Первый (отборочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика», осень 2015 г.

Вариант № 5

1. Двумя насосами, работающими совместно, цистерна заполняется топливом за два часа. Если 80% объёма цистерны заполнить одним насосом, а затем оставшуюся часть– другим, то вся работа займёт 3 *ч* 36 *мин.* За сколько часов можно заполнить цистерну каждым из насосов в отдельности? (8 баллов)

2. В арифметической прогрессии 12 членов, их сумма равна 354. Сумма членов с четными номерами относится к сумме членов с нечетными номерами, как 32:27. Определите первый член и разность прогрессии. (8 баллов)

3. Решите уравнение $9^{1+2\sqrt{x}}-28\cdot 9^{\sqrt{x}}+3=0$. (8 баллов)

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\sin^2 x+2\sqrt{2}\sin x\sin^2 2x+\sin^2 2x=0, \\ \cos x=\cos y. \end{cases}$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $x+6-\sqrt{(x+6)|x+5|+|x+4|}\geq 0$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$f(x)=2\sin\left(\left(\pi/4\right)\sin(\sqrt{x-2}+x+2)-\left(5\pi/2\right)\right)$. (10 баллов)

7. В треугольнике ABC углы A и B равны 45° и 30° соответственно, CM — медиана. Окружности, вписанные в треугольники ACM и BCM касаются отрезка CM в точках D и E. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если длина отрезка DE равна $4(\sqrt{2}-1)$. (12 баллов)

8. Найдите угол между касательными к графику функции $y=x^2\sqrt{3}/6$, проходящими через точку $M\left(1;-\sqrt{3}/2\right)$. (12 баллов)

9. Определите все значения *a*, при которых уравнение $x^2+x|x|=2(3+ax-2a))$ имеет два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений *a*.

(12 баллов)

10. Найдите площадь сечения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, которая проходит через диагональ AC_1, параллельна диагонали основания BD, наклонена к плоскости основания под углом 30° и образует с диагональю A_1C угол 45°, если диагональ параллелепипеда равна *d*. (12 баллов)

Решение варианта №1

1 Двумя насосами, работающими совместно, цистерна заполняется топливом за два часа. Если 80% объёма цистерны заполнить одним насосом, а затем оставшуюся часть – другим, то вся работа займёт 3 *ч* 36 *мин.* За сколько часов можно заполнить цистерну каждым из насосов в отдельности?

Решение:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{4}{5}x+\dfrac{1}{5}y=\dfrac{18}{5}. \end{cases} \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{18-x}=\frac{1}{2},\ x^2-6x+9=0,\ x=3,\ y=6.$$

Ответ: 3 ч, 6 ч.

2. В арифметической прогрессии 12 членов, их сумма равна 354. Сумма членов с четными номерами относится к сумме членов с нечетными номерами, как 32:27. Определите первый член и разность прогрессии.

Решение:

$$S_{even}=\frac{32}{59}\cdot 354=192;\ S_{odd}=\frac{27}{59}\cdot 354=162\ .$$

$$\frac{a+d+a+11d}{2}\cdot 6=192;\ \frac{a+a+10d}{2}\cdot 6=162\ .\ \begin{cases} a+6d=32, \\ a+5d=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2, \\ d=5. \end{cases}$$

Ответ: $a=2,\ d=5$.

3. Решите уравнение $9^{1+2\sqrt{x}}-28\cdot 9^{\sqrt{x}}+3=0$.

Решение:

1) $9^{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{9}$, нет решений; 2) $9^{\sqrt{x}}=3,\ \sqrt{x}=\dfrac{1}{2},\ x=\dfrac{1}{4}$.

Ответ: $x=\dfrac{1}{4}$.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\sin^2 x+2\sqrt{2}\sin x\sin^2 2x+\sin^2 2x=0, \\ \cos x=\cos y. \end{cases}$.

Решение:

Решим 1-е уравнение системы:

$$2\sin^2 x+2\sqrt{2}\sin x\sin^2 2x+\sin^2 2x=0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}\sin x+\sin^2 2x)^2+\sin^2 2x\cos^2 2x=0 \Leftrightarrow$$

$\begin{cases} \sqrt{2}\sin x+\sin^2 2x=0, \\ \sin^2 2x\cos^2 2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x=0, \\ \sin 2x=0, \end{cases}$ или $\begin{cases} \sqrt{2}\sin x+1=0, \\ \cos 2x=0. \end{cases}$ Первая система имеет решение $x=\pi k,\ k\in Z$. Вторая система имеет решения $x=(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$.

Возвращаясь к исходной системе уравнений, получаем равносильную ей систему

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = 2\pi k,\ k \in Z,\\ \cos y = 1;\end{cases}\\ \begin{cases}x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z,\\ \cos y = -1;\end{cases}\\ \begin{cases}x = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z,\\ \cos y = \sqrt{2}/2;\end{cases}\\ \begin{cases}x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z,\\ \cos y = -\sqrt{2}/2.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = 2\pi k,\ k \in Z,\\ y = 2\pi n,\ n \in Z;\end{cases}\\ \begin{cases}x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z,\\ y = \pi + 2\pi n,\ n \in Z;\end{cases}\\ \begin{cases}x = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z,\\ y = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z;\end{cases}\\ \begin{cases}x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z,\\ y = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

Ответ:

$$(2\pi k,\ 2\pi n),\quad (\pi + 2\pi k,\ \pi + 2\pi n),\quad \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right),\quad \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right),\quad k, n \in Z.$$

5. Решите неравенство $x + 6 - \sqrt{(x+6)|x+5| + |x+4|} \geq 0.$

Решение:

$$\sqrt{(x+6)|x+5| + |x+4|} \leq x + 6 \Leftrightarrow \begin{cases}x + 6 \geq 0;\\ (x+6)|x+5| + |x+4| \leq (x+6)^2;\\ (x+6)|x+5| + |x+4| \geq 0.\end{cases}$$

При условии $x + 6 \geq 0$ неравенство $(x+6)|x+5| + |x+4| \geq 0$ выполняется, и система равносильна следующей $\begin{cases}x \geq -6;\\ (x+6)|x+5| + |x+4| \leq x^2 + 12x + 36.\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \in [-6, -5],\\ -x^2 - 11x - 30 - x - 4 \leq x^2 + 12x + 36;\end{cases}\\ \begin{cases}x \in (-5, -4],\\ x^2 + 11x + 30 - x - 4 \leq x^2 + 12x + 36;\end{cases}\\ \begin{cases}x \in (-4, +\infty),\\ x^2 + 11x + 30 + x + 4 \leq x^2 + 12x + 36.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \in [-6, -5],\\ x^2 + 12x + 35 \geq 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x \in (-5, -4],\\ x \geq -5;\end{cases}\\ \begin{cases}x \in (-4, +\infty),\\ 34 \leq 36.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -5;\\ x \in (-5, -4];\\ x \in (-4, +\infty).\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$x \in [-5, +\infty).$

Ответ: $x \in [-5, +\infty).$

6. Найдите множество значений функции $f(x) = 2\sin\left((\pi/4)\sin(\sqrt{x-2} + x + 2) - (5\pi/2)\right).$

Решение:

$f(x) = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\sin(\sqrt{x-2} + x + 2) - \dfrac{5\pi}{2}\right) = -2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\sin(\sqrt{x-2} + x + 2)\right)$ Так как

$\sqrt{x-2} + x + 2 \in [4; \infty)$, то $\sin(\sqrt{x-2} + x + 2) \in [-1; 1]$, $\quad \dfrac{\pi}{4}\sin(\sqrt{x-2} + x + 2) \in [-\pi/4; \pi/4].$

Следовательно,

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\sin(\sqrt{x-2}+x+2)\right)\in[\sqrt{2}/2;1] \quad\Rightarrow\quad -2\cos\left(\frac{\pi}{4}\sin(\sqrt{x-2}+x+2)\right)\in[-2;-\sqrt{2}].$$

Ответ: $[-2;-\sqrt{2}]$.

7. В треугольнике ABC углы A и B равны $45°$ и $30°$ соответственно, CM — медиана. Окружности, вписанные в треугольники ACM и BCM касаются отрезка CM в точках D и E. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если длина отрезка DE равна $4(\sqrt{2}-1)$.

Решение:

По свойству касательных к окружности имеем:

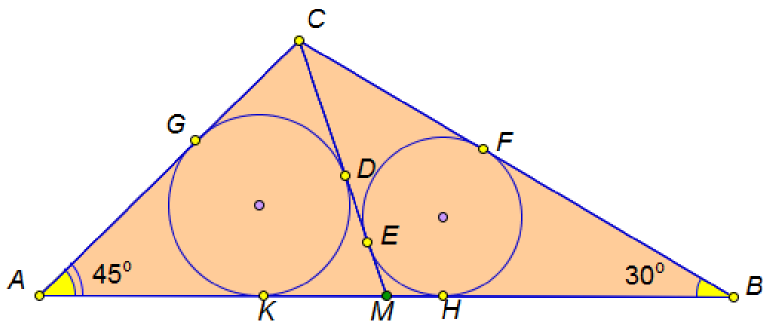
$$AG=AK=x,\ CG=CD=y,\ CE=CF=z,\ BF=BH=u,\ DM=\frac{AB}{2}-AK=\frac{AB}{2}-x,$$
$$ME=\frac{AB}{2}-BH=\frac{AB}{2}-u,$$

Тогда $DE=z-y,\ DE=DM-ME=u-x.$ Следовательно,

$2DE=z-y+u-x=CB-AC.$ Пусть $CB=a,\ AC=b.$ Тогда $a-b=8(\sqrt{2}-1)$. По теореме синусов имеем

$$\frac{a}{\sin 45°}=\frac{b}{\sin 30°},\text{ или } \sqrt{2}a=2b,$$

т.е. $a=\sqrt{2}b.$ Таким образом, $b=8,\ a=8\sqrt{2}.$



Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, находим по формуле

$$R=\frac{b}{2\sin 30°}=b=8.$$

Ответ: 8.

8. Найдите угол между касательными к графику функции $y=x^2\sqrt{3}/6$, проходящими через точку $M\left(1;-\sqrt{3}/2\right)$.

Решение:

$y=\frac{x^2}{2\sqrt3}, M\left(1;-\frac{\sqrt3}{2}\right)$. $y=\frac{x_0^2}{2\sqrt3}+\frac{x_0}{\sqrt3}(x-x_0)$; $-\frac{\sqrt3}{2}=\frac{x_0^2}{2\sqrt3}+\frac{x_0}{\sqrt3}(1-x_0)$; $x_0^2-2x_0-3=0$

; $x_0=1\pm2$; $(x_0)_1=3,\ (x_0)_2=-1$. Уравнения касательных:

1) $y=\frac{3\sqrt3}{2}+\sqrt3(x-3)$; $y=\sqrt3x-\frac{3\sqrt3}{2}$, $\mathrm{tg}\alpha_1=\sqrt3$, $\alpha_1=60^\circ$;

2) $y=\frac{1}{2\sqrt3}-\frac{1}{\sqrt3}(x+1)$; $y=-\frac{1}{\sqrt3}x-\frac{1}{2\sqrt3}$, $\mathrm{tg}\alpha_2=-\frac{1}{\sqrt3}$, $\alpha_2=-30^\circ$.

Угол между касательными: $\varphi=60^\circ-(-30^\circ)=90^\circ$. **Ответ:** 90°.

9. Определите все значения *a*, при которых уравнение $x^2+x|x|=2(3+ax-2a)$ имеет два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений *a*.

Решение:

I. При $x\ge0$ $x^2-2ax+4a-3=0$ (*). 1. Уравнение (*) имеет два различных

неотрицательных корня, если: $\begin{cases} D/4=a^2-4a+3>0,\\ a>0,\\ 4a-3\ge0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a<1,\\ a>3,\end{array}\right.\\ a>0,\\ a\ge3/4\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3/4\le a<1,\\ a>3.\end{array}\right.$

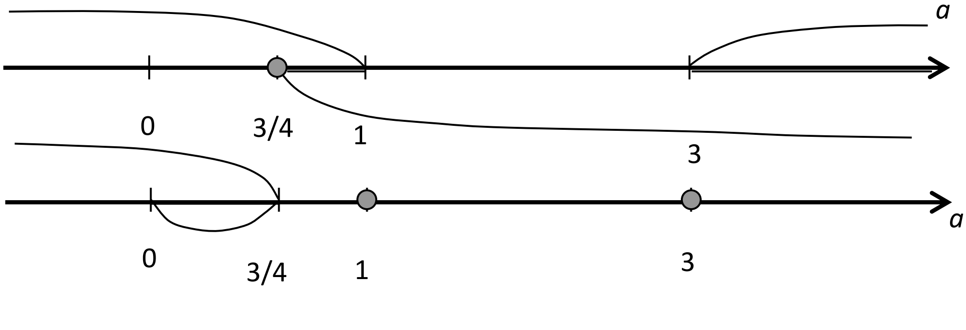
2. Уравнение (*) имеет один неотрицательный корень, если: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D=0,\\ a\ge0,\end{cases}\\ 4a-3<0,\\ \begin{cases} a=3/4,\\ a<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1,\\ a=3,\\ a<3/4.\end{array}\right.$

II. При $x<0$ $x=\frac{4a-3}{2a}<0\Rightarrow 0<a<3/4$.

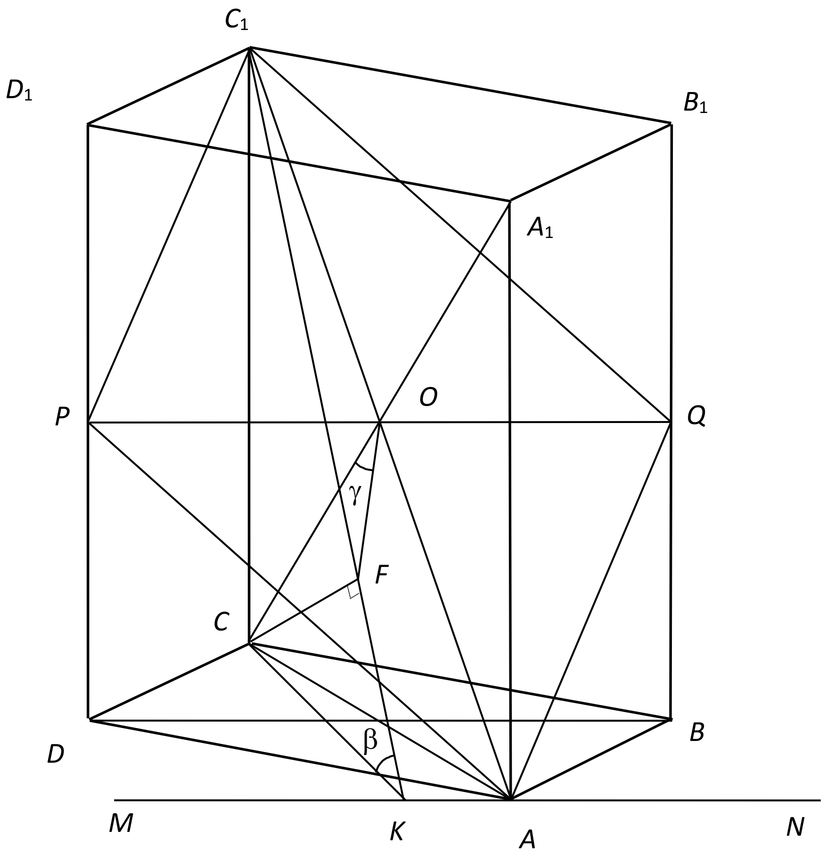
Сравнивая с I, 2, замечаем, что при $0<a<3/4$ также будет два различных корня.

Ответ: при $a\in[3/4;1)\cup(3;+\infty)$ $x_{1,2}=a\pm\sqrt{a^2-4a+3}$;

при $0<a<3/4$ $x_1=\frac{4a-3}{2a}$, $x_2=a+\sqrt{a^2-4a+3}$. $x_2=a+\sqrt{a^2-4a+3}$.



10. Найдите площадь сечения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, которая проходит через диагональ AC_1, параллельна диагонали основания BD, наклонена к плоскости основания под углом 30° и образует с диагональю A_1C угол 45°, если диагональ параллелепипеда равна d.



Введем обозначение $AC_1 = d = 2R$ (так как на середине диагонали параллелепипеда расположен центр сферы, описанной около параллелепипеда).

Если P и Q–середины боковых ребер DD_1 и BB_1, то $PQ \| BD$ и $PQ = BD = AC$.

Проведем $(MN) \| BD,\ A \in (MN);\ CK \perp (MN),\ CF \perp KC_1$. Тогда $\angle CKC_1 = \beta$ – заданный в условиях угол между секущей плоскостью и плоскостью основания. Так как $CF \perp (AKC_1)$, то $\angle COF = \gamma$–заданный в условиях угол между диагональю CA_1 и плоскостью сечения $PAQC_1$. Так как $OC = R$, то $CF = R\sin\gamma$, $CK = \dfrac{CF}{\sin\beta} = \dfrac{R\sin\gamma}{\sin\beta}$, $CC_1 = \dfrac{CF}{\cos\beta} = \dfrac{R\sin\gamma}{\cos\beta}$,

$KC_1 = \dfrac{CK}{\cos\beta} = \dfrac{R\sin\gamma}{\sin\beta\,\cos\beta}$.

Поскольку $PQ = BD = AC = \sqrt{AC_1^2 - CC_1^2} = \dfrac{R}{\cos\beta}\sqrt{4\cos^2\beta - \sin^2\gamma}$, а $KC_1 \perp AK$ то площадь сечения $PAQC_1$ равна $S_{PAQC_1} = \dfrac{1}{2}KC_1 \cdot PQ = \dfrac{R^2 \sin\gamma}{2\sin\beta\,\cos^2\beta}\sqrt{4\cos^2\beta - \sin^2\gamma}$, или

$$S_{PAQC_1} = \frac{d^2 \sin\gamma}{8\sin\beta\,\cos^2\beta}\sqrt{4\cos^2\beta - \sin^2\gamma}.$$

β=30°, γ=45°. $S = \dfrac{2 \cdot 4}{\sqrt{2} \cdot 2 \cdot 3} \cdot \sqrt{4 \cdot \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2}} \cdot R^2 = \dfrac{2\sqrt{5}d^2}{12}$.

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{5}d^2}{12}$.