

## Вариант 1 (условия и решения)

**Задача 1 (8 баллов).** Перевести шестнадцатеричное число  $A_{16} = 4AF,C48$  в десятичную систему счисления.

**Решение задачи 1.**

- 1)  $4AF = 4 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = 4 \cdot 256 + 10 \cdot 16 + 15 \cdot 1 = 1024 + 160 + 15 = 1199$
- 2)  $0,C48 = 12 \cdot 16^{-1} + 4 \cdot 16^{-2} + 8 \cdot 16^{-3} = 12 \cdot (1/16) + 4 \cdot (1/16/16) + 8 \cdot (1/16/16/16) = 3 \cdot (1/4) + 1 \cdot (1/4/16) + 1 \cdot (1/2/16/16) = (3/4) + (1/64) + (1/512) = 0,75 + 0,015625 + 0,001953125 = 0,767578125$

**Ответ:**  $A_{10} = 1199,767578125$ .

**Задача 2 (8 баллов).** Найти сумму шестнадцатеричных чисел  $A_{16} = 3A8$  и  $B_{16} = 102$ , используя 16-разрядный сумматор, старший разряд которого знаковый. Ответ дать в шестнадцатеричной форме. Числа со знаком, выражаемые с использованием 16 двоичных разрядов, должны находиться между  $-32768$  и  $32767$ . При переполнении разрядной сетки ответ сопроводить сообщением.

**Решение задачи 2.**

- 1)  $[A_2]_{пр} = 0,000\ 0011\ 1010\ 1000$        $[B_2]_{пр} = 0,000\ 0001\ 0000\ 0010$
- 2)  $[A_2]_{пр}^M = 00,000\ 0011\ 1010\ 1000$        $[B_2]_{пр}^M = 00,000\ 0001\ 0000\ 0010$
- 3)  $[A_2]_{пр}^M + [B_2]_{пр}^M = 00,000\ 0011\ 1010\ 1000 + 00,000\ 0001\ 0000\ 0010 = 00,000\ 0100\ 1010\ 1010$
- 4)  $[C_2]_{пр} = 0,000\ 0100\ 1010\ 1010$

**Ответ:**  $C_{16} = 4AA$ .

**Задача 3 (8 баллов).** Дано выражение, в котором используются операции над булевскими величинами, принимающими значения 0 (ложь) и 1 (истина). Выражение может содержать круглые скобки и следующие знаки операций: отрицание ( $\neg$ ), конъюнкция ( $\wedge$ ), дизъюнкция ( $\vee$ ), импликация ( $\rightarrow$ ). Операции имеют следующие уровни приоритета: уровень 1 ( $\neg$ ), уровень 2 ( $\wedge$ ), уровень 3 ( $\vee$ ), уровень 4 ( $\rightarrow$ ). Построить таблицу истинности для выражения  $(p \rightarrow q) \wedge (\neg r \rightarrow (\neg p \vee \neg q))$ .

**Решение задачи 3.**

p	q	r	$p \rightarrow q$	$\neg r$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$(\neg r \rightarrow (\neg p \vee \neg q))$	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg r \rightarrow (\neg p \vee \neg q))$
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1	0
1	0	1	0	0	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	1	1

**Задача 4 (8 баллов).** Дано выражение, в котором используются поразрядные операции над 8-ми разрядными целыми числами без знака. В выражении используются круглые скобки и следующие знаки операций: поразрядное НЕ ( $\sim$ ), поразрядное И ( $\&$ ), поразрядное ИЛИ ( $\mid$ ), поразрядный сдвиг влево ( $\ll$ ), поразрядный сдвиг вправо ( $\gg$ ). Операции имеют следующие уровни приоритета: уровень 1 ( $\sim$ ), уровень 2 ( $\ll$  и  $\gg$ ), уровень 3 ( $\&$ ), уровень 4 ( $\mid$ ). Вычислить значение следующего выражения:  $a \gg 2 \& b \ll 1 \mid \sim(a \ll 2 \& b \gg 1)$  для  $a = 204$  и  $b = 170$ . Ответ дать в двоичной и десятичной формах.

**Решение задачи 4.**

- 1)  $a = cc_{16} = 11001100_2$
- 2)  $b = aa_{16} = 10101010_2$
- 3)  $a \gg 2 = 33_{16} = 00110011_2$
- 4)  $b \ll 1 = 54_{16} = 01010100_2$
- 5)  $a \gg 2 \& b \ll 1 = 10_{16} = 00010000_2$
- 6)  $a \ll 2 = 30_{16} = 00110000_2$
- 7)  $b \gg 1 = 55_{16} = 01010101_2$
- 8)  $a \ll 2 \& b \gg 1 = 10_{16} = 00010000_2$
- 9)  $\sim(a \ll 2 \& b \gg 1) = ef_{16} = 11101111_2$
- 10)  $a \gg 2 \& b \ll 1 \mid \sim(a \ll 2 \& b \gg 1) = ff_{16} = 11111111_2$

**Ответ:**  $11111111_2 = 255_{10}$ .

**Задача 5 (8 баллов).** Пусть  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  ( $n \geq 1$ ) – две последовательности, члены которых связаны соотношением  $a_{n+1} = -2a_n + 4b_n$ ,  $b_{n+1} = -5a_n + 7b_n$ . Вычислить  $a_5$  и  $b_5$ , зная, что  $a_1 = -10$ ,  $b_1 = -13$ .

**Решение задачи 5.**

**Первый способ.**  $a_1 = -10$ ,  $b_1 = -13$ ;  $a_2 = -32$ ,  $b_2 = -41$ ;  $a_3 = -100$ ,  $b_3 = -127$ ;  $a_4 = -308$ ,  $b_4 = -389$ ;  $a_5 = -940$ ,  $b_5 = -1183$ .

**Второй способ.** Можно найти выражения для  $a_n$  и  $b_n$  через  $n$ , считая, что  $a_1$  и  $b_1$  заданы. Выражения будут такими:  $a_n = 2^n - 4 \cdot 3^n$  и  $b_n = 2^n - 5 \cdot 3^n$ . Для  $n = 5$  будем иметь:  $a_5 = 2^5 - 4 \cdot 3^5 = 32 - 4 \cdot 243 = 32 - 972 = -940$ ,  $b_5 = 2^5 - 5 \cdot 3^5 = 32 - 5 \cdot 243 = 32 - 1215 = -1183$ .

**Ответ:**  $a_5 = -940$ ,  $b_5 = -1183$ .

**Задача 6 (8 баллов).** Дана префиксная запись арифметического выражения  $+ a * b + c * d + e * f + g * h i$ . Найти инфиксную запись этого выражения, не содержащую лишних круглых скобок.

**Решение задачи 6.**

Сначала надо построить бинарное дерево, изображающее арифметическое выражение. Корень дерева и все внутренние вершины дерева являются бинарными операторами, а листья дерева – операндами. При построении дерева префиксная запись выражения читается слева направо один раз, а дерево строится сверху вниз (от корня листьям). Затем надо обойти дерево в центрированном порядке (in-ordered): левое поддерево – вершина – правое поддерево.

**Ответ:**  $a + b * (c + d * (e + f * (g + h * i)))$ .

**Задача 7 (8 баллов).** Сколько последовательностей  $\{a_1, a_2, \dots, a_8\}$ , состоящих из  $+1$  и  $-1$ , обладают тем свойством, что  $a_1 + a_2 + \dots + a_8 = 0$ , а все их частичные суммы  $a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_8$  неотрицательны?

**Решение задач 7.**

**Первый способ.** Задачу можно решить методом полного перебора, который дает следующие 14 вариантов:

$+1+1+1+1-1-1-1-1$ ,  $+1+1+1-1+1-1-1-1$ ,  $+1+1+1-1-1+1-1-1$ ,  $+1+1+1-1-1-1+1-1$ ,  $+1+1-1+1+1-1-1-1$ ,  $+1+1-1+1-1+1-1-1$ ,  $+1+1-1-1+1+1-1-1$ ,  $+1+1-1-1+1-1+1-1$ ,  $+1-1+1+1-1+1-1-1$ ,  $+1-1+1+1-1-1+1-1$ ,  $+1-1+1-1+1+1-1-1$ ,  $+1-1+1-1+1-1+1-1$ .

**Второй способ.** Можно показать, что количество последовательностей, удовлетворяющих условию задачи, определяется четвертым числом Каталана. Само число Каталана выражается формулой  $C(n) = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ .  $C(4) = \frac{(2 \cdot 4)!}{4!(4+1)!} = \frac{(8)!}{4!(5)!} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 / (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 / (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = 7 \cdot 2 = 14$ .

**Ответ:** 14.

**Задача 8 (12 баллов).** Сколько существует положительных целых чисел, содержащих не более пяти цифр, в которых

- a) Первой цифрой является 3?
- b) Последней цифрой является 5?
- c) Первой цифрой является 3 или последней цифрой является 5?
- d) Ни первая цифра не равна 3, ни последняя цифра не равна 5?

**Решение задачи 8.**

Решение задачи может выполняться с использованием комбинаторного принципа умножения и сложения. Составим следующую таблицу

Число цифр в числе	Первой цифрой является 3	Последней цифрой является 5	Первой цифрой является 3 и последней цифрой является 5
1	1	1	0
2	10	9	1
3	100	$10 \cdot 9 = 90$	10
4	1000	$100 \cdot 9 = 900$	100
5	10000	$1000 \cdot 9 = 9000$	1000
<b>Итого</b>	<b>11111</b>	<b>10000</b>	<b>1111</b>

Количество положительных целых чисел, содержащих не более пяти цифр, в которых первой цифрой является 3 или последней цифрой является 5, равно

$$11111 + 10000 - 1111 = 20000.$$

Общее количество положительных целых чисел, содержащих не более пяти цифр, равно

$$9 + 90 + 900 + 9000 + 90000 = 99999.$$

Количество положительных целых чисел, содержащих не более пяти цифр, в которых ни первая цифра не равна 3, ни последняя цифра не равна 5, равно

$$99999 - 20000 = 79999.$$

**Ответ: а) 11111; б) 10000; в) 20000; г) 79999.**

**Задача 9 (16 баллов).** Рассматривается последовательность, состоящая из  $N$  положительных целых чисел. Требуется вычеркнуть из последовательности наименьшее количество чисел так, чтобы оставшиеся числа шли в порядке строгого возрастания.

**Входные данные.** Входной файл содержит целое число  $N$  ( $1 \leq N \leq 1000$ ) – количество чисел и последовательность из  $N$  целых положительных целых чисел, каждое из которых не больше 1000.

**Выходные данные.** В выходной файл вывести одно целое число – количество не вычеркнутых чисел.

Примеры входных данных	Примеры выходных данных
6 2 5 3 4 6 1	4
10 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1	1

**Решение задачи 9.**

**Язык Си.**

```
#include "stdafx.h"
int const MAXN = 1000;
FILE *ifs, *ofs;
int max( int a, int b ) { return ((a > b) ? a : b); }
int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[]) {
    int n, a[MAXN], d[MAXN];
    if( (ifs = fopen( "input.txt", "r" )) == NULL ) return 1;
    if( (ofs = fopen( "output.txt", "w" )) == NULL ) return 2;
    fscanf( ifs, "%d", &n);
    for (int i = 0; i < n; i++) fscanf( ifs, "%d", &a[i] );
    for (int i=0; i<n; ++i) {
        d[i] = 1;
        for (int j=0; j<i; ++j)
            if (a[j] < a[i]) d[i] = max( d[i], 1 + d[j] );
    }
    int ans = d[0];
    for (int i = 0; i < n; ++i) ans = max( ans, d[i] );
    fprintf( ofs, "%d\n", ans );
    fclose( ifs );
    fclose( ofs );
    return 0;
}
```

**Язык Паскаль.**

```
program Project_1_9;
{$APPTYPE CONSOLE}
uses SysUtils, Math;
const MAXN = 1000;
var f, g: textfile;
    n, i, j, ans: integer;
    a, d: array[0..MAXN-1] of integer;
begin
    AssignFile(f, 'input.txt');
    AssignFile(g, 'output.txt');
    try
        Reset(f);
```

```

Rewrite(g);
try
  Read(f, n);
  for i := 0 to n-1 do Read(f, a[i]);
  for i := 0 to n-1 do
    begin
      d[i] := 1;
      for j := 0 to i-1 do
        if (a[j] < a[i]) then d[i] := max(d[i], 1 + d[j]);
      end;
      ans := d[0];
      for i := 0 to n do ans := max(ans, d[i]);
      Writeln(g, ans);
    end;
  finally
    CloseFile(f);
    CloseFile(g);
  end;
except
  on EInOutError do Writeln('EInOutError!');
end;
end.

```

**Задача 10 (16 баллов).** Ортогональную целочисленную решетку, состоящую из точек с целыми координатами в декартовой системе координат, будем обозначать через  $Z^2$ . На решетке  $Z^2$  дан простой многоугольник (т. е. без самокасаний и самопересечений, но не обязательно выпуклый) с вершинами в узлах решетки  $Z^2$ . Найти количество точек решетки  $Z^2$ , лежащих на границе многоугольника.

**Входные данные.** Входной файл содержит целое число  $N$  ( $3 \leq N \leq 1000$ ) – количество вершин многоугольника и последовательность из  $N$  пар целочисленных координат вершин многоугольника. Все координаты по модулю не больше  $10^6$ . Вершины многоугольника заданы в порядке их обхода против часовой стрелки.

**Выходные данные.** В выходной файл вывести одно целое число – количество точек решетки  $Z^2$ , лежащих на границе многоугольника.

Примеры входных данных	Примеры выходных данных
4 0 0 4 0 4 4 0 4	16
10 0 0 4 0 3 1 6 0 6 3 7 5 3 2 2 2 0 5 1 1	15

**Решение задачи 10.**

**Язык Си.**

```

#include "stdafx.h"
#include <stdlib.h>
FILE *ifs, *ofs;
struct node { int x, y; };
int gcd(int a, int b) { return (!b) ? a : gcd(b, a % b); }
int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[]) {
  int N, a, b, local_npoint;
  struct node prev, next, start;
  int global_npoint = 0;
  if( (ifs = fopen( "input.txt", "r" )) == NULL ) return 1;
  if( (ofs = fopen( "output.txt", "w" )) == NULL ) return 2;
  fscanf( ifs, "%d", &N );
  fscanf( ifs, "%d %d", &next.x, &next.y );
  start.x = next.x;
  start.y = next.y;
  for (int i = 2; i <= N; i++) {
    prev.x = next.x;
    prev.y = next.y;
    fscanf( ifs, "%d %d", &next.x, &next.y );
    a = abs( next.x - prev.x );
    b = abs( next.y - prev.y );
    if (a == 0 ) local_npoint = b + 1;
    else if (b == 0) local_npoint = a + 1;
    else local_npoint = gcd( a, b ) + 1;
    global_npoint += local_npoint;
  }
  prev.x = next.x;
  prev.y = next.y;
  next.x = start.x;

```

```

next.y = start.y;
if (a == 0 ) local_npoint = b + 1;
else if (b == 0) local_npoint = a + 1;
else local_npoint = gcd( a, b ) + 1;
global_npoint += local_npoint;
fprintf( ofs, "%d\n", global_npoint - N );
fclose(ifs);
fclose(ofs);
return 0;
}

```

### Язык Паскаль.

```

program Project_1_10;
{$APPTYPE CONSOLE}
uses SysUtils;
type node = record x, y: integer; end;
var f, g: textfile;
    N, a, b, local_npoint, global_npoint, i: integer;
    prev, next, start: node;
// Наибольший общий делитель (рекурсивная функция)
function gcd(a, b: integer): integer;
begin
    if (b = 0) then result := a
    else result := gcd(b, a mod b);
end;
begin
    assignfile(f, 'input.txt');
    assignfile(g, 'output.txt');
    try
        reset(f);
        rewrite(g);
        try
            global_npoint := 0;
            read(f, N);
            read(f, next.x, next.y);
            start.x := next.x;
            start.y := next.y;
            for i := 2 to N do
                begin
                    prev.x := next.x;
                    prev.y := next.y;
                    read(f, next.x, next.y);
                    a := abs(next.x - prev.x);
                    b := abs(next.y - prev.y);
                    if (a = 0) then local_npoint := b + 1
                    else if (b = 0) then local_npoint := a + 1
                    else local_npoint := gcd(a, b) + 1;
                    inc(global_npoint, local_npoint);
                end;
            prev.x := next.x;
            prev.y := next.y;
            next.x := start.x;
            next.y := start.y;
            if (a = 0 ) then local_npoint := b + 1
            else if (b = 0) then local_npoint := a + 1
            else local_npoint := gcd(a, b) + 1;
            inc(global_npoint, local_npoint);
            writeln(g, global_npoint - N);
        finally
            closefile(f);
            closefile(g);
        end;
    except
        on EInOutError do Writeln('EInOutError!');
    end;
end.

```