

Вариант 7 (условия и решения)

Задача 1 (8 баллов). Перевести шестнадцатеричное число $A_{16} = 250,28$ в десятичную систему счисления.

Решение задачи 1.

- 1) $250_{16} = 2 \cdot 16^2 + 5 \cdot 16^1 + 0 \cdot 16^0 = 2 \cdot 256 + 5 \cdot 16 + 0 \cdot 1 = 512 + 80 = 592_{10}$.
- 2) $0,28_{16} = 2 \cdot 16^{-1} + 8 \cdot 16^{-2} = 2 \cdot (1/16) + 8 \cdot (1/256) = 1/8 + 1/32 = 0,125 + 0,03125 = 0,15625_{10}$.

Ответ: $A_{10} = 592,15625$.

Задача 2 (8 баллов). Найти разность шестнадцатеричных чисел $A_{16} = B127$ и $B_{16} = C1AB$, используя 16-разрядный сумматор, старший разряд которого знаковый. Ответ дать в шестнадцатеричной форме. Числа со знаком, выражаемые с использованием 16 двоичных разрядов, должны находиться между -32768 и 32767 . При переполнении разрядной сетки ответ сопроводить сообщением.

Решение задачи 2.

- 1) $A - B = A + (-B)$.
- 2) $[A_2]_{пр} = 1,011\ 0001\ 0010\ 0111$ $[-B_2]_{пр} = 0,100\ 0001\ 1010\ 1011$
- 3) $[A_2]_д = 1,100\ 1110\ 1101\ 1001$ $[-B_2]_д = 0,100\ 0001\ 1010\ 1011$
- 4) $[A_2]_д^м = 11,100\ 1110\ 1101\ 1001$ $[-B_2]_д^м = 00,100\ 0001\ 1010\ 1011$
- 5) $[A_2]_д^м + [-B_2]_д^м = 11,100\ 1110\ 1101\ 1001 + 00,100\ 0001\ 1010\ 1011 = 00,001\ 0000\ 1000\ 0100$
- 6) $[C_2]_{пр} = 0,001\ 0000\ 1000\ 0100$

Ответ: $C_{16} = 1084$

Задача 3 (8 баллов). Дано выражение, в котором используются операции над булевыми величинами, принимающими значения Т (истина) и F (ложь). Выражение может содержать круглые скобки и следующие знаки операций: отрицание (\neg), конъюнкция (\wedge), дизъюнкция (\vee), импликация (\rightarrow). Операции имеют следующие уровни приоритета: уровень 1 (\neg), уровень 2 (\wedge), уровень 3 (\vee), уровень 4 (\rightarrow). Построить таблицу истинности для выражения $(p \wedge (q \vee r)) \rightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$.

Решение задачи 3.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$(p \wedge (q \vee r)) \rightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	T	T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	F	F	F	T
F	T	F	T	F	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	F	F	T

Задача 4 (8 баллов). Дано выражение, в котором используются поразрядные операции над 8-ми разрядными целыми числами без знака. В выражении используются круглые скобки и следующие знаки операций: поразрядное НЕ (\sim), поразрядное И ($\&$), поразрядное ИЛИ ($|$), поразрядный сдвиг влево (\ll), поразрядный сдвиг вправо (\gg). Операции имеют следующие уровни приоритета: уровень 1 (\sim), уровень 2 (\ll и \gg), уровень 3 ($\&$), уровень 4 ($|$). Вычислить значение следующего выражения: $\sim(b \ll 1 \& b \gg 1) \& ((a | b) \gg 1 | (a \& b) \ll 1)$ для $a = 195$ и $b = 60$. Ответ дать в двоичной и десятичной формах.

Решение задачи 4.

- 1) $a = 11000011_2$
- 2) $b = 00111100_2$
- 3) $b \ll 1 = 78_{16} = 01111000_2$
- 4) $b \gg 1 = 1e_{16} = 00011110_2$
- 5) $b \ll 1 \& b \gg 1 = 18_{16} = 00011000_2$
- 6) $\sim(b \ll 1 \& b \gg 1) = e7_{16} = 11100111_2$
- 7) $a | b = ff_{16} = 11111111_2$
- 8) $(a | b) \gg 1 = 7f_{16} = 01111111_2$
- 9) $a \& b = 0_{16} = 00000000_2$

10) $(a \& b) \ll 1 = 0_{16} = 00000000_2$

11) $(a | b) \gg 1 | (a \& b) \ll 1 = 7_{16} = 01111111_2$

12) $\sim(b \ll 1 \& b \gg 1) \& ((a | b) \gg 1 | (a \& b) \ll 1) = 67_{16} = 01100111_2$

Ответ: $01100111_2 = 103_{10}$

Задача 5 (8 баллов). Пусть $\{a_n\}$ ($n \geq 1$) – последовательность, для которой $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$. Вычислить a_{10} , зная, что $a_1 = 10, a_2 = 16$.

Решение задачи 5.

Первый способ. $a_1 = 10, a_2 = 16, a_3 = 34, a_4 = 88, a_5 = 250, a_6 = 736, a_7 = 2194, a_8 = 6568, a_9 = 19690, a_{10} = 59056$.

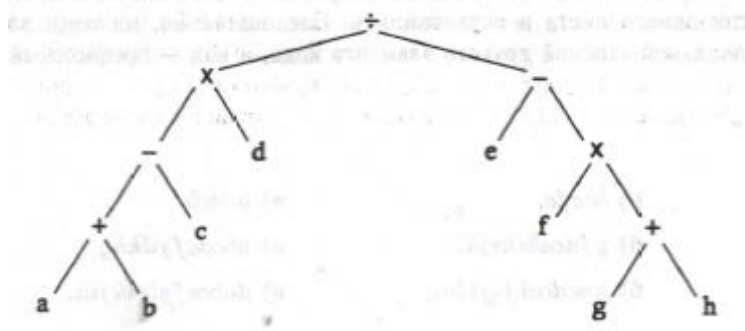
Второй способ. Можно найти выражения для a_n через n , считая, что a_1 и a_2 заданы. Общий член последовательности будет иметь вид: $a_n = 7 + 3^n$. Для $n = 10$ будем иметь: $a_{10} = 7 + 3^{10} = 7 + 59049 = 59056$.

Ответ: $a_{10} = 59056$.

Задача 6 (8 баллов). Дана инфиксная запись арифметического выражения $((a + b) - c) * d / (e - (f * (g + h)))$. Найти префиксную запись этого выражения.

Решение задачи 6.

Сначала надо построить бинарное дерево, изображающее арифметическое выражение. Корень дерева и все внутренние вершины дерева являются бинарными операторами, а листья дерева – операндами. Построенное дерево будет иметь вид, представленный на рисунке. Затем надо обойти дерево в прямом порядке (pre-ordered): вершина – левое поддерево – правое поддерево.



Ответ: $/ * - + a b c d - e * f + g h$.

Задача 7 (8 баллов). Определить количество правильных скобочных последовательностей длины 8, то есть таких последовательностей из 4 левых и 4 правых скобок, в которых количество открывающих скобок равно количеству закрывающих, и в любом её префиксе открывающих скобок не меньше, чем закрывающих.

Решение задачи 7.

Первый способ. Задачу можно решить методом полного перебора, который дает следующие правильные скобочные последовательности длины 8: $((((()))$, $((()()))$, $((()()))$, $((()()))$, $((()()))$, $((()()))$, $((()()))$, $((()()))$, $((()()))$, $((()()))$, $((()()))$, $((()()))$, $((()()))$, $((()()))$, $((()()))$.

Второй способ. Можно показать, что количество правильных скобочных последовательностей длины 8 определяется четвертым числом Каталана. Само число Каталана выражается формулой $C(n) = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$. $C(4) = \frac{(2 \cdot 4)!}{4!(4+1)!} = \frac{(8)!}{4!(5)!} = \frac{(6 \cdot 7 \cdot 8)}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)} = 7 \cdot 2 = 14$.

Ответ: 14.

Задача 8 (12 баллов). В потоке из 200 студентов 75 изучают математику, 70 – историю, 75 – социологию, 35 – математику и социологию, 20 – историю и социологию, 25 – математику и историю, 15 студентов – все три предмета.

- Сколько студентов изучают хотя бы один из трех перечисленных предметов?
- Сколько студентов изучают только один из трех перечисленных предметов?
- Сколько студентов изучают историю или математику, но не изучают социологию?
- Сколько студентов не выбрали ни историю, ни математику?

Решение задачи 8.

Задачу можно решить графически (с использованием диаграмм Эйлера-Венна). Предлагается аналитический метод (с использованием комбинаторного принципа сложения).

Пусть универсум U – множество из 200 студентов, M – множество студентов, изучающих математику, I – множество студентов, изучающих историю, S – множество студентов, изучающих социологию. Тогда множество студентов, изучающих хотя бы один из трех перечисленных предметов, равно

$$|M \cup I \cup S| = |M| + |I| + |S| - |M \cap I| - |I \cap S| - |S \cap M| + |M \cap I \cap S| = 75 + 70 + 75 - 25 - 20 - 35 + 15 = 155.$$

Множество студентов, изучающих только один из трех перечисленных предметов, равно

$$(|M| - |M \cap I| - |S \cap M| + |M \cap I \cap S|) + (|I| - |M \cap I| - |I \cap S| + |M \cap I \cap S|) + (|S| - |I \cap S| - |S \cap M| + |M \cap I \cap S|) = (75 - 25 - 35 + 15) + (70 - 25 - 20 + 15) + (75 - 20 - 35 + 15) = 30 + 40 + 35 = 105.$$

Множество студентов, изучающих историю или математику, но не изучающих социологию, равно

$$(|I| + |M| - |I \cap M|) - (|M \cap S| + |I \cap S| - |M \cap I \cap S|) = (70 + 75 - 25) - (35 + 20 - 15) = 120 - 40 = 80.$$

Множество студентов, которые не выбрали ни историю, ни математику, состоит из множества студентов, которые выбрали только социологию или тех студентов, которые не выбрали ни один из трех перечисленных предметов. Если множество студентов, которые не выбрали ни один из трех перечисленных предметов, равно

$$|U| - |M \cup I \cup S| = 200 - 155 = 45.$$

Тогда множество студентов, которые не выбрали ни историю, ни математику, равно

$$(|S| - |I \cap S| - |S \cap M| + |M \cap I \cap S|) + (|U| - |M \cup I \cup S|) = (75 - 20 - 35 + 15) + 45 = 35 + 45 = 80.$$

Ответ: а) 155; б) 105; в) 80; г) 80.

Задача 9 (16 баллов). Дана последовательность из N целых положительных чисел. Требуется найти число, которое встречается в последовательности наиболее часто. Если таких чисел несколько, то найти наименьшее из них.

Входные данные. Входной файл содержит целое число N ($1 \leq N \leq 1000$) – длина последовательности и N целых положительных чисел, каждое из которых не больше 1000.

Выходные данные. В выходной файл вывести одно единственное целое число, которое встречается в последовательности наиболее часто.

Примеры входных данных	Примеры выходных данных
5 11 12 13 14 15	11
10 99 99 99 6 5 7 6 7 3 7	7

Решение задачи 9.

Язык Си.

```
#include "stdafx.h"
FILE *ifs, *ofs;
static int arr[1000] = { 0 };
int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[]) {
    int n, number;
    if( (ifs = fopen( "input.txt", "r" )) == NULL) return 1;
    if( (ofs = fopen( "output.txt", "w" )) == NULL) return 2;
    fscanf( ifs, "%d", &n );
    for (int i = 0; i < n; i++) { fscanf( ifs, "%d", &number ); arr[number]++; }
    int best = 0;
    for (int i = 1; i < 1000; i++) if (arr[i] > arr[best]) best = i;
    fprintf( ofs, "%d", best );
    fclose( ifs );
    fclose( ofs );
    return 0;
}
```

Язык Паскаль.

```
program Project_7_9;
```

```

{$APPTYPE CONSOLE}
uses SysUtils;
var arr: array[1..1000] of Integer;
    n, number, i, best: Integer;
    f, g: TextFile;
begin
  AssignFile(f, 'input.txt');
  AssignFile(g, 'output.txt');
  try
    Reset(f);
    Rewrite(g);
    try
      Read( f, n);
      for i := 1 to 1000 do arr[i] := 0;
      for i := 1 to n do
        begin
          Read(f, number);
          Inc(arr[number]);
        end;
      best := 1;
      for i := 2 to 1000 do if (arr[i] > arr[best]) then best := i;
      Writeln(g, best);
    finally
      CloseFile(f);
      CloseFile(g);
    end;
  except
    on EInOutError do Writeln('InOutError!');
  end;
end.

```

Задача 10 (16 баллов). На плоскости заданы два отрезка координатами своих начал и концов. Все координаты по модулю не превышают 10^4 . Определить, пересекаются ли два отрезка.

Входные данные. Во входном файле записаны 4 пары целых чисел, задающих координаты начал и концов отрезков.

Выходные данные. В выходной файл вывести слово YES, если отрезки пересекаются, и слово NO в противном случае.

Примеры входных данных	Примеры выходных данных
0 0 5 5 0 5 5 0	YES
0 0 5 5 -1 0 0 -1	NO

Решение задачи 10.

Язык Си.

```

#include "stdafx.h"
FILE *ifs, *ofs;
struct point { double x, y; };
double min(double a, double b) { return ((a <= b) ? a : b); }
double max(double a, double b) { return ((a >= b) ? a : b); }
int direction(struct point pi, struct point pj, struct point pk) {
  return (((pk.x-pi.x)*(pj.y-pi.y)-(pj.x-pi.x)*(pk.y-pi.y)) >= 0 ? 1 : -1);
}
bool on_segment(struct point pi, struct point pj, struct point pk) {
  if ((pk.x >= min(pi.x, pj.x) && pk.x <= max(pi.x, pj.x)) &&
      (pk.y >= min(pi.y, pj.y) && pk.y <= max(pi.y, pj.y))) return true;
  else return false;
}
bool segment_intersect(struct point p1, struct point p2, struct point p3, struct point p4) {
  int d1, d2, d3, d4;
  d1 = direction( p3, p4, p1 );
  d2 = direction( p3, p4, p2 );
  d3 = direction( p1, p2, p3 );
  d4 = direction( p1, p2, p4 );
  if ((d1 > 0 && d2 < 0 || d1 < 0 && d2 > 0) && (d3 > 0 && d4 < 0 || d3 < 0 && d4 > 0)) return true;
  else if (d1 = 0 && on_segment( p3, p4, p1 )) return true;
  else if (d2 = 0 && on_segment( p3, p4, p2 )) return true;
  else if (d3 = 0 && on_segment( p1, p2, p3 )) return true;
  else if (d4 = 0 && on_segment( p1, p2, p4 )) return true;
  else return false;
}

```

```

int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[]) {
    struct point a, b, c, d;
    if( (ifs = fopen( "input.txt", "r" )) == NULL) return 1;
    if( (ofs = fopen( "output.txt", "w" )) == NULL) return 2;
    fscanf( ifs, "%lf %lf %lf %lf %lf %lf %lf %lf", &a.x, &a.y, &b.x, &b.y, &c.x, &c.y, &d.x, &d.y);
    fprintf( ofs, (segment_intersect( a, b, c, d )) ? "YES" : "NO" );
    fclose( ifs );
    fclose( ofs );
    return 0;
}

```

Язык Паскаль.

```

program Project_7_10;
{$APPTYPE CONSOLE}
uses SysUtils, Math;
type Point = record x, y: Double; end;
var f, g: TextFile;
    p1, p2, p3, p4: Point;
function Direction(pi, pj, pk: Point): TValueSign ;
begin
    Result := Sign((pk.x-pi.x)*(pj.y-pi.y)-(pj.x-pi.x)*(pk.y-pi.y));
end;
function OnSegment(pi, pj, pk: Point): Boolean;
begin
    Result := ((pk.x >= Min(pi.x, pj.x)) and (pk.x <= Max(pi.x, pj.x))) and
              ((pk.y >= Min(pi.y, pj.y)) and (pk.y <= Max(pi.y, pj.y)));
end;
function SegmentIntersect(p1, p2, p3, p4: Point): Boolean;
var d1, d2, d3, d4: TValueSign;
begin
    d1 := Direction(p3, p4, p1);
    d2 := Direction(p3, p4, p2);
    d3 := Direction(p1, p2, p3);
    d4 := Direction(p1, p2, p4);
    if (((d1 > 0) and (d2 < 0)) or ((d1 < 0) and (d2 > 0))) and
        (((d3 > 0) and (d4 < 0)) or ((d3 < 0) and (d4 > 0))) then Result := True
    else if (d1 = 0) and OnSegment(p3, p4, p1) then Result := True
    else if (d2 = 0) and OnSegment(p3, p4, p2) then Result := True
    else if (d3 = 0) and OnSegment(p1, p2, p3) then Result := True
    else if (d4 = 0) and OnSegment(p1, p2, p4) then Result := True
    else Result := False;
end;
begin
    AssignFile(f, 'input.txt');
    AssignFile(g, 'output.txt');
    try
        Reset(f);
        Rewrite(g);
        try
            Readln(f, p1.x, p1.y, p2.x, p2.y, p3.x, p3.y, p4.x, p4.y);
            if SegmentIntersect(p1, p2, p3, p4) then Writeln(g, 'YES')
            else Writeln(g, 'NO')
        finally
            CloseFile(f);
            CloseFile(g);
        end;
    except
        on EInOutError do Writeln('InOutError!');
    end;
end.

```