Второй (заключительный) этап XIX олимпиады школьников

«Шаг в будущее» для 8-10 классов по образовательному предмету

«Математика», 8 класс, февраль 2016 г.

Вариант № 1

Задача 1. Для некоторых целых чисел x и у число 3x+2у делится на 29. Делится ли число 23x +25у на 29?

Задача 2 Винни-Пух и Пятачок начинают бегать вокруг круглого пруда, находясь на диаметрально противоположных берегах. После 10 мин бега Пятачок в третий раз обогнал Винни-Пуха. Через сколько времени он обгонит Винни Пуха в четвертый раз?.

Задача 3. Когда катер проплывал по реке мимо городской пристани, от него отвязался спасательный круг. Пропажа была замечена капитаном только через 15 минут. Повернув назад, он догнал потерю в 250 метрах от пристани. Найти скорость течения реки. Ответ дать в км/час.

Задача 4. В параллелограмме АВСД точка М середина ВС, АМ пересекается с ВД в точке О. В треугольнике $A_1B_1C_1$ медиана A_1M_1 и биссектриса $B_1Д_1$ пересекаются в точке O_1 под углом 90 градусов. Найти отношение площадей полученных четырехугольников ОМСД и $O_1M_1C_1Д_1$, при условии, что площади треугольника $A_1B_1C_1$ и параллелограмма АВСД равны.

Задача 5. Построить график функции y=f(x)

$$f(x)=\begin{cases} 2(1-|x-3|)\,, & -4\le x<4\\ x^2-12x+32\,, & 4<x<6\\ \dfrac{(3x-24)(x-11)}{x-8}+11\,, & 6<x<10\\ \dfrac{34-3x}{x-11}\,, & 10<x<11\end{cases}$$

а. Указать область значения и область определения функции.

б. Написать уравнения всех прямых, проходящих через точку А(-4;-4) и имеющих с графиком функции единственную общую точку.

Задача 6. Каждая диагональ выпуклого пятиугольника отсекает от него треугольник площадь которого равна $\frac{2}{7}$. Найти площадь пятиугольника.

Задания	1	2	3	4	5	6
Баллы	10	10	15	20	25	20

Второй (заключительный) этап XIX олимпиады школьников «Шаг в будущее» для 8-10 классов по образовательному предмету «Математика», 8 класс, февраль 2016 г.

Вариант № 2

Задача 1. Для некоторых целых чисел x и y число 2x+3y делится на 51. Делится ли число 37x +30y на 51?

Задача 2. Незнайка очень торопился в гости к Пончику , поэтому за две трети времени от выхода до назначенного времени он прошел три четверти пути. После чего сбавил скорость и пришел в гости вовремя. Во сколько раз он сбавил скорость?

Задача 3. Проплывая по реке, пловец потерял под мостом флягу, но заметил это только через 12 минут. Повернув назад, он догнал флягу в 200 м от моста. Найти скорость течения реки. Ответ дать в км/час.

Задача 4. В параллелограмме АВСД точка М середина ВС, АМ пересекается с ВД в точке О. В трапеции $A_1B_1C_1Д_1$, основание A_1B_1 в два раза меньше основания $C_1Д_1$. Точка M_1 середина B_1C_1 и A_1M_1 пересекается с $B_1Д_1$ в точке O_1. Найти отношение площадей полученных четырехугольников ОМСД и $O_1M_1C_1Д_1$, при условии равенства площадей трапеции и параллелограмма.

Задача 5. Построить график функции y=f(x)

$$f(x) = \begin{cases} -x - \dfrac{8x+80}{x+10}, & x < -6 \\ -(x+4)^2 + \dfrac{2x+8}{x+4}, & -6 \le x < -1 \\ |3x| - 10, & -1 < x \le 5 \end{cases}$$

а. Указать область значения и область определения функции.

б. Написать уравнения всех прямых, проходящих через точку А(8;2) и имеющих с графиком функции единственную общую точку.

Задача 6. Каждая диагональ выпуклого пятиугольника отсекает от него треугольник площадь которого равна $\frac{2}{3}$. Найти площадь пятиугольника.

Задания	1	2	3	4	5	6
Баллы	10	10	15	20	25	20

Решение заданий для 8 класса

Вариант № 1

1.Заметим, что $23x + 25y = 29(x + y) - 2(3x + 2y)$. Каждое слагаемое делится на 29, поэтому и сумма тоже.

2.За длину окружности пруда возьмем 1, скорости бегунов x и y. Получим систему:

$10x - 10y = 2{,}5$, откуда $x - y = 0{,}25$. Искомое время $t = \frac{1}{0{,}25} = 4$мин.

3. Из уравнения $15 + \frac{15(v_k - v_t)}{v_k + v_t} + \frac{250}{v_k + v_t} = \frac{250}{v_t}$ найдем $v_t = \frac{25}{3}\frac{\text{м}}{\text{мин}} = \frac{1}{2}\frac{\text{км}}{\text{час}}$

4. Из подобия треугольников $\frac{AO}{OM} = \frac{2}{1}$. Обозначим $S_{BOM} = S$. Тогда $S_{AOM} = 2S$; $S_{AOD} = 4S$;

$S_{BDC} = 6S$; $S_{DOMC} = 5S$. Отсюда $S_{DOMC} : S_{ABCD} = 5:12$

По свойству биссектрисы $\frac{A_1D_1}{D_1C_1} = \frac{1}{2}$. По теореме Менелая $\frac{OD_1}{B_1O} = \frac{1}{3}$. Обозначим $S_{A_1OD_1} = S$. Тогда $S_{A_1OB_1} = 3S$; $S_{M_1OB_1} = 3S$; $S_{M_1A_1C_1} = 6S$; $S_{M_1D_1C_1O} = 5S$.

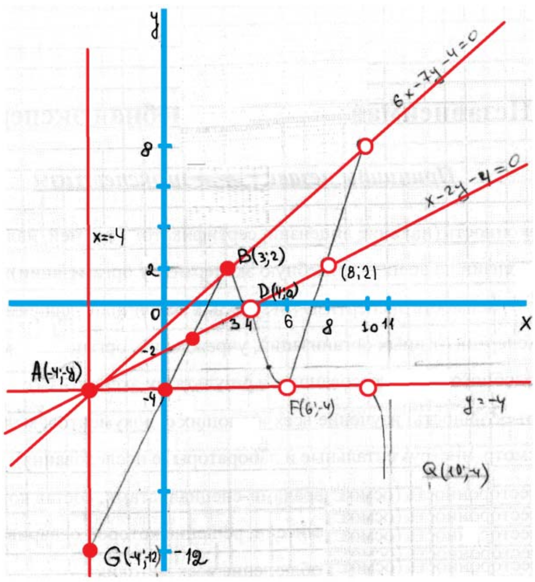
Отсюда $S_{M_1D_1C_1O} : S_{B_1A_1C_1} = 5:12$

Ответ: 1:1

5.$D_f = [-4; 4) \cup (4; 6) \cup (6; 10) \cup (10; 11)$

$E_f = [-\infty; 8)$

Прямые: $6x - 7y - 4 = 0$; $x - 2y - 4 = 0$; $y = -4$



Решение задачи 6 далее

Вариант № 2

1. Заметим, что $37x + 30y = 51(x + y) - 7(2x + 3y)$. Каждое слагаемое делится на 31, поэтому и сумма тоже.

2. Из условия $\frac{3}{4}S = \frac{2}{3}tv$. Поэтому отношение $\frac{S}{t} = \frac{8}{9}v$.

$v' = \frac{\frac{S}{4}}{\frac{t}{3}} = \frac{2}{3}v$ Ответ: в полтора раза

3. Из уравнения $12 + \frac{12(v_k - v_t)}{v_k + v_t} + \frac{200}{v_k + v_t} = \frac{200}{v_t}$ найдем $v_t = \frac{25}{3}\frac{\text{м}}{\text{мин}} = \frac{1}{2}\frac{\text{км}}{\text{час}}$

4. Из подобия треугольников $\frac{AO}{OM} = \frac{2}{1}$. Обозначим $S_{BOM} = S$. Тогда $S_{AOM} = 2S$; $S_{AOD} = 4S$;

$S_{BDC} = 6S$; $S_{DOMC} = 5S$. Отсюда $S_{DOMC}: S_{ABCD} = 5:12$

Из подобия треугольников $\frac{D_1O_1}{O_1B_1} = \frac{3}{1}$; $A_1O_1 = O_1M_1$. Обозначим $S_{B_1O_1M_1} = S$.

Тогда $S_{B_1O_1A_1} = S$; $S_{D_1O_1A_1} = 3S$; $S_{B_1D_1C_1} = 8S$; $S_{D_1O_1M_1C_1} = 5S$

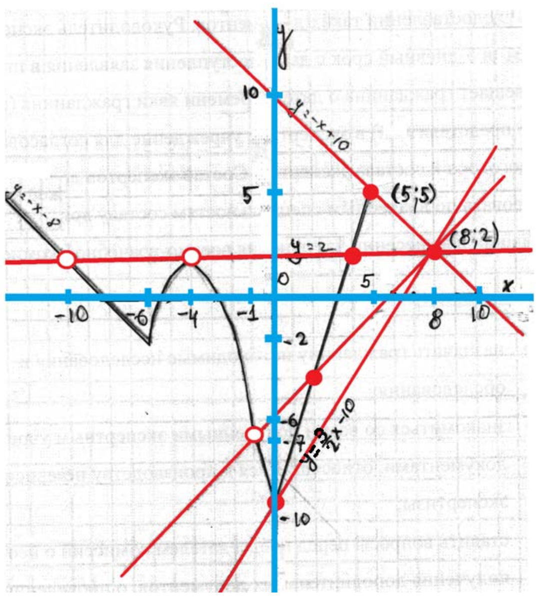
Ответ: 1:1

5. $D_f = (-\infty; -1) \cup (-1; 5]$

$E_f = [-10; +\infty)$

Прямые: $-x - y + 10 = 0$; $x - y - 6 = 0$;

$$y = 2; y = \frac{3}{2}x - 10$$



Задача 6.

Решение:

1. S_Δ AEB = S_Δ ABC (по условию)

AB – общее основание => т. C и т. E находятся на одинаковом расстоянии от прямой AB => AB $\parallel$ EC

2. Аналогично доказываем, что каждая диагональ такого пятиугольника параллельна его противоположной стороне.

3.

$$\left.\begin{matrix} AB \parallel OC \\ AO \parallel BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$ ABCO - параллелограмм с диагональю AC => S_Δ ABC = S_Δ AOC

4. Введем обозначения:

- AC=a_1;
- h_1 – высота $_\Delta$ ACO , проведенная из т.O к стороне AC;
- ED=a_2;
- h_2– высота $_\Delta$ ECD , проведенная из т.C к стороне ED.

5.

$$\left.\begin{matrix} AC \parallel ED \Rightarrow \Delta ACO \sim \Delta EDO \Rightarrow \frac{a1}{a2} = \frac{h1}{h2-h1} \\ S\,\Delta\,AOC = S\,\Delta\,ECD \Rightarrow \frac{h1a1}{2} = \frac{h2a2}{2} \Rightarrow \frac{a1}{a2} = \frac{h2}{h1} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{h1}{h2} = \frac{h2-h1}{h1} = \frac{h2}{h1} - 1$$

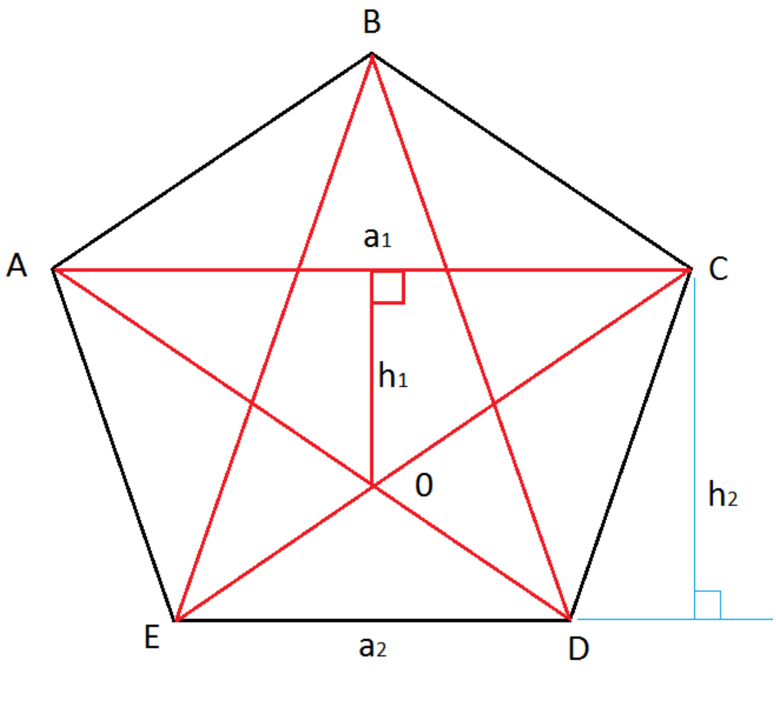
6. Обозначим $\frac{h1}{h2} = t$ и найдем $t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ из квадратного уравнения: $t^2 + t - 1 = 0$.

7. $S\,\Delta\,EOD = \frac{1}{2}a_2(h_2 - h_1) = \frac{1}{2}a_2h_2(1 - \frac{h1}{h2}) = So\,(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2})$

8. $S_{ABCDE} = 4So - S\,\Delta\,EOD = S_o\,(4 - 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}) = S_o\,(\frac{5+\sqrt{5}}{2})$

Ответы: 1 вариант $(\frac{5+\sqrt{5}}{7})$

2 вариант $(\frac{5+\sqrt{5}}{3})$



Критерии проверки заданий

1. и 2. – 10 баллов за решенную задачу, 0 – если не решена.

3. Правильно составлено уравнение или система – 5 баллов

Допущена арифметическая ошибка или скорость указана в м/ мин – 10 баллов

Верно решена – 15 баллов

4.Есть правильное начало решения – 5 баллов

Найдена площадь одного четырехугольника – 10 баллов

Найдены площади двух четырехугольников, но не найдено отношение площадей – 15

Верно решена задача – 20

5.Найдено ОДЗ – 5 баллов

Построены графики и найдено ОДЗ - 15 баллов

Найдена одна прямая - 20 баллов

Верное решение – 25 баллов

6.Доказано, что четырехугольники – трапеции – 10 баллов

Найдены подобные треугольники, но не решены квадратные уравнения – 15

Верное решение – 20 баллов