

Московский государственный технический университет  
имени Н.Э.Баумана

Олимпиада школьников «Шаг в будущее»  
XIX олимпиада для учащихся 8 – 10 классов

МАТЕМАТИКА 1 тур (заочный)

2015-2016 учебный год

9 класс

1. Катер и корабль движутся равномерно и прямолинейно в один и тот же порт. В начальный момент времени катер, корабль и порт образуют равносторонний треугольник. Когда катер проплыл 36 км, корабль, катер и порт стали образовывать прямоугольный треугольник, а когда катер прибыл в порт, кораблю оставалось до порта 40 км. Определите расстояние между кораблём и катером в начальный момент времени.

(15 баллов)

2. Изобразите на плоскости  $xOy$  множество точек, удовлетворяющих системе

неравенств: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 30 \leq 10x + 6y \\ (y + 2 - x) \cdot (y + x - 8) \geq 0 \end{cases}$$

Обоснуйте построение.

(15 баллов)

3. Функция  $y = f(x)$  – чётная, её областью определения является множество действительных чисел. Известно, что уравнение  $5f(x) - 4 = 0$  имеет 2015 различных корней. Найдите  $f(0)$ . Ответ обоснуйте.

(15 баллов)

4. На кружок по математике ходят только рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят только правду, а лжецы – только ложь. Все участники кружка родились в разные дни и в течение учебного года решили разное количество задач. В конце учебного года каждый участник кружка сделал два заявления: а) на кружке не найдётся и 20-ти человек, которые были бы старше меня; б) больше меня решили задач по крайней мере 15 человек. Сколько человек посещали кружок в течение года? Ответ обоснуйте.

(15 баллов)

5. При каких значениях параметра  $p$  уравнение  $(p - 2) \cdot (x^2 - 6x + 9) - 2(p + 1) \cdot |x - 3| + p + 2 = 0$  имеет ровно два различных решения?

*(20 баллов)*

6. На прямой, проходящей через центр  $O$  окружности радиуса  $12$  см, взяты точки  $A$  и  $B$ , лежащие по разные стороны от точки  $O$  так, что  $OA=15$  см,  $OB=13$  см. Из точек  $A$  и  $B$  проведены касательные к окружности, точки касания которых лежат по одну сторону от прямой  $AB$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $C$  – точка пересечения этих касательных.

*(20 баллов)*