

Первый (отборочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету
«Математика», осень 2014 г.

Вариант № 6

1. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Когда он прошёл 8 км, следом за ним из пункта A отправился второй пешеход. Когда второй пешеход прошёл 15 км, первый был в середине пути, а в пункт B пешеходы пришли одновременно. Чему равно расстояние между пунктами A и B ? (8 баллов)

2. Решите неравенство $\sqrt{\frac{x-4}{x+3}} - \sqrt{\frac{x+3}{x-4}} < \frac{7}{12}$. (8 баллов)

3. Какое наименьшее значение может принять сумма S_n первых n членов арифметической прогрессии, у которой сумма $S_3 = -141$ и сумма $S_{35} = 35$? (8 баллов)

4. Решите уравнение $\sqrt{2 + \cos 2x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x} = \sin x - \sqrt{3} \cos x$. Найдите все его корни, удовлетворяющие условию $|x - 3| < 1$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\frac{|x-2| - |x^2 - 4x + 2|}{2\sqrt{2x^2 + 7x + 3} - 3x - 4} \geq 0$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$$f(x) = \sqrt{13 - g^2(x)}, \text{ где } g(x) = (13/4) - \cos^2 x + \sin x. \quad (10 \text{ баллов})$$

7. Вписанная в треугольник ABC окружность касается стороны BC в точке D , причем $BD = 5$. Найдите радиус этой окружности и площадь треугольника ABC , если угол A равен 60° , а радиус описанной около треугольника ABC окружности равен $7/\sqrt{3}$. (12 баллов)

8. На оси Oy найдите точку, через которую проходят две перпендикулярные друг другу касательные к графику функции $y = 1 - 2x - x^2$, и напишите уравнения этих касательных. (12 баллов)

9. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений $x = 4\sqrt{y+a}$, $y^2 - x^2 + 3y - 5x - 4 = 0$ имеет единственное решение. Укажите это решение при каждом a . (12 баллов)

10. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с рёбрами $AB = 4$, $AD = 2$, $AA_1 = 3\sqrt{2}$ через диагональ BD_1 проведена плоскость, пересекающая ребро AA_1 так, что сечение параллелепипеда этой плоскостью имеет наименьший периметр. Найдите площадь этого сечения. (12 баллов)

Решение варианта №6

1. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Когда он прошёл 8 км, следом за ним из пункта A отправился второй пешеход. Когда второй пешеход прошел 15 км, первый был в середине пути, а в пункт B пешеходы пришли одновременно. Чему равно расстояние между пунктами A и B ?

Решение:

Пусть s – расстояние между пунктами A и B , v_1, v_2 – скорости пешеходов. Тогда

$$\frac{s-8}{v_1} = \frac{s}{v_2} \text{ и } \frac{s}{2v_1} = \frac{s-15}{v_2}. \text{ Отсюда } \frac{s}{2(s-8)} = \frac{s-15}{s}; s^2 = 2s^2 - 46s + 240; s^2 - 46s + 240 = 0;$$

$s_{1,2} = 23 \pm 17$. $s_1 = 40$, $s_2 = 6$ не удовлетворяет условиям задачи $s > 8$, $s > 15$. Ответ: 40 км.

2. Решите неравенство $\sqrt{\frac{x-4}{x+3}} - \sqrt{\frac{x+3}{x-4}} < \frac{7}{12}$.

Решение:

$$\sqrt{\frac{x-4}{x+3}} - \sqrt{\frac{x+3}{x-4}} < \frac{7}{12}. \text{ Обозначим } \sqrt{\frac{x+3}{x-4}} = y > 0; \frac{1}{y} - y < \frac{7}{12}; 12y^2 + 7y - 12 > 0;$$

$$y_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 576}}{24} = \frac{-7 \pm 25}{24}, y_1 = \frac{3}{4}, y_2 = -\frac{4}{3}. \text{ След.}$$

$$y > \frac{3}{4}, \frac{x+3}{x-4} > \frac{9}{16} \Leftrightarrow \frac{x+12}{x-4} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -12, \\ x > 4. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-\infty; -12) \cup (4; +\infty)$.

3. Какое наименьшее значение может принять сумма S_n первых n членов арифметической прогрессии, у которой сумма $S_3 = -141$ и сумма $S_{35} = 35$?

Решение:

Если a – первый член и d – разность арифметической прогрессии,

$$\begin{cases} \frac{a+a+2d}{2} \cdot 3 = -141, \\ \frac{a+a+34d}{2} \cdot 35 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+d = -47, \\ a+17d = 1 \end{cases} \Rightarrow 16d = 48; d = 3, a = -50.$$

Сумма S_n первых n членов арифметической прогрессии принимает наименьшее значение, если $a_n < 0$, а $a_{n+1} \geq 0$. Так как $a_n = a + d(n-1)$, то из неравенства $-50 + 3(n-1) < 0$ найдем $n = [53/3] = [17 \frac{2}{3}] = 17$. Тогда $\min S_n = S_{17} = 0,5 \cdot (-50 - 50 + 3 \cdot 16) \cdot 17 = -442$. Ответ: -442.

4. Решите уравнение $\sqrt{2 + \cos 2x} - \sqrt{3} \operatorname{tg} x = \sin x - \sqrt{3} \cos x$. Найдите все его корни, удовлетворяющие условию $|x-3| < 1$.

Решение:

Обе части уравнения $\sqrt{2 + \cos 2x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x} = \sin x - \sqrt{3} \cos x$ можно возвести в квадрат при условии $\sin x - \sqrt{3} \cos x \geq 0$. Так как $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(x - \pi/3)$, то условие можно записать в виде $\pi/3 + 2\pi n \leq x \leq 4\pi/3 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. При найденных ограничениях уравнение равносильно следующему: $2 + \cos 2x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x = \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 3 \cos^2 x$, $\operatorname{tg} x - 2 \sin x \cos x = 0$, $\frac{\sin x}{\cos x} - 2 \sin x \cos x = 0$, $\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 2 \cos x \right) = 0$. Таким образом, приходим к совокупности уравнений: 1) $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, 2) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$, $\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Учитывая ограничения, получаем решения исходного уравнения: $x = \pi + 2\pi n$, $x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. При условии $|x - 3| < 1$ имеем $x \in (2; 4)$, следовательно, $x_1 = \frac{3\pi}{4}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{5\pi}{4}$. Ответ: решения уравнения: $\pi + 2\pi n$, $\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; корни, удовлетворяющие условию: $\frac{3\pi}{4}$, π , $\frac{5\pi}{4}$.

5. Решите неравенство $\frac{|x-2| - |x^2 - 4x + 2|}{2\sqrt{2x^2 + 7x + 3} - 3x - 4} \geq 0$.

Решение:

$$\frac{|x-2| - |x^2 - 4x + 2|}{2\sqrt{2x^2 + 7x + 3} - 3x - 4} \geq 0. \quad \text{ОДЗ: } 2x^2 + 7x + 3 \geq 0, \Rightarrow x \in (-\infty; -3] \cup [-0,5; +\infty).$$

Исходное неравенство эквивалентно следующему

$$\frac{(x-2)^2 - (x^2 - 4x + 2)^2}{2\sqrt{2x^2 + 7x + 3} - 3x - 4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 3x)}{3x + 4 - 2\sqrt{2x^2 + 7x + 3}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-4)x(x-3)}{3x + 4 - 2\sqrt{2x^2 + 7x + 3}} \geq 0.$$

Если $x \leq -3$, то $3x + 4 < 0$, и $\left(3x + 4 - 2\sqrt{2x^2 + 7x + 3} \right) < 0$. Таким образом, приходим к

неравенству $(x-1)(x-4)x(x-3) \leq 0$, и, с учетом условия $x \leq -3$, решений нет.

Если $x \geq -0,5$, то приходим к неравенству

$$\frac{(x-1)(x-4)x(x-3)}{(\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+3})^2} \geq 0, \text{ и } x \in [-0,5; 0] \cup [1; 2) \cup (2; 3] \cup [4; +\infty).$$

Ответ: $x \in [-0,5; 0] \cup [1; 2) \cup (2; 3] \cup [4; +\infty)$.

6. Найдите множество значений функции

$$f(x) = \sqrt{13 - g^2(x)}, \text{ где } g(x) = (13/4) - \cos^2 x + \sin x.$$

Решение:

$$f(x) = \sqrt{13 - g^2(x)}, \text{ где } g(x) = 13/4 - \cos^2 x + \sin x.$$

Найдем множество значений функции $z = g(x) = 13/4 - \cos^2 x + \sin x$. Функция $g(x)$ определена на всей числовой оси. Сделаем замену переменного. Пусть $t = \sin x$. Тогда $z = 9/4 + t^2 + t = 2 + (t + 1/2)^2$ при $t \in [-1; 1]$, и $E_g = [2; 17/4]$. Функция

$y = f(x) = \sqrt{13 - g^2(x)}$ имеет то же множество значений, что и функция $y = \sqrt{13 - z^2}$ при $z \in [2; \sqrt{17}]$, поскольку функция $y = \sqrt{13 - z^2}$ определена при $z \in [-\sqrt{13}; \sqrt{13}]$, а $z = g(x)$ принимает все значения из отрезка $[2; \frac{17}{4}]$. Минимальное значение функции $y = \sqrt{13 - z^2}$ на отрезке $[2; \sqrt{17}]$ равно 0, максимальное – равно 3. Следовательно, $E_f = [0; 3]$.

Ответ: $E_f = [0; 3]$.

7. Вписанная в треугольник ABC окружность касается стороны BC в точке D , причем $BD = 5$. Найдите радиус этой окружности и площадь треугольника ABC , если угол A равен 60° , а радиус описанной около треугольника ABC окружности равен $7/\sqrt{3}$.

Решение:

Так как $2R_{on} = BC/\sin \angle A$, то

$$BC = 2R_{on} \sin \angle A = 7. \text{ Тогда } BD = a = 5,$$

$DC = b = 2$. Если F и E - точки касания окружности сторон BA и AC соответственно, то $BF = a = 5$, $EC = b = 2$, и $FA = AE = x$. По

теореме косинусов имеем:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \angle A. \text{ Так как } \angle A = 60^\circ, \text{ то}$$

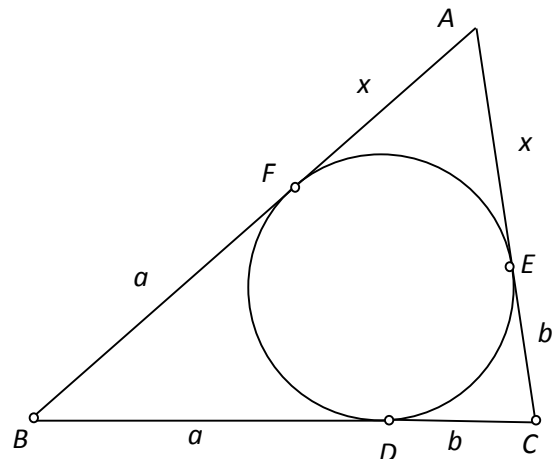
$$49 = (x + 5)^2 + (x + 2)^2 - (x + 5)(x + 2), \text{ и}$$

$$x^2 + 7x - 30 = 0, \text{ } x = 3. \text{ Тогда площадь}$$

$$S_{ABC} = 0,5(5 + x)(2 + x) \sin \angle A = 10\sqrt{3}, \text{ периметр}$$

$$P_{ABC} = 2(a + b + x) = 2 \cdot 10. \text{ Радиус вписанной окружности } r_{en} = 2S_{ABC}/P_{ABC} = \sqrt{3}.$$

Ответ: $S_{ABC} = 10\sqrt{3}$, $r_{en} = \sqrt{3}$.



8. На оси Oy найдите точку, через которую проходят две перпендикулярные друг другу касательные к графику функции $y = 1 - 2x - x^2$, и напишите уравнения этих касательных.

Решение:

$$y = 1 - 2x - x^2, \text{ } M(0; y_0). \text{ Уравнение касательной: } y = y_0 + kx.$$

Уравнение $1 - 2x - x^2 = y_0 + kx$, или $x^2 + (k + 2)x + y_0 - 1 = 0$, имеет единственное решение, если $D = k^2 + 4k + 8 - 4y_0 = 0$. Найденные из этого уравнения два значения k должны удовлетворять условию перпендикулярности $k_1 \cdot k_2 = -1$. Так как

$$k_1 \cdot k_2 = 8 - 4y_0 = -1, \text{ } y_0 = 9/4. \text{ Из уравнения } k^2 + 4k - 1 = 0 \text{ найдём } k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{5}.$$

Ответ: $M(0; 9/4)$, уравнения касательных: $y = 9/4 + (-2 \pm \sqrt{5})x$.

9. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$x = 4\sqrt{y} + a$, $y^2 - x^2 + 3y - 5x - 4 = 0$ имеет единственное решение. Укажите это решение при каждом a .

Решение:

$$\begin{cases} x = 4\sqrt{y} + a, \\ y^2 - x^2 + 3y - 5x - 4 = 0. \end{cases}$$

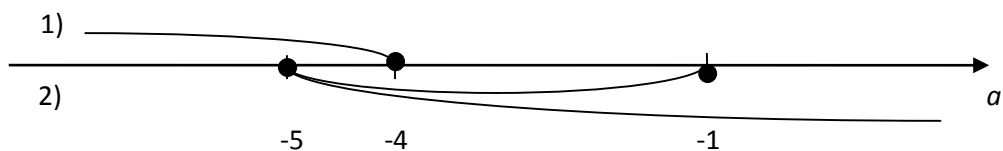
Преобразуем второе уравнение системы.

$$\left(y^2 + 3y + \frac{9}{4}\right) - \left(x^2 + 5x + \frac{25}{4}\right) = 0, \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = 0, (y + x + 4)(y - x - 1) = 0.$$

1) $y + 4\sqrt{y} + a + 4 = 0$, $\sqrt{y} = -2 \mp \sqrt{4 - a - 4} = -2 \mp \sqrt{-a}$. Один корень, $\sqrt{y} = -2 - \sqrt{-a} < 0$, — посторонний, другой, $\sqrt{y} = -2 + \sqrt{-a} \geq 0$, если $\sqrt{-a} \geq 2$, то-есть, при $a \leq -4$.

2) $y - 4\sqrt{y} - a - 1 = 0$, $\sqrt{y} = 2 \pm \sqrt{4 + a + 1} = 2 \pm \sqrt{a + 5}$.

$(\sqrt{y})_1 = 2 + \sqrt{a + 5} \geq 0$, если $a \geq -5$. $(\sqrt{y})_2 = 2 - \sqrt{a + 5} \geq 0$, если $\sqrt{a + 5} \leq 2$, $0 \leq a + 5 \leq 4$, $-5 \leq a \leq -1$. При $a = -5$ $(\sqrt{y})_1 = (\sqrt{y})_2 = 2$.



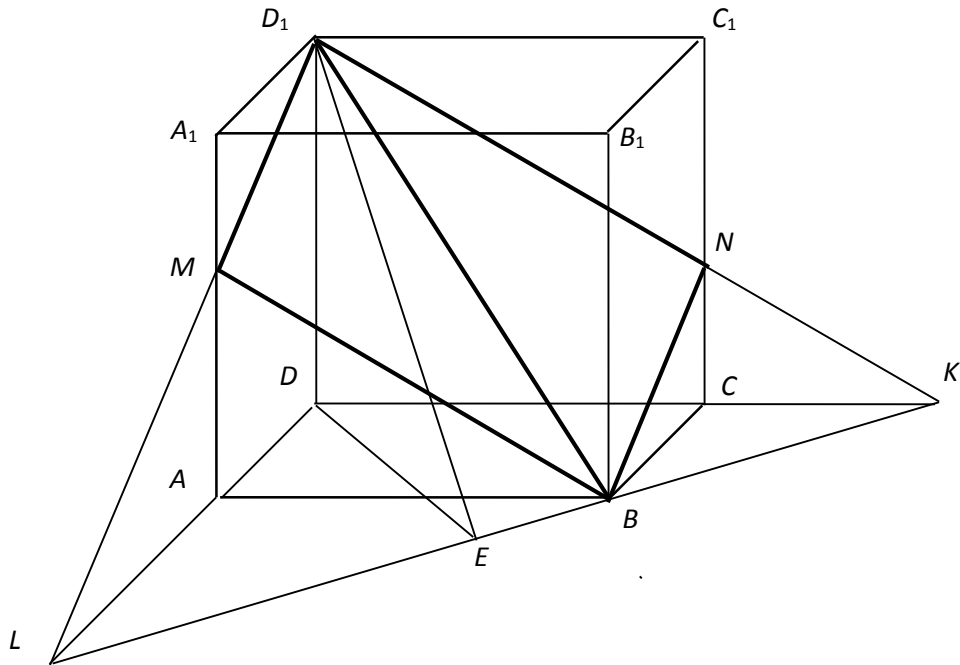
Сопоставляя решения 1) и 2), видим, что единственное решение система уравнений имеет при $a \in (-\infty; -5) \cup (-1; +\infty)$.

Ответ: $a \in (-\infty; -5)$, $x = 4(-2 + \sqrt{-a}) + a$, $y = (-2 + \sqrt{-a})^2$;

$a \in (-1; +\infty)$, $x = 4(2 + \sqrt{a + 5}) + a$, $y = (2 + \sqrt{a + 5})^2$.

10. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с рёбрами $AB = 4$, $AD = 2$, $AA_1 = 3\sqrt{2}$ через диагональ BD_1 проведена плоскость, пересекающая ребро AA_1 так, что сечение параллелепипеда этой плоскостью имеет наименьший периметр. Найдите площадь этого сечения.

Решение:



Отложим $AL = AB$ на продолжении ребра AD ; аналогично, отложим $CK = BC$ на продолжении ребра CD . Очевидно, $B \in KL$. При любом положении точки M на ребре AA_1 $BM = LM$, поэтому наименьшее значение суммы $MD_1 + MB$ будет при $M = AA_1 \cap LD_1$. Аналогично, $N = CC_1 \cap KD_1$. Параллелограмм BMD_1N – искомое сечение.

Введём обозначения $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$.

Проведём $DE \perp KL$, $E \in KL$, и соединим D_1 и E .

$$DE = \frac{DL}{\sqrt{2}} = \frac{AD + AL}{\sqrt{2}} = \frac{a+b}{\sqrt{2}}. \quad ED_1 = \sqrt{DD_1^2 + DE^2} = \sqrt{c^2 + \frac{(a+b)^2}{2}} = \frac{\sqrt{2c^2 + (a+b)^2}}{\sqrt{2}}.$$

$$\cos \angle DED_1 = \frac{DE}{D_1E} = \frac{a+b}{\sqrt{2c^2 + (a+b)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\left(\frac{c}{a+b}\right)^2}}.$$

$$S_{BMD_1N} = \frac{S_{BADC}}{\cos \angle DED_1} = ab \sqrt{1 + 2\left(\frac{c}{a+b}\right)^2}.$$

При $a = 4$, $b = 2$, $c = 3\sqrt{2}$ $S_{BMD_1N} = 8\sqrt{2}$.

Ответ: $8\sqrt{2}$.