Первый (отборочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика», осень 2015 г.

Вариант № 1

1. Один рабочий за два часа делает на 5 деталей больше, чем другой, соответственно на изготовление 100 деталей он затрачивает на 2 ч меньше. Какое время тратит каждый рабочий на изготовление 100 деталей? (8 баллов)

2. Сколько последовательных членов арифметической прогрессии 32, 28, 24, …, начиная с первого, надо сложить, чтобы получить сумму, равную 132? (8 баллов)

3. Решите уравнение $9^{1+\sqrt{x}}+3^{1-2\sqrt{x}}=28$. (8 баллов)

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\cos^2 x+2\sqrt{2}\cos x\cos^2 4x+\cos^2 4x=0, \\ \sin x=\cos y. \end{cases}.$$ (8 баллов)

5. Решите неравенство $\sqrt{(x+2)|x+1|+|x|}\geq x+2$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$$f(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}\sin(\sqrt{x-3}+2x+2)\right).$$ (10 баллов)

7. В треугольнике ABC углы A и B равны 45° и 30° соответственно, CM — медиана. Окружности, вписанные в треугольники ACM и BCM касаются отрезка CM в точках D и E. Найдите площадь треугольника ABC, если длина отрезка DE равна $4(\sqrt{2}-1)$.

(12 баллов)

8. Найдите угол между касательными к графику функции $y=x^2\sqrt{3}/24$, проходящими через точку $M\left(4;-2\sqrt{3}\right)$. (12 баллов)

9. Определите все значения a, при которых уравнение $x+|x|=2\sqrt{3+2ax-4a}$ имеет два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений a.

(12 баллов)

10. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ CA_1, равная d, наклонена к плоскости основания под углом 60° и образует угол 45° с плоскостью, проходящей через диагональ AC_1 и середину бокового ребра BB_1. Найдите площадь основания параллелепипеда. (12 баллов)

Решение варианта №1

1. Один рабочий за два часа делает на 5 деталей больше, чем другой, соответственно на изготовление 100 деталей он затрачивает на 2 ч меньше. Какое время тратит каждый рабочий на изготовление 100 деталей?

Решение:

За x часов второй рабочий делает 100 деталей, за $x-2$ – первый.

$\frac{100}{x-2}-\frac{100}{x}=\frac{5}{2}$; $\frac{40}{x-2}-\frac{40}{x}=1$; $x^2-2x-80=0$, $x=1+9=10$. Ответ: 8 и 10 ч.

2. Сколько последовательных членов арифметической прогрессии 32, 28, 24, …, начиная с первого, надо сложить, чтобы получить сумму, равную 132?

Решение:

$\frac{32+32-4(n-1)}{2}\cdot n=132$, $n^2-17n+66=0$, $n=\frac{17\pm 5}{2}=\left[\begin{array}{l}6,\\11.\end{array}\right.$ Ответ: 6 или 11.

3. Решите уравнение $9^{1+\sqrt{x}}+3^{1-2\sqrt{x}}=28$.

Решение:

$9^{1+\sqrt{x}}+3^{1-2\sqrt{x}}=28 \Leftrightarrow 9^{1+2\sqrt{x}}-28\cdot 9^{\sqrt{x}}+3=0 \Leftrightarrow 9\cdot\left(9^{\sqrt{x}}\right)^2-28\cdot 9^{\sqrt{x}}+3=0$; $9^{\sqrt{x}}=\frac{14\pm 13}{9}$.

1) $9^{\sqrt{x}}=\frac{1}{9}$, нет решений; 2) $9^{\sqrt{x}}=3$, $\sqrt{x}=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{4}$. **Ответ:** $x=\frac{1}{4}$.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases}2\cos^2 x+2\sqrt{2}\cos x\cos^2 4x+\cos^2 4x=0,\\ \sin x=\cos y.\end{cases}$.

Решение:

Решим 1-е уравнение системы:

$2\cos^2 x+2\sqrt{2}\cos x\cos^2 4x+\cos^2 4x=0 \quad \Leftrightarrow (\sqrt{2}\cos x+\cos^2 4x)^2+\cos^2 4x\sin^2 4x=0$

$\Leftrightarrow$

$\begin{cases}\sqrt{2}\cos x+\cos^2 4x=0,\\ \cos^2 4x\sin^2 4x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x=0,\\ \cos 4x=0,\end{cases}$ или $\begin{cases}\sqrt{2}\cos x+1=0,\\ \sin 4x=0.\end{cases}$ Первая система решений не имеет. Вторая система имеет решения $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$.

Возвращаясь к исходной системе уравнений, получаем равносильную ей систему

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ \sin x = \cos y. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ \cos y = \sqrt{2}/2; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ \cos y = -\sqrt{2}/2. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ y = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ y = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n\right),\quad \left(-\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n\right),\quad k, n \in Z.$

5. Решите неравенство $\sqrt{(x+2)|x+1| + |x|} \ge x + 2.$

Решение:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 2 < 0, \\ (x+2)(-x-1) - x \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x + 2 \ge 0, \\ (x+2)|x+1| + |x| \ge (x+2)^2. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -2, \\ x^2 + 4x + 2 \le 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [-2, -1], \\ -x^2 - 3x - 2 - x \ge x^2 + 4x + 4; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-1, 0], \\ x^2 + 3x + 2 - x \ge x^2 + 4x + 4; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (0, +\infty), \\ x^2 + 3x + 2 + x \ge x^2 + 4x + 4. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -2, \\ x \in [-2-\sqrt{2}; -2+\sqrt{2}]; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [-2, -1], \\ x^2 + 4x + 3 \le 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-1, 0], \\ 2x + 2 \le 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (0, +\infty), \\ 2 \ge 4. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [-2-\sqrt{2}; -2); \\ x \in [-2, -1]; \\ \text{нет решений}; \\ \text{нет решений}. \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in [-2-\sqrt{2}; -1].$$

Ответ: $x \in [-2-\sqrt{2}; -1].$

6. Найдите множество значений функции $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\sin(\sqrt{x-3} + 2x + 2)\right).$

Решение:

$f(x) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\sin(\sqrt{x-3} + 2x + 2)\right)$ Так как $\sqrt{x-3} + 2x + 2 \in [8; \infty)$, то

$\sin(\sqrt{x-3} + 2x + 2) \in [-1; 1],\quad \dfrac{\pi}{4}\sin(\sqrt{x-3} + 2x + 2) \in [-\pi/4; \pi/4]$. Следовательно,

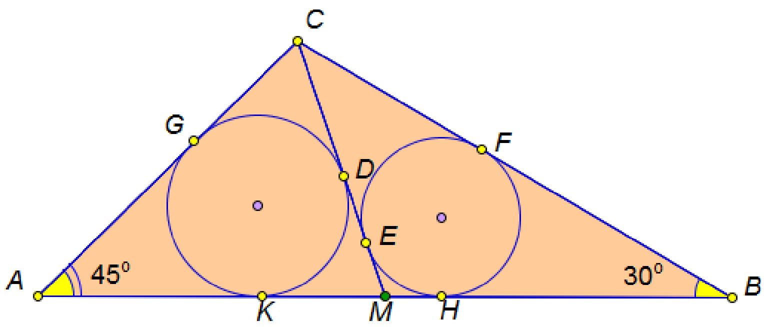
$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\sin(\sqrt{x-3} + 2x + 2)\right) \in [\sqrt{2}/2; 1] \quad \Rightarrow \quad 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\sin(\sqrt{x-3} + 2x + 2)\right) \in [\sqrt{2}; 2].$

Ответ: $[\sqrt{2};2]$.

7. В треугольнике ABC углы A и B равны $45°$ и $30°$ соответственно, CM — медиана. Окружности, вписанные в треугольники ACM и BCM касаются отрезка CM в точках D и E. Найдите площадь треугольника ABC, если длина отрезка DE равна $4(\sqrt{2}-1)$.

Решение:

По свойству касательных к окружности имеем:



$AG = AK = x,\ CG = CD = y,$

$CE = CF = z,\ \ BF = BH = u,$

$DM = \dfrac{AB}{2} - AK = \dfrac{AB}{2} - x,$

$ME = \dfrac{AB}{2} - BH = \dfrac{AB}{2} - u,$

Тогда $DE = z - y,\ DE = DM - ME = u - x.$ Следовательно,

$2DE = z - y + u - x = CB - AC.$ Пусть $CB = a,\ \ AC = b.$ Тогда $a - b = 8(\sqrt{2}-1)$. По теореме синусов имеем $\dfrac{a}{\sin 45°} = \dfrac{b}{\sin 30°}$, или $\sqrt{2}a = 2b,$ т.е. $a = \sqrt{2}b.$ Таким образом, $b = 8,\ a = 8\sqrt{2}.$

Площадь треугольника ABC находим по формуле $S = \dfrac{ab\sin 105°}{2}$.

$$S = \frac{ab\sin(45° + 30°)}{2} = \frac{ab(\sin 45°\cos 30° + \cos 45°\sin 30°)}{2} = \frac{ab\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{8} = 16(\sqrt{3}+1).$$

Ответ: $16(\sqrt{3}+1)$.

8. Найдите угол между касательными к графику функции $y = x^2\sqrt{3}/24$, проходящими через точку $M\left(4;-2\sqrt{3}\right)$.

Решение:

$$y = \frac{x^2}{8\sqrt{3}},\ M\left(4;-2\sqrt{3}\right).\ \ y = \frac{x_0^2}{8\sqrt{3}} + \frac{x_0}{4\sqrt{3}}\left(x - x_0\right);\ -2\sqrt{3} = \frac{x_0^2}{8\sqrt{3}} + \frac{x_0}{4\sqrt{3}}\left(4 - x_0\right);$$

$x_0^2 - 8x_0 - 48 = 0$; $x_0 = 4 \pm 8$; $\left(x_0\right)_1 = 12,\ \left(x_0\right)_2 = -4$. Уравнения касательных:

1) $y = 6\sqrt{3} + \sqrt{3}\left(x - 12\right);\ \ y = \sqrt{3}x - 6\sqrt{3},\ \ \mathrm{tg}\alpha_1 = \sqrt{3},\ \ \alpha_1 = 60°$;

2) $y = \dfrac{2}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(x + 4\right);\ \ y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x - \dfrac{2}{\sqrt{3}},\ \ \mathrm{tg}\alpha_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \ \alpha_2 = -30°$.

Угол между касательными: $\varphi = 60^\circ - \left(-30^\circ\right) = 90^\circ$, **Ответ:** 90°.

9. Определите все значения a, при которых уравнение $x + |x| = 2\sqrt{3 + 2ax - 4a}$ имеет два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений a.

Решение:

I. При $x \ge 0$ $x^2 - 2ax + 4a - 3 = 0$ (*).

1. Уравнение (*) имеет два различных неотрицательных корня, если:

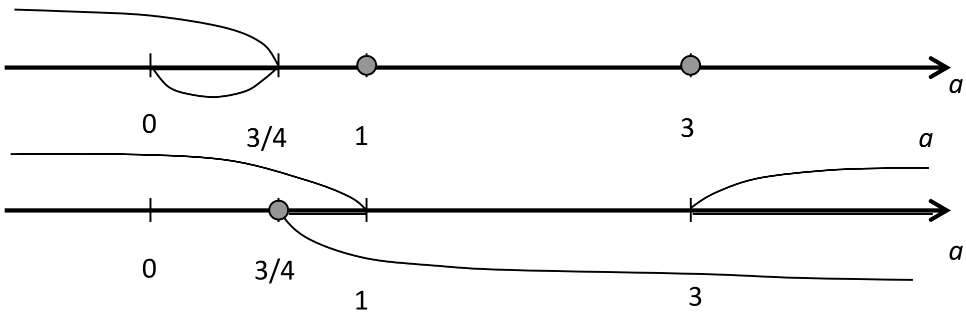
$$\begin{cases} D/4 = a^2 - 4a + 3 > 0, \\ a > 0, \\ 4a - 3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a < 1, \\ a > 3, \end{array}\right. \\ a > 0, \\ a \ge 3/4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3/4 \le a < 1, \\ a > 3. \end{array}\right.$$

2. Уравнение (*) имеет один неотрицательный корень, если:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D = 0, \\ a \ge 0, \end{cases} \\ 4a - 3 < 0, \\ \begin{cases} a = 3/4, \\ a < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1, \\ a = 3, \\ a < 3/4. \end{array}\right.$$

II. При $x < 0$ $x = \dfrac{4a - 3}{2a} < 0 \Rightarrow 0 < a < 3/4$.

Сравнивая с I, 2, замечаем, что при $0 < a < 3/4$ также будет два различных решения системы.

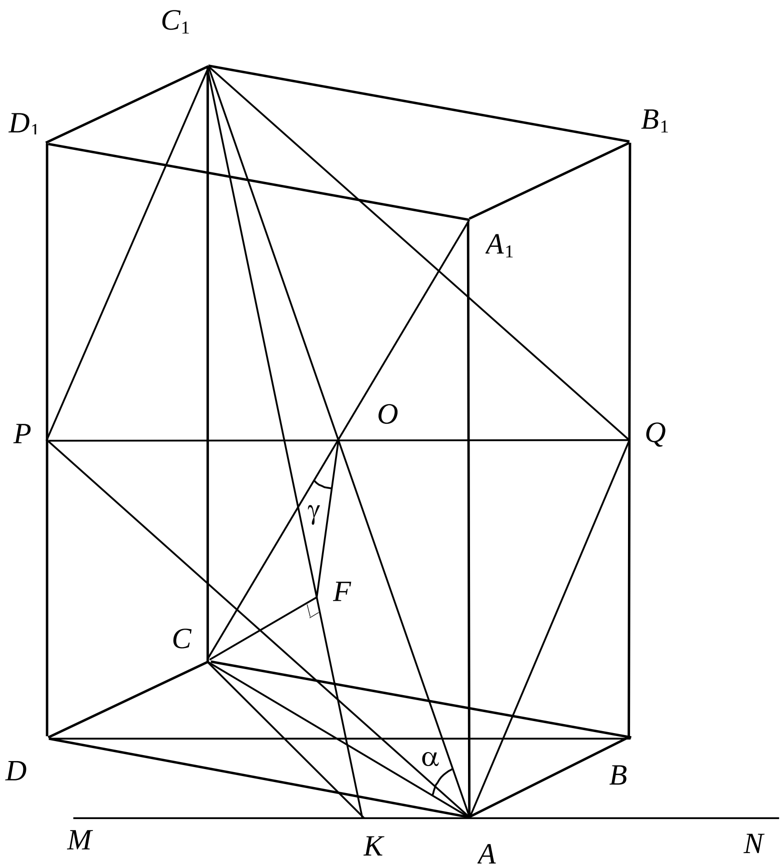


Ответ: при $a \in [3/4;1) \cup (3;+\infty)$ $x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 4a + 3}$;

при $0 < a < 3/4$ $x_1 = \dfrac{4a - 3}{2a}$, $x_2 = a + \sqrt{a^2 - 4a + 3}$.

10. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ CA_1, равная d, наклонена к плоскости основания под углом 60° и образует угол 45° с плоскостью, проходящей через диагональ AC_1 и середину бокового ребра BB_1. Найдите площадь основания параллелепипеда.

Решение:



Если P и Q –середины боковых ребер DD_1 и BB_1, то $PQ \| BD$ и $(AQC_1) \| (BD)$.

Проведем $(MN) \| BD,\ A \in (MN);\ CK \perp (MN),\ CF \perp KC_1$. Так как $CF \perp (AKC_1)$, то $\angle COF = \gamma$ –заданный в условиях угол между диагональю CA_1 и плоскостью (AQC_1). Заданный угол между диагональю CA_1 и плоскостью основания равен $\angle CAC_1 = \alpha$.

В прямоугольном треугольнике COF $CF = CO \cdot \sin \angle COF$, т.е. $CF = \dfrac{d}{2} \cdot \sin \gamma$.

В треугольнике CKC_1 $\dfrac{CK}{CC_1} = \dfrac{CF}{FC_1}$, отсюда $CK = \dfrac{CC_1 \cdot CF}{\sqrt{CC_1^2 - CF^2}}$.

Так как $CC_1 = d \cdot \sin \alpha$, то $CK = \dfrac{d \cdot \sin \alpha \cdot d \cdot \sin \gamma}{2\sqrt{d^2 \sin^2 \alpha - \dfrac{d^2 \sin^2 \gamma}{4}}} = \dfrac{d \cdot \sin \alpha \cdot \sin \gamma}{\sqrt{4 \sin^2 \alpha - \sin^2 \gamma}}$.

Площадь основания параллелепипеда равна $S = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot CK$. Так как

$BD = AC = d \cdot \cos\alpha$, то $S = \frac{1}{2} \cdot d \cdot \cos\alpha \cdot \frac{d \cdot \sin\alpha \cdot \sin\gamma}{\sqrt{4\sin^2\alpha - \sin^2\gamma}} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sin\gamma}{2\sqrt{4\sin^2\alpha - \sin^2\gamma}} \cdot d^2$.

α=60°, γ=45°. $S = \frac{\sqrt{3} \cdot d^2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{4 \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{3} d^2}{8\sqrt{5}}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3} d^2}{8\sqrt{5}}$.