Вариант 16 (условия, решения, ответы)

Задача 1 (8 баллов). Переведите шестнадцатеричное число A_{16} = 32AB,12 в десятичную систему счисления.

Решение.

32AB,12 = $3*16^3 + 2*16^2 + 10*16^1 + 11*16^0 + 1*16^{-1} + 2*16^{-2}$ = 12288 + 512 + 160 + 11 + 0,75 + 0,00390635 = 12971 + 0,0703125 = 12971,0703125.

Ответ: 12971,0703125.

Задача 2 (8 баллов). Сколько существует перестановок букв o, n, t, h, e, f, a, r, m, если a) не существует никаких ограничений? b) последовательности букв образуют слова "on", "the" и "farm" в любом порядке? c) последовательности букв не образуют слова ни "on", ни "the", ни "farm"?

Ответ: a) 9! = 362880; b) 3! = 6; c) 9! – (8! + 7! + 6! – 6! – 5! – 4! + 3!) = 362880 – 45222 = 317658.

Задача 3 (8 баллов). Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_3) = 1$

$\neg x_1 \wedge y_1 \wedge z_1 \vee x_1 \wedge \neg y_1 \wedge z_1 \vee x_1 \wedge y_1 \wedge \neg z_1 = 1$

$\neg x_2 \wedge y_2 \wedge z_2 \vee x_2 \wedge \neg y_2 \wedge z_2 \vee x_2 \wedge y_2 \wedge \neg z_2 = 1$

$\neg x_3 \wedge y_3 \wedge z_3 \vee x_3 \wedge \neg y_3 \wedge z_3 \vee x_3 \wedge y_3 \wedge \neg z_3 = 1$

где $x_1, \ldots, x_3, y_1, \ldots, y_3, z_1, \ldots, z_3$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение.

1) перепишем уравнения с помощью более простых обозначений:

$$(x_1 \to x_2)\cdot(x_2 \to x_3) = 1$$
$$\bar{x}_1 \cdot y_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot \bar{y}_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot y_1 \cdot \bar{z}_1 = 1$$
$$\bar{x}_2 \cdot y_2 \cdot z_2 + x_2 \cdot \bar{y}_2 \cdot z_2 + x_2 \cdot y_2 \cdot \bar{z}_2 = 1$$
$$\bar{x}_3 \cdot y_3 \cdot z_3 + x_3 \cdot \bar{y}_3 \cdot z_3 + x_3 \cdot y_3 \cdot \bar{z}_3 = 1$$

2) заметим, что последние 3 уравнения независимы друга от друга, и вся система связана только через первое уравнение

3) рассмотрим второе уравнение

$$\bar{x}_1 \cdot y_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot \bar{y}_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot y_1 \cdot \bar{z}_1 = 1$$

оно имеет три решения, каждое из которых соответствует единичному значению одного из слагаемых:

$$\bar{x}_1 \cdot y_1 \cdot z_1 = 1 \quad\Rightarrow\quad (x_1, y_1, z_1) = (0,1,1)$$
$$x_1 \cdot \bar{y}_1 \cdot z_1 = 1 \quad\Rightarrow\quad (x_1, y_1, z_1) = (1,0,1)$$
$$x_1 \cdot y_1 \cdot \bar{z}_1 = 1 \quad\Rightarrow\quad (x_1, y_1, z_1) = (1,1,0)$$

4) аналогичные уравнения 3-4 тоже имеют по три решения

5) теперь рассмотрим множество решений системы уравнений 2-3

$$\bar{x}_1 \cdot y_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot \bar{y}_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot y_1 \cdot \bar{z}_1 = 1$$
$$\bar{x}_2 \cdot y_2 \cdot z_2 + x_2 \cdot \bar{y}_2 \cdot z_2 + x_2 \cdot y_2 \cdot \bar{z}_2 = 1$$

при ограничении, которое накладывается первым уравнением:

$$(x_1 \to x_2) = 1$$

6) поскольку импликация дает ложное значение (0) только для случая 1→0, первое уравнение в исходной системе запрещает комбинацию $(x_1, x_2) = (1,0)$.

7) рассмотрим решение уравнений 2 и 3:

(x_1, y_1, z_1)	(x_2, y_2, z_2)
(0,1,1)	(0,1,1)
(1,0,1)	(1,0,1)
(1,1,0)	(1,1,0)

Эти уравнения независимы, поэтому система уравнений 2-3 (без дополнительных ограничений) имеет 3·3=9 решений

При ограничении $(x_1 \to x_2) = 1$:

- в случае $(x_2, y_2, z_2) = (0,1,1)$ имеем только одно решение системы, когда $x_1 = 0$ в уравнении 2, то есть $(x_1, y_1, z_1) = (0,1,1)$
- для двух решений уравнения 3, когда $x_2 = 1$, подходят все 3 отдельных решения уравнения 2

поэтому количество решений системы уравнений 2-3 при ограничении $(x_1 \to x_2) = 1$ вычисляется как 1 + 3 + 3 = 7 решений

8) рассуждая аналогично, подключаем уравнение 4 и ограничение $(x_2 \to x_3) = 1$, получаем, что количество решений системы уравнений 2-4 при ограничении $(x_1 \to x_2) \cdot (x_2 \to x_3) = 1$ вычисляется как 1 + 7 + 7 = 15 решений

Ответ: 15.

Задача 4 (12 баллов). Функция S определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом: S(0, 0) = 1; S(n, 0) = 0 для n > 0; S(n, k) = S(n-1, k-1) + k*S(n-1, k) для 0 < k < n. Очевидно, что S(n, 1) = 1 при n > 0; S(n, n) = 1; S(n, k) = 0 при k > n. Вычислить вручную S(6, 4).

Решение.

Производим вычисления по формуле и результаты заносим в таблицу размером 7x7. В итоге будет получен следующий треугольник:

n	k						
	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	1	3	1			
4	0	1	7	6	1		
5	0	1	15	25	10	1	
6	0	1	31	90	65	15	1

Ответ: S(6, 4) = 65.

Задача 5 (10 баллов). Дана постфиксная (обратная польская) запись арифметического выражения: a x b x c x d x e x + * + * + * + * +. Найдите бинарное дерево, задающее это выражение, и вручную вычислите значение этого выражения для x=3, a=1, b=2, c=3, d=4, e=5.

Решение.

Линейная форма представления бинарного дерева выражения будет иметь вид: (a+(x*(b+(x*(c+(x*(d+(x*(e+x))))))))).
Подставляя значения, получим (1+(3*(2+(3*(3+(3*(4+(3*(5+2))))))))) = 790.

Ответ: 790.

Задача 6 (8 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal	C

`var a: byte=217; b: byte=101;`
`begin`
`writeln(`
`byte(not(byte(b shl 1) and byte(b shr 1))) and`
`(byte((a or b) shr 1) or byte((a and b) shl 1)));`
`end.`
	`typedef unsigned char byte;`
	`int main() {`
	`byte a=217, b=101;`
	`printf( "%d\n",`
	`(byte)(~((byte)(b << 1) & (byte)(b >> 1))) &`
	`((byte)((a | b) >> 1) | (byte)((a & b) << 1)) );`
	`return 0;`
	`}`

Ответ: 252.

Задача 7 (16 баллов). Изобразите вид матрицы **D** после выполнения следующей программы и выпишите элементы ее побочной диагонали:

Pascal	C

`const n=5;`
`var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer;`
`var i, j, k, l: integer;`
`begin`
`k:=0; l:=0;`
`for i:=0 to n-1 do`
	`#define MAX(X,Y) ((X) > (Y) ? (X) : (Y))`
	`const int n=5;`
	`int D[n][n];`
	`int main() {`
	`int i, j, k=0, l=0;`
	`for (i=0; i<n; i++)`

for j:=0 to n-1 do
if ((i+j) mod 2 = 0) then
begin k:=k+1; D[i,j]:=k; end
else begin l:=l-1; D[i,j]:=l; end;
for k:=0 to 1 do
for j:=0 to n-1 do
for i:=0 to n-1 do
D[i,j]:=max(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]);
end.
	for (j=0; j<n; j++)
	if ((i+j) % 2 == 0) D[i][j]=++k;
	else D[i][j]=--l;
	for (k=0; k<2; k++)
	for (j=0; j<n; j++)
	for (i=0; i<n; i++)
	D[i][j]=MAX(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]);
	return 0;
	}

Побочной диагональю матрицы называется диагональ, идущая из левого нижнего угла в правый верхний угол.

Решение.

Исходная матрица:

```
  1  -1   2  -2   3
 -3   4  -4   5  -5
  6  -6   7  -7   8
 -8   9  -9  10 -10
 11 -11  12 -12  13
```

Матрица для k=0:

```
  2   1   4   0   5
 -1   4   3   5   4
  8   9  12   8  13
 -6   9  -2  10  -1
 13  14  17  13  18
```

Матрица для k=1:

```
  2   5   8  10   9
  3   8  11  13  12
 12  17  28  30  29
 12  17  28  30  29
 17  22  33  35  34
```

Ответ: **17 17 28 13 9**