

Вариант 5 (условия и решения)

Задача 1 (8 баллов). Перевести шестнадцатеричное число $A_{16} = 5C,3A$ в десятичную систему счисления.

Решение задачи 1.

- 1) $5C_{16} = 5 \cdot 16^1 + 12 \cdot 16^0 = 5 \cdot 16 + 12 \cdot 1 = 80 + 12 = 92_{10}$.
- 2) $0,3A_{16} = 3 \cdot 16^{-1} + 10 \cdot 16^{-2} = 3 \cdot (1/16) + 10 \cdot (1/256) = 3/16 + 10/256 = 0,1875 + 0,0390625 = 0,2265625_{10}$.

Ответ: $A_{10} = 92,2265625$

Задача 2 (8 баллов). Найти сумму шестнадцатеричных чисел $A_{16} = 3C14$ и $B_{16} = 89AC$, используя 16-разрядный сумматор, старший разряд которого знаковый. Ответ дать в шестнадцатеричной форме. Числа со знаком, выражаемые с использованием 16 двоичных разрядов, должны находиться между -32768 и 32767 . При переполнении разрядной сетки ответ сопроводить сообщением.

Решение задачи 2.

- 1) $[A_2]_{np} = 0,011\ 1100\ 0001\ 0100$ $[B_2]_{np} = 1,000\ 1001\ 1010\ 1100$
- 2) $[A_2]_d = 0,011\ 1100\ 0001\ 0100$ $[B_2]_d = 1,111\ 0110\ 0101\ 0100$
- 3) $[A_2]_d^M = 00,011\ 1100\ 0001\ 0100$ $[B_2]_d^M = 11,111\ 0110\ 0101\ 0100$
- 4) $[A_2]_d^M + [B_2]_d^M = 00,011\ 1100\ 0001\ 0100 + 11,111\ 0110\ 0101\ 0100 = 00,011\ 0010\ 0110\ 1000$
- 5) $[C_2]_{np} = 0,011\ 0010\ 0110\ 1000$

Ответ: $C_{16} = 3268$

Задача 3 (8 баллов). Дано выражение, в котором используются операции над булевскими величинами, принимающими значения Т (истина) и F (ложь). Выражение может содержать круглые скобки и следующие знаки операций: отрицание (\neg), конъюнкция (\wedge), дизъюнкция (\vee), импликация (\rightarrow). Операции имеют следующие уровни приоритета: уровень 1 (\neg), уровень 2 (\wedge), уровень 3 (\vee), уровень 4 (\rightarrow). Построить таблицу истинности для выражения $((p \rightarrow q) \vee r) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$.

Решение задачи 3.

p	q	r	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \vee r$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$((p \rightarrow q) \vee r) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$
T	T	T	T	T	F	F	F	F
T	T	F	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T	T

Задача 4 (8 баллов). Дано выражение, в котором используются поразрядные операции над 8-ми разрядными целыми числами без знака. В выражении используются круглые скобки и следующие знаки операций: поразрядное НЕ (\sim), поразрядное И ($\&$), поразрядное ИЛИ (\mid), поразрядный сдвиг влево (\ll), поразрядный сдвиг вправо (\gg). Операции имеют следующие уровни приоритета: уровень 1 (\sim), уровень 2 (\ll и \gg), уровень 3 ($\&$), уровень 4 (\mid). Вычислить значение следующего выражения: $\sim(b \ll 1 \& b \gg 1) \& ((a \mid b) \gg 1 \mid (a \& b) \ll 1)$ для $a = 240$ и $b = 15$. Ответ дать в двоичной и десятичной формах.

Решение задачи 4.

- 1) $a = 11110000_2$
- 2) $b = 00001111_2$
- 3) $b \ll 1 = 1e_{16} = 00001110_2$
- 4) $b \gg 1 = 7_{16} = 00000111_2$
- 5) $b \ll 1 \& b \gg 1 = 6_{16} = 00000110_2$
- 6) $\sim(b \ll 1 \& b \gg 1) = f9_{16} = 11111001_2$
- 7) $a \mid b = ff_{16} = 11111111_2$
- 8) $(a \mid b) \gg 1 = 7f_{16} = 01111111_2$
- 9) $a \& b = 0_{16} = 00000000_2$
- 10) $(a \& b) \ll 1 = 0_{16} = 00000000_2$

- 11) $(a | b) \gg 1 | (a \& b) \ll 1 = 7f_{16} = 01111111_2$
 12) $\sim(b \ll 1 \& b \gg 1) \& ((a | b) \gg 1 | (a \& b) \ll 1) = 79_{16} = 01111001_2$

Ответ: $01111001_2 = 121_{10}$

Задача 5 (8 баллов). Пусть $\{a_n\}$ ($n \geq 1$) – последовательность, для которой $a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = n$. Вычислить a_{10} , зная, что $a_1 = 1$, $a_2 = 0$.

Решение задачи 5.

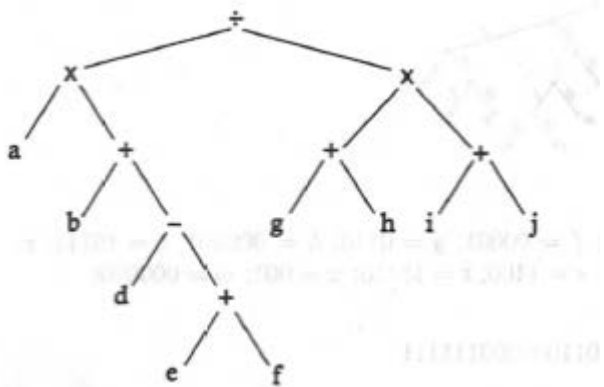
$a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 2, a_5 = 9, a_6 = 29, a_7 = 83, a_8 = 226, a_9 = 602, a_{10} = 1588$.

Ответ: $a_{10} = 1588$

Задача 6 (8 баллов). Дана инфиксная запись арифметического выражения $(a * (b + (d - (e + f)))) / ((g + h) * (i + j))$. Найти префиксную запись этого выражения.

Решение задачи 6.

Сначала надо построить бинарное дерево, изображающее арифметическое выражение. Корень дерева и все внутренние вершины дерева являются бинарными операторами, а листья дерева – операндами. Построенное дерево имеет вид, представленный на рисунке. Затем надо обойти дерево в прямом порядке (pre-ordered): вершина – левое поддерево – правое поддерево.

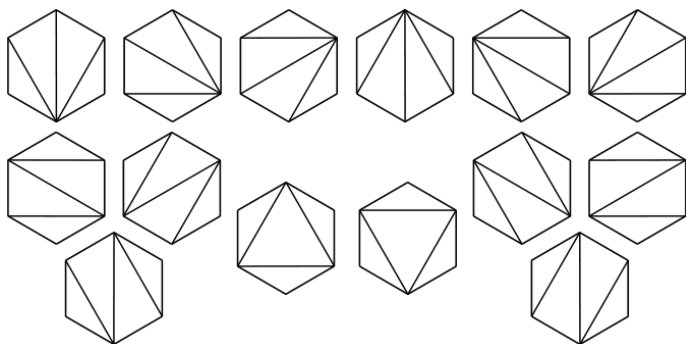


Ответ: $/ * a + b - d + e f * + g h + i j$

Задача 7 (8 баллов). Сколько существует способов разбиения выпуклого шестиугольника на треугольники, путем соединения вершин шестиугольника с использованием трех непересекающихся отрезков.

Решение задачи 7.

Первый способ. Задачу можно решить методом полного перебора, который дает следующие 14 вариантов:



Второй способ. Можно показать, что число разбиений выпуклого шестиугольника на треугольники, путем соединения вершин шестиугольника с использованием трех непересекающихся отрезков, определяется четвертым числом Каталана. Само число Каталана выражается формулой $C(n) = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$. $C(4) = \frac{(2 \cdot 4)!}{4!(4+1)!} = \frac{8!}{4!(5)!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 2 \cdot 7 = 14$.

Ответ: 14

Задача 8 (12 баллов). Предположим, что из 100 опрошенных студентов 50 изучают химию, 53 – математику, 42 – физику, 15 – химию и физику, 20 занимаются физикой и математикой, 25 – математикой и химией и 5 студентов изучают все три предмета.

- a) Сколько студентов изучают хотя бы один из трех перечисленных предметов?
- b) Сколько студентов не изучают ни один из трех перечисленных предметов?
- c) Сколько студентов изучают только математику?
- d) Сколько студентов изучают физику или химию, но не изучают математику?

Решение задачи 8.

Задачу можно решить графически (с использованием диаграмм Эйлера-Венна). Предлагается аналитический метод (с использованием комбинаторного принципа сложения).

Пусть универсум U – множество из 100 студентов, X – множество студентов, изучающих химию, M – множество студентов, изучающих математику, Φ – множество студентов, изучающих физику. Тогда множество студентов, изучающих хотя бы один из трех перечисленных предметов, равно

$$|X \cup M \cup \Phi| = |X| + |M| + |\Phi| - |X \cap M| - |M \cap \Phi| - |\Phi \cap X| + |X \cap M \cap \Phi| = 50 + 53 + 42 - 25 - 20 - 15 + 5 = 90.$$

Множество студентов, не изучающих ни один из трех перечисленных предметов, равно

$$|U| - |X \cup M \cup \Phi| = 100 - 90 = 10.$$

Множество студентов, изучающих только математику, равно

$$|M| - |X \cap M| - |M \cap \Phi| + |X \cap M \cap \Phi| = 53 - 25 - 20 + 5 = 13.$$

Множество студентов, изучающих физику или химию, но не изучают математику, равно

$$|X| + |\Phi| - |X \cap M| - |M \cap \Phi| - |\Phi \cap X| + |X \cap M \cap \Phi| = 50 + 42 - 25 - 20 - 15 + 5 = 37.$$

Ответ: a) 90; b) 10; c) 13; d) 37

Задача 9 (16 баллов). Два различных натуральных числа называются дружественными, если первое из них равно сумме делителей второго числа, за исключением самого второго числа, а второе равно сумме делителей первого числа, за исключением самого первого числа. Написать программу для нахождения всех пар дружественных чисел, оба из которых принадлежат промежутку от M до N .

Входные данные. Входной файл содержит два целых числа M и N ($1 \leq M \leq N \leq 10^6$).

Выходные данные. В выходной файл вывести все найденные пары дружественных чисел, если они есть. Первое число пары должно быть меньше второго. Если в заданном промежутке пар дружественных чисел нет, вывести слово ABSENT.

Примеры входных данных	Примеры выходных данных
200 300	220 284
200 250	ABSENT

Решение задачи 9.

Язык Си.

```
#include "stdafx.h"
FILE *ifs, *ofs;
typedef unsigned long long int ULLI;
ULLI sum_of_divs(ULLI number) {
    ULLI sum = 0;
    for (ULLI d = 1; d < number / 2 + 1; ++d) if (number % d == 0) sum += d;
    return sum;
}
bool is_friendly(ULLI number1, ULLI number2) {
    return sum_of_divs(number1) == number2 && sum_of_divs(number2) == number1;
}
int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[]) {
    ULLI m, n;
    int k = 0;
```

```

if( (ifs = fopen( "input.txt", "r" )) == NULL) return 1;
if( (ofs = fopen( "output.txt", "w" )) == NULL) return 2;
fscanf( ifs, "%lld %lld", &m, &n );
for (ULLI i = m; i <= n; ++i)
    for (ULLI j = i + 1; j <= n; ++j)
        if (is_friendly( i, j )) {
            if (i < j) fprintf( ofs, "%lld %lld", i, j );
            else fprintf( ofs, "%lld %lld", j, i );
            k++;
        }
if (k == 0) fprintf( ofs, "ABSENT" );
fclose( ifs );
fclose( ofs );
return 0;
}

```

Язык Паскаль.

```

program Project_5_9;
{$APPTYPE CONSOLE}
uses SysUtils;
function sum_of_divs(number: Integer): int64;
var sum: int64; d: Integer;
begin
    sum := 0;
    for d := 1 to number div 2 + 1 do
        if (number mod d = 0) then sum := sum + d;
    result := sum;
end;
function is_friendly(number1, number2: Integer): Boolean;
begin
    result := (sum_of_divs(number1) = number2) and (sum_of_divs(number2) = number1);
end;
var m, n, k, i, j: Integer;
    f, g: TextFile;
begin
    AssignFile(f, 'input.txt');
    AssignFile(g, 'output.txt');
    try
        Reset(f);
        Rewrite(g);
        try
            Readln(f, m, n);
            k := 0;
            for i := m to n do
                for j := i + 1 to n do
                    if (is_friendly(i, j)) then
                        begin
                            if (i < j) then Writeln(g, i:8, j:8)
                            else Writeln(g, j:8, i:8);
                            Inc(k);
                        end;
                if (k = 0) then Writeln(g, 'ABSENT');
            finally
                CloseFile(f);
                CloseFile(g);
            end;
        except
            on EInOutError do Writeln('InOutError!');
        end;
    end.

```

Задача 10 (16 баллов). На плоскости даны простой многоугольник (т. е. без самокасаний и самопересечений, но не обязательно выпуклый) и точка. Требуется решить вопрос о принадлежности точки многоугольнику.

Входные данные. Входной файл содержит целое число N ($3 \leq N \leq 1000$) – количество вершин многоугольника, последовательность из N пар действительных координат вершин многоугольника и действительные координаты точки. Все координаты по модулю не больше 10^6 . Вершины многоугольника заданы в порядке их обхода против часовой стрелки.

Выходные данные. В выходной файл вывести слово YES, если точка принадлежит многоугольнику, и слово NO в противном случае.

Примеры входных данных	Примеры выходных данных
3 0 0 3 0 0 3 1 1	YES
4 0 0 4 0 1 1 0 4 1.5 1.5	NO

Решение задачи 10.

Язык Си.

```
#include "stdafx.h"
FILE *ifs, *ofs;
struct point { double x, y; };
double min(double a, double b) { return ((a < b) ? a : b); }
double max(double a, double b) { return ((a > b) ? a : b); }
int direction(struct point pi, struct point pj, struct point pk) {
    return (((pk.x-pi.x)*(pj.y-pi.y)-(pj.x-pi.x)*(pk.y-pi.y)) >= 0 ? 1 : -1);
}
bool on_segment(struct point pi, struct point pj, struct point pk) {
    if ((pk.x >= min(pi.x, pj.x) && pk.x <= max(pi.x, pj.x)) &&
        (pk.y >= min(pi.y, pj.y) && pk.y <= max(pi.y, pj.y))) return true;
    else return false;
}
bool segment_intersect(struct point p1, struct point p2, struct point p3, struct point p4) {
    int d1, d2, d3, d4;
    d1 = direction( p3, p4, p1 );
    d2 = direction( p3, p4, p2 );
    d3 = direction( p1, p2, p3 );
    d4 = direction( p1, p2, p4 );
    if ((d1 > 0 && d2 < 0 || d1 < 0 && d2 > 0) && (d3 > 0 && d4 < 0 || d3 < 0 && d4 > 0)) return true;
    else if (d1 = 0 && on_segment( p3, p4, p1 )) return true;
    else if (d2 = 0 && on_segment( p3, p4, p2 )) return true;
    else if (d3 = 0 && on_segment( p1, p2, p3 )) return true;
    else if (d4 = 0 && on_segment( p1, p2, p4 )) return true;
    else return false;
}
int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[]) {
    int n, k = 0;
    struct point p, q, a[1000];
    if( (ifs = fopen( "input.txt", "r" )) == NULL) return 1;
    if( (ofs = fopen( "output.txt", "w" )) == NULL) return 2;
    fscanf( ifs, "%d", &n );
    for (int i = 0; i < n; i++) fscanf( ifs, "%lf %lf", &a[i].x, &a[i].y );
    fscanf( ifs, "%lf %lf", &p.x, &p.y );
    q.x = 1e6 + 1; q.y = p.y;
    for (int i = 0; i < n - 1; i++) if (segment_intersect( p, q, a[i], a[i + 1] )) k++;
    if (segment_intersect( p, q, a[n - 1], a[0] )) k++;
    fprintf( ofs, (k % 2 != 0) ? "YES" : "NO" );
    fclose( ifs );
    fclose( ofs );
    return 0;
}
```

Язык Паскаль.

```
program Project_5_10;
{$APPTYPE CONSOLE}
uses SysUtils, Math;
type Point = record x, y: Double; end;
var N, k, i: Integer;
    p, q: Point;
    a: array[0..1000] of Point;
    f, g: TextFile;
function Direction(pi, pj, pk: Point): TValueSign;
begin
    Result := Sign((pk.x-pi.x)*(pj.y-pi.y)-(pj.x-pi.x)*(pk.y-pi.y));
end;
function OnSegment(pi, pj, pk: Point): Boolean;
begin
    Result := ((pk.x >= Min(pi.x, pj.x)) and (pk.x <= Max(pi.x, pj.x))) and
              ((pk.y >= Min(pi.y, pj.y)) and (pk.y <= Max(pi.y, pj.y)));
end;
```

```

end;
function SegmentIntersect(p1, p2, p3, p4: Point): Boolean;
var d1, d2, d3, d4: TValueSign;
begin
  d1 := Direction(p3, p4, p1);
  d2 := Direction(p3, p4, p2);
  d3 := Direction(p1, p2, p3);
  d4 := Direction(p1, p2, p4);
  if (((d1 > 0) and (d2 < 0)) or ((d1 < 0) and (d2 > 0))) and
    (((d3 > 0) and (d4 < 0)) or ((d3 < 0) and (d4 > 0))) then Result := True
  else if (d1 = 0) and OnSegment(p3, p4, p1) then Result := True
  else if (d2 = 0) and OnSegment(p3, p4, p2) then Result := True
  else if (d3 = 0) and OnSegment(p1, p2, p3) then Result := True
  else if (d4 = 0) and OnSegment(p1, p2, p4) then Result := True
  else Result := False;
end;
begin
  AssignFile(f, 'input.txt');
  AssignFile(g, 'output.txt');
  try
    Reset(f);
    Rewrite(g);
    try
      Read(f, N);
      for i := 0 to N-1 do Read(f, a[i].x, a[i].y);
      Readln(f, p.x, p.y );
      q.x := 1001;
      q.y := p.y;
      k := 0;
      for i := 0 to N-2 do if (SegmentIntersect(p, q, a[i], a[i+1])) then Inc(k);
      if (SegmentIntersect(p, q, a[N-1], a[0] )) then Inc(k);
      if ((k mod 2) = 0 ) then Writeln(g, 'NO')
      else Writeln(g, 'YES');
    finally
      CloseFile(f);
      CloseFile(g);
    end;
  except
    on EInOutError do Writeln('InOutError!');
  end;
end.

```