$  (учитывая, что диагонали квадрата образуют со сторонами угол  $45^\circ$  и  $AK = \frac{AB}{\sqrt{2}}, AN = \frac{AC}{\sqrt{2}}$ ) получаем

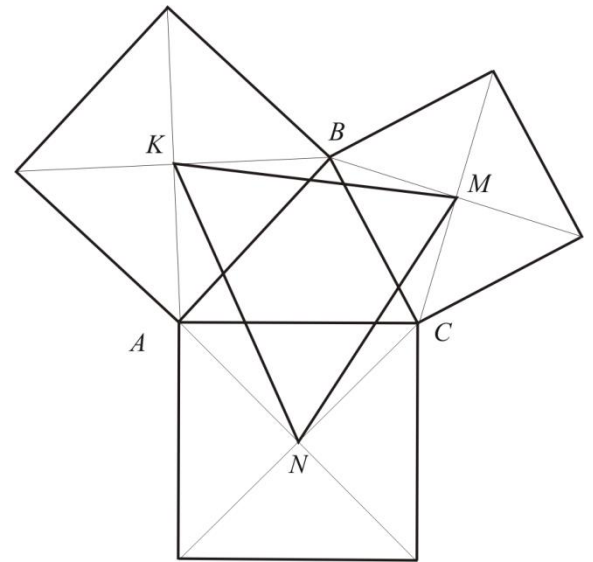
$$\begin{aligned} KN^2 &= AK^2 + AN^2 - 2AK \cdot AN \cdot \cos\left(\angle A + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= AK^2 + AN^2 + 2AK \cdot AN \cdot \sin \angle A = \end{aligned}$$

$$= \frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} + AB \cdot AC \cdot \sin \angle A = \frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} + 2S_{ABC}.$$

Аналогично, для треугольников  $BKM, CMN$  получаем  $KM^2 = \frac{AB^2}{2} + \frac{BC^2}{2} + 2S_{ABC}$  и

$$NM^2 = \frac{AC^2}{2} + \frac{BC^2}{2} + 2S_{ABC}.$$

Найдем площадь треугольника  $ABC$ . Можно вычислить эту площадь, предварительно найдя высоту треугольника (высота равна 4), или воспользоваться формулой Герона, получим  $S_{ABC} = 16$ .



Подставляем числовые значения, находим,  $KN^2 = 90$ ,  $KM^2 = 68$ ,  $NM^2 = 74$ .

По формуле Герона для площади треугольника через квадраты его сторон имеем

$$S_{KMN} = \frac{1}{4} \sqrt{4KM^2 \cdot MN^2 - (KM^2 + MN^2 - KN^2)^2} = 33.$$

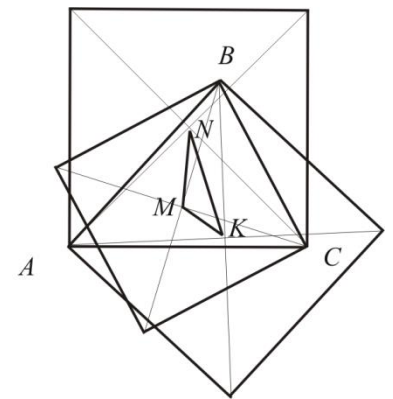
Ответ: 33.

**Задание 10** (2 вариант). Дан треугольник со сторонами  $2\sqrt{13}$ ,  $2\sqrt{5}$ , 8. На его сторонах во внутреннюю сторону построены квадраты. Найдите площадь треугольника с вершинами в центрах этих квадратов.

Решение. Пусть  $ABC$  данный треугольник и  $AB = 2\sqrt{13}$ ,  $BC = 2\sqrt{5}$ ,  $AC = 8$ . Пусть  $K$ ,  $M$ ,  $N$  соответственно центры квадратов, построенных на сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$ .

Тогда, по теореме косинусов для треугольников  $AKN$  (учитывая, что диагонали квадрата образуют со сторонами угол

$45^\circ$  и  $AK = \frac{AB}{\sqrt{2}}$ ,  $AN = \frac{AC}{\sqrt{2}}$ ) получаем



$$KN^2 = AK^2 + AN^2 - 2AK \cdot AN \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - (\angle A - \frac{\pi}{4})\right) =$$

$$= AK^2 + AN^2 - 2AK \cdot AN \cdot \sin \angle A =$$

$$= \frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} - AB \cdot AC \cdot \sin \angle A = \frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} - 2S_{ABC}.$$

Аналогично, для треугольников  $BKM$ ,  $CMN$  получаем  $KM^2 = \frac{AB^2}{2} + \frac{BC^2}{2} - 2S_{ABC}$  и

$$NM^2 = \frac{AC^2}{2} + \frac{BC^2}{2} - 2S_{ABC}.$$

Найдем площадь треугольника  $ABC$ . Можно вычислить эту площадь, предварительно найдя высоту треугольника (высота равна 4), или воспользоваться формулой Герона, получим  $S_{ABC} = 16$ .

Подставляем числовые значения, находим,  $KN^2 = 26$ ,  $KM^2 = 4$ ,  $NM^2 = 10$ .

По формуле Герона для площади треугольника через квадраты его сторон имеем

$$S_{KMN} = \frac{1}{4} \sqrt{4KM^2 \cdot MN^2 - (KM^2 + MN^2 - KN^2)^2} = 1.$$

Ответ: 1.

## Критерии проверки заданий 10-го класса

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Итого
Баллы	8	8	10	10	10	10	10	10	12	12	<b>100</b>

Задача 1.

Баллы	
8	Обоснованно получен правильный ответ
7	Обоснование недостаточно четкое
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 2.

Баллы	
8	Обоснованно получен правильный ответ
6	Решение содержит арифметическую ошибку
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 3.

10	Обоснованно получен правильный ответ
8	Решение содержит арифметическую ошибку
4	Верно составлена система уравнений
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 4.

10	Обоснованно получен правильный ответ.
8	Корни квадратных уравнений найдены верно, отбор корней сделан верно только в одной системе
5	Модуль раскрыт верно, корни квадратных уравнений найдены верно, ошибка при отборе корней
2	Верно раскрыт модуль
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 5.

10	Обоснованно получен правильный ответ
8	Арифметическая ошибка в решении или недостатки в обосновании

0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.
---	---

Задача 6.

10	Обоснованно получен правильный ответ.
8	Все случаи рассмотрены, решение содержит арифметическую ошибку или ошибку на последнем этапе решения
6	Не сделана проверка в случае существования общего корня
4	Не рассмотрен случай существования общего корня
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 7.

10	Обоснованно получен правильный ответ.
8	Решение содержит арифметическую ошибку
2	Решение верно начато, раскрыта часть модулей
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 8.

10	Обоснованно получен правильный ответ.
8	Не сделана проверка существования корней уравнения
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 9.

12	Обоснованно получен правильный ответ.
10	Решение содержит арифметическую ошибку
6	Получена итоговая система уравнений, решение содержит ошибки в преобразованиях или не закончено
4	Получены некоторые верные промежуточные результаты
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 10.

12	Обоснованно получен правильный ответ
10	Решение содержит арифметическую ошибку
8	Верно получены значения сторон искомого треугольника
4	Стороны искомого треугольника выражены через элементы данного треугольника
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.