

Вариант 11 (условия и ответы)

Задача 1 (8 баллов). Переведите шестнадцатеричное число $A_{16} = 32F, C1$ в десятичную систему счисления.

Ответ: 815,75390625.

Задача 2 (8 баллов). Сколько существует перестановок букв o, n, t, h, e, g, r, i, d, если а) не существует никаких ограничений? б) последовательности букв образуют слова "on", "the" и "grid" в любом порядке? с) последовательности букв не образуют слова ни "on", ни "the", ни "grid"?

Ответ: а) $9! = 362880$; б) $3! = 6$; с) $9! - (8! + 7! + 6! - 6! - 5! - 4! + 3!) = 362880 - 45222 = 317658$.

Задача 3 (8 баллов). На книжной полке расположены книги по математике, физике, информатике и химии. Какая книга будет выбрана при одновременном выполнении следующих условий: а) если не выбирается химия, то не выбирается физика; б) не верно, что «если выбирается информатика, то выбирается химия»; с) если выбирается математика, то выбирается физика.

Решение.

Введем следующие обозначения: М – математика, Р – физика, I – информатика, С – химия. Используя элементарные функции алгебры логики, запишем условие задачи в аналитической форме:

$$f(M, P, I, C) = (\neg C \rightarrow \neg P) \wedge \neg (I \rightarrow C) \wedge (M \rightarrow P).$$

Используя свойства функций алгебры логики, выполним преобразования:

$$\begin{aligned} (\neg C \rightarrow \neg P) \wedge \neg (I \rightarrow C) \wedge (M \rightarrow P) &= \\ (\neg \neg C \vee \neg P) \wedge \neg (\neg I \vee C) \wedge (\neg M \vee P) &= \\ (C \vee \neg P) \wedge (\neg \neg I \wedge \neg C) \wedge (\neg M \vee P) &= \\ (C \vee \neg P) \wedge (I \wedge \neg C) \wedge (\neg M \vee P) &= \\ (C \wedge I \wedge \neg C \vee \neg P \wedge I \wedge \neg C) \wedge (\neg M \vee P) &= \\ (\neg P \wedge I \wedge \neg C) \wedge (\neg M \vee P) &= \\ (\neg P \wedge I \wedge \neg C \wedge \neg M \vee \neg P \wedge I \wedge \neg C) &= \\ (\neg P \wedge I \wedge \neg C \wedge \neg M). \end{aligned}$$

Функция $f(M, P, I, C)$ равна единице при следующих значениях переменных: $M = 0, P = 0, I = 1, C = 0$.

Ответ: Информатика.

Задача 4 (8 баллов). Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) = 1$$

$$(y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) = 1$$

$$(z_1 \rightarrow z_2) \wedge (z_2 \rightarrow z_3) \wedge (z_3 \rightarrow z_4) = 1$$

$$x_1 \wedge y_2 \wedge z_3 = 0$$

где $x_1, \dots, x_4, y_1, \dots, y_4, z_1, \dots, z_4$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение.

1) перепишем систему с более понятными обозначениями:

$$(x_1 \rightarrow x_2) \cdot (x_2 \rightarrow x_3) \cdot (x_3 \rightarrow x_4) = 1$$

$$(y_1 \rightarrow y_2) \cdot (y_2 \rightarrow y_3) \cdot (y_3 \rightarrow y_4) = 1$$

$$(z_1 \rightarrow z_2) \cdot (z_2 \rightarrow z_3) \cdot (z_3 \rightarrow z_4) = 1$$

$$x_1 \cdot y_2 \cdot z_3 = 0$$

2) первые 3 уравнения однотипны; рассмотрим первое из них:

$$(x_1 \rightarrow x_2) \cdot (x_2 \rightarrow x_3) \cdot (x_3 \rightarrow x_4) = 1$$

3) рассмотрим решение этого уравнения как битовую цепочку $X = x_1 x_2 x_3 x_4$

4) все импликации должны быть равны 1, в цепочке X запрещена комбинация 10, поэтому после первой единицы далее следуют только единицы; вот все 5 решений X :

$$X = 0000 \quad 0001 \quad 0011 \quad 0111 \quad 1111$$

5) второе и третье уравнения не зависят от первого и имеют такую же структуру; вот все их решения $Y = y_1 y_2 y_3 y_4$ и

$$Z = z_1 z_2 z_3 z_4:$$

$$Y = \begin{matrix} 0000 & 0001 & 0011 & 0111 & 1111 \end{matrix}$$

$$Z = \begin{matrix} 0000 & 0001 & 0011 & 0111 & 1111 \end{matrix}$$

6) если бы система состояла бы только из первых трёх уравнений, общее количество решений было бы равно $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

7) теперь рассмотрим последнее уравнение, связывающее X , Y и Z :

$$x_1 \cdot y_2 \cdot z_3 = 0$$

8) таким образом, нужно исключить все решения, где $x_1 = y_2 = z_3 = 1$

9) у нас есть одно решение X с $x_1 = 1$, два решения Y с $y_2 = 1$ и три решения Z с $z_3 = 1$; поэтому из 125 нужно отбросить $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ решений; остаётся $125 - 6 = 119$ решений.

Ответ: 119.

Задача 5 (12 баллов). Функция S определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом: $S(0, 0) = 1$; $S(n, 0) = 0$ для $n > 0$; $S(n, k) = S(n-1, k-1) + (n-1) \cdot S(n-1, k)$ для $0 < k < n$. Очевидно, что $S(n, n) = 1$; $S(n, k) = 0$ при $k > n$. Вычислить вручную $S(6, 4)$.

Решение.

Производим вычисления по формуле и результаты заносим в таблицу размером 7×7 . В итоге будет получен следующий треугольник:

n	k						
	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	2	3	1			
4	0	6	11	6	1		
5	0	24	50	35	10	1	
6	0	120	274	225	85	15	1

Ответ: 85.

Задача 6 (12 баллов). Дана постфиксная (обратная польская) запись арифметического выражения:

$x \ a \ + \ x \ * \ b \ + \ x \ * \ c \ + \ x \ * \ d \ + \ x \ * \ e \ +$. Найдите бинарное дерево, задающее это выражение, и вручную вычислите значение этого выражения для $x=3$, $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$, $e=5$.

Решение.

Линейная форма представления бинарного дерева выражения будет иметь вид $((((((((((x+a)*x)+b)*x)+c)*x)+d)*x)+e)$. Подставляя значения, получим $((((((((((3+1)*3)+2)*3)+3)*3)+4)*3)+5) = 422$.

Ответ: 422.

Задача 7 (8 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal	C
<pre>var a: byte=141; b: byte=77; begin writeln(byte(not(byte(b shl 1) and byte(b shr 1))) and (byte((a or b) shr 1) or byte((a and b) shl 1))); end.</pre>	<pre>typedef unsigned char byte; int main() { byte a=141, b=77; printf("%d\n", (byte)~((byte)(b << 1) & (byte)(b >> 1))) & ((byte)((a b) >> 1) (byte)((a & b) << 1))); return 0; }</pre>

Ответ: 124

Задача 8 (8 баллов). Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal	C
<pre>function f(x: integer): integer; begin f:=x*x+4*x+8; end; var a, b, m, r, t: integer;</pre>	<pre>int f(int x) { return (x*x+4*x+8); } int main() { int a=-10, b=10, m=a, r=f(a);</pre>

<pre>begin a:=-10; b:=10; m:=a; r:=f(a); for t:=a to b do if (f(t)>r) then begin m:=t; r:=f(t); end; writeln(r); end.</pre>	<pre>for (int t=a; t<=b; t++) if (f(t)>r) { m=t; r=f(t); } printf("%4d\n", r); }</pre>
--	--

Ответ: 148.

Задача 9 (12 баллов). Изобразите вид матрицы **A** после выполнения следующей программы и определите, чему будет равна сумма элементов матрицы:

Pascal	C
<pre>const n=9; var A: array[0..n-1,0..n-1] of integer; i, j: integer; begin for i:=0 to n-1 do for j:=0 to n-1 do A[i,j]:=0; for i:=0 to n-1 do for j:=i to n-1 do A[i,j]:=i+j; end.</pre>	<pre>const int n=9; int main() { int A[n][n]={0}; for (int i=0; i<n; i++) for (int j=i; j<n; j++) A[i][j]=i+j; return 0; }</pre>

Решение.

Преобразованная матрица:

```
0  1  2  3  4  5  6  7  8
0  2  3  4  5  6  7  8  9
0  0  4  5  6  7  8  9  10
0  0  0  6  7  8  9  10  11
0  0  0  0  8  9  10  11  12
0  0  0  0  0  10  11  12  13
0  0  0  0  0  0  12  13  14
0  0  0  0  0  0  0  14  15
0  0  0  0  0  0  0  0  16
```

Ответ: 360.

Задача 10 (16 баллов). Изобразите вид матрицы **D** после выполнения следующей программы и выпишите элементы ее главной диагонали:

Pascal	C
<pre>const n=5; var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer; var i, j, k, l: integer; begin k:=0; l:=0; for i:=0 to n-1 do for j:=0 to n-1 do if ((i+j) mod 2 <> 0) then begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end; for k:=0 to 1 do for j:=0 to n-1 do for i:=0 to n-1 do D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]); end.</pre>	<pre>#define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y)) const int n=5; int D[n][n]; int main() { int i, j, k=0, l=0; for (i=0; i<n; i++) for (j=0; j<n; j++) if ((i+j) % 2 != 0) D[i][j]=--k; else D[i][j]=++l; for (k=0; k<2; k++) for (j=0; j<n; j++) for (i=0; i<n; i++) D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]); return 0; }</pre>

Решение.

Исходная матрица:

```
1  -1  2  -2  3
-3  4  -4  5  -5
6  -6  7  -7  8
-8  9  -9  10 -10
11 -11 12 -12 13
```

Матрица для k=0:

1 -1 2 -2 3
-3 -4 -4 -5 -5
6 -6 7 -7 8
-8 -9 -9 -10 -10
11 -11 12 -12 13

Матрица для k=1:

-4 -5 -9 -10 -10
-7 -8 -12 -13 -13
-13 -14 -26 -27 -27
-16 -17 -29 -30 -30
-18 -19 -31 -32 -32

Ответ: -4 -8 -26 -30 -32