Вариант 17 (условия, решения, ответы)

Задача 1 (8 баллов). Переведите десятичное число A_{10} = 273,9375 в шестнадцатеричную систему счисления.

Ответ: 111,F.

Задача 2 (8 баллов). Шесть мальчиков и шесть девочек идут на концерт вместе. Сколькими способами они могут занять места, если а) все мальчики сядут вместе? б) два мальчика сядут по краям? в) ни мальчики, ни девочки не будут сидеть все вместе?

Решение.

1) Пусть универсум **U** будет множеством всех размещений мальчиков и девочек. Следовательно, |**U**| = 12!.
2) Пусть D – множество всех размещений мальчиков и девочек, когда девочки будут сидеть вместе. Тогда |D| = 6!*7!.
3) Пусть M – множество всех размещений мальчиков и девочек, когда мальчики будут сидеть вместе. Тогда |M| = 6!*7!.
4) Двух мальчиков можно посадить по краям 6!/(6-2)! = 6!/4! = 6*5 = 30 способами. Количество размещений мальчиков и девочек, когда два мальчика будут сидеть по краям равно 30*10!.
5) Количество размещений мальчиков и девочек, когда ни мальчики, ни девочки не будут сидеть все вместе, равно |**U**| - (|D| + |M| - |D $\cap$ M|) = 12! – (6!*7! + 6!*7! – 2*6!*6!).

Ответ: а) 6!*7!; б) 30*10!; в) 12! – (6!*7! + 6!*7! – 2*6!*6!) = 12! – (2*6!*7! – 2*6!*6!).

Задача 3 (8 баллов). Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$((\neg x_1 \to y_1) \wedge z_1) \equiv ((\neg x_2 \vee y_2) \to z_2)$$
$$((\neg x_2 \to y_2) \wedge z_2) \equiv ((\neg x_3 \vee y_3) \to z_3)$$

где x_1, …, x_3, y_1, …, y_3 – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение.

1) перепишем систему уравнений в более понятном виде:

$$(\bar{x}_1 \to y_1) \cdot z_1 = (\bar{x}_2 + y_2) \to z_2$$
$$(\bar{x}_2 \to y_2) \cdot z_2 = (\bar{x}_3 + y_3) \to z_3$$

2) рассмотрим первое уравнение

$$(\bar{x}_1 \to y_1) \cdot z_1 = (\bar{x}_2 + y_2) \to z_2$$

его левая часть равна 1, если $(x_1, y_1) = (0,1), (1,0), (1,1)$ при $z_1 = 1$; таким образом, есть всего 3 различных варианта, дающих 1 в левой части:

$$(x_1, y_1, z_1) = (011), (101), (111)$$

3) в левой части первого уравнения 3 переменных, поэтому всего есть $2^3 = 8$ комбинаций этих данных; в оставшихся 5 комбинациях левая часть первого уравнения равна 0

	1-е уравнение	
обе части равны…	$x_1y_1z_1$	$x_2y_2z_2$
1	011 101 111	
0	000 001 010 100 110	

4) аналогично находим, что правая часть первого уравнения равна 0 при 3-х комбинациях переменных $(x_2, y_2, z_2) = (000), (010), (110)$, причём каждой из них соответствует 5 троек (x_1, y_1, z_1); эта же правая часть равна 1 для пяти остальных комбинаций (x_2, y_2, z_2), причём каждой из них соответствует 3 комбинации (x_1, y_1, z_1):

	1-е уравнение	
обе части равны…	$x_1y_1z_1$	$x_2y_2z_2$
1	011 101 111	001 (3) 011 (3) 100 (3)

		101 (3) 111 (3)
0	000 001 010 100 110	000 (5) 010 (5) 110 (5)

5) поэтому первое уравнение имеет 5·3 + 3·5 = 30 решений: 15 решений, при которых обе части равны 0, и 15 решений, при которых обе части равны 1

6) теперь подключаем второе уравнение: выпишем в следующий столбец все комбинации (x_2, y_2, z_2), при которых его левая часть равна 0, и в следующую строку – все комбинации (x_2, y_2, z_2), при которых его левая часть равна 1, указав соответствующее число решений первого уравнения:

	1-е уравнение		2-е уравнение	
обе части равны…	$x_1y_1z_1$	$x_2y_2z_2$	$x_2y_2z_2$	$x_3y_3z_3$
1	011 101 111	001 (3) 011 (3) 100 (3) 101 (3) 111 (3)	011 (3) 101 (3) 111 (3)	001 (9) 011 (9) 100 (9) 101 (9) 111 (9)
0	000 001 010 100 110	000 (5) 010 (5) 110 (5)	000 (5) 001 (3) 010 (5) 100 (3) 110 (5)	000 (21) 010 (21) 110 (21)

таким образом, на каждую комбинацию (x_3, y_3, z_3), при которых правая часть второго уравнения равна 1, приходится 3 + 3 + 3 = 9 допустимых троек (x_2, y_2, z_2), а на каждую комбинацию (x_3, y_3, z_3), при которых правая часть второго уравнения равна 0, приходится 5 + 3 + 5 + 3 + 5 = 21 допустимая тройка (x_2, y_2, z_2).

	1-е уравнение		2-е уравнение	
обе части равны…	$x_1y_1z_1$	$x_2y_2z_2$	$x_2y_2z_2$	$x_3y_3z_3$
1	011 101 111	001 (3) 011 (3) 100 (3) 101 (3) 111 (3)	011 (3) 101 (3) 111 (3)	
0	000 001 010 100 110	000 (5) 010 (5) 110 (5)	000 (5) 001 (3) 010 (5) 100 (3) 110 (5)	

7) несложно проверить, что 5 троек (x_3, y_3, z_3) дают 1 в правой части второго уравнения, а оставшиеся 3 тройки – 0:

	1-е уравнение		2-е уравнение	
обе части равны…	$x_1y_1z_1$	$x_2y_2z_2$	$x_2y_2z_2$	$x_3y_3z_3$
1	011 101 111	001 (3) 011 (3) 100 (3) 101 (3) 111 (3)	011 (3) 101 (3) 111 (3)	001 (9) 011 (9) 100 (9) 101 (9) 111 (9)
0	000 001 010 100 110	000 (5) 010 (5) 110 (5)	000 (5) 001 (3) 010 (5) 100 (3) 110 (5)	000 (21) 010 (21) 110 (21)

8) для получения ответа нужно сложить числа в скобках в последнем столбце таблицы:

9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 21 + 21 + 21 = 108

Ответ: 108.

Задача 4 (12 баллов). Функция S определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом: S(0, 0) = 1; S(n, 0) = 0 для n > 0; S(n, k) = S(n-1, k-1) + (n-1)*S(n-1, k) для 0 < k < n. Очевидно, что S(n, n) = 1; S(n, k) = 0 при k > n. Вычислить вручную S(7, 4).

Решение.

Производим вычисления по формуле и результаты заносим в таблицу размером 8x8. В итоге будет получен следующий треугольник:

n	k							
	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	2	3	1				
4	0	6	11	6	1			
5	0	24	50	35	10	1		
6	0	120	274	225	85	15	1	
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1

Ответ: S(7, 4) = 735.

Задача 5 (10 баллов). Дана префиксная запись арифметического выражения: / * a + b – d + e f * + g h + i j. Найдите бинарное дерево, задающее это выражение, и вручную вычислите значение этого выражения для a=5, b=4, d=30, e=3, f=6, g=0, h=1, i=2, j=3.

Линейная форма представления бинарного дерева выражения будет иметь вид: ((a*(b+(d-(e+f))))/((g+h)*(i+j))).
Подставляя значения, получим ((5*(4+(30-(3+6))))/((0+1)*(2+3))) = 25.

Ответ: 25.

Задача 6 (8 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal

```
var a: byte=11; b: byte=110;
begin
writeln(
byte(not(byte(b shl 1) and byte(b shr 1))) and
(byte((a or b) shr 1) or byte((a and b) shl 1)));
end.
```

C

```
typedef unsigned char byte;
int main() {
byte a=11, b=110;
printf( "%d\n",
(byte)(~((byte)(b << 1) & (byte)(b >> 1))) &
((byte)((a | b) >> 1) | (byte)((a & b) << 1)) );
return 0;
}
```

Ответ: 35.

Задача 7 (16 баллов). Изобразите вид матрицы **D** после выполнения следующей программы и выпишите элементы ее главной диагонали:

Pascal

```
const n=5;
var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
var i, j, k, l: integer;
begin
k:=0; l:=0;
for i:=0 to n-1 do
for j:=0 to n-1 do
if ((i+j) mod 2 <> 0) then
begin k:=k+1; D[i,j]:=k; end
else begin l:=l-1; D[i,j]:=l; end;
for k:=0 to 1 do
for i:=0 to n-1 do
for j:=0 to n-1 do
D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]);
end.
```

C

```
#define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y))
const int n=5;
int D[n][n];
int main() {
int i, j, k=0, l=0;
for (i=0; i<n; i++)
for (j=0; j<n; j++)
if ((i+j) % 2 != 0) D[i][j]=++k;
else D[i][j]=--l;
for (k=0; k<2; k++) {
for (i=0; i<n; i++)
for (j=0; j<n; j++)
D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]);
return 0;
}
```

Решение.

Исходная матрица:

```
  1  -1   2  -2   3
 -3   4  -4   5  -5
  6  -6   7  -7   8
 -8   9  -9  10 -10
 11 -11  12 -12  13
```

Матрица для k=0:

1	-1	2	-2	3
-3	-4	-4	-5	-5
6	-6	7	-7	8
-8	-9	-9	-10	-10
11	-11	12	-12	13

Матрица для k=1:

-4	-5	-9	-10	-10
-7	-8	-12	-13	-13
-13	-14	-26	-27	-27
-16	-17	-29	-30	-30
-18	-19	-31	-32	-32

Ответ: -4 -8 -26 -30 -32