**Первый (отборочный) этап академического соревнования**

**Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика», осень 2014 г.**

**Вариант № 1**

1. Из пункта $A$ в пункт $B$ одновременно выехали два велосипедиста. Когда первый велосипедист проехал половину пути, второму осталось проехать 24 км, а когда второй проехал половину пути, первому осталось проехать 15 км. Найдите расстояние между пунктами $A$ и $B$. (8 баллов)

2. Решите неравенство $\sqrt{\dfrac{x-24}{x}}-\sqrt{\dfrac{x}{x-24}}<\dfrac{24}{5}$. (8 баллов)

3. Какое наибольшее значение может принять сумма $S_n$ первых $n$ членов арифметической прогрессии, у которой сумма $S_3=327$ и сумма $S_{57}=57$ ? (8 баллов)

4. Решите уравнение $\sqrt{1+\operatorname{tg} x}=\sin x+\cos x$. Найдите все его корни, удовлетворяющие условию $|2x-5|<2$. (8 баллов)

5. Решите неравенство

$$\left(3x+4-2\sqrt{2x^2+7x+3}\right)\left(\left|x^2-4x+2\right|-|x-2|\right)\le 0.$$ (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$f(x)=\sqrt{g^2(x)-245}$, где $g(x)=15-2\cos 2x-4\sin x$. (10 баллов)

7. Вписанная в треугольник окружность точкой касания делит одну из его сторон на отрезки равные 3 и 4. Найдите площадь треугольника, если радиус описанной около него окружности равен $7/\sqrt{3}$. (12 баллов)

8. На прямой $3x+4y=2$ найдите точку, через которую проходят две перпендикулярные друг другу касательные к графику функции $y=x^2$, и напишите уравнения этих касательных. (12 баллов)

9. Найдите все значения параметра $a$, при которых система уравнений $\begin{cases} 4\sqrt{y}=x-a, \\ y^2-x^2+2y-4x-3=0. \end{cases}$ имеет единственное решение. Укажите это решение при каждом $a$. (12 баллов)

10. Прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=1$ и $AD=10$ служит основанием пирамиды $SABCD$, а ребро $SA=4$ перпендикулярно основанию. Найдите на ребре $AD$ такую точку $M$, чтобы треугольник $SMC$ имел наименьший периметр. Найдите площадь этого треугольника. (12 баллов)

## Решение варианта №1

**1.** Из пункта $A$ в пункт $B$ одновременно выехали два велосипедиста. Когда первый велосипедист проехал половину пути, второму осталось проехать 24 км, а когда второй проехал половину пути, первому осталось проехать 15 км. Найдите расстояние между пунктами $A$ и $B$.

**Решение:**

Пусть $s$ – расстояние между пунктами $A$ и $B$, $v_1, v_2$ – скорости велосипедистов. Тогда $\frac{s}{2v_1} = \frac{s-24}{v_2}$ и $\frac{s-15}{v_1} = \frac{s}{2v_2}$. Отсюда $\frac{s}{2(s-24)} = \frac{(s-15)\cdot 2}{s}$; $s^2 = 4s^2 - 4\cdot 39s + 60\cdot 24$; $s^2 - 52s + 480 = 0$; $s_{1,2} = 26 \pm 14$. $s_1 = 40$, $s_2 = 12$ не удовлетворяет условиям задачи $s > 15,\ s > 24$.

Ответ: 40 км.

**2.** Решите неравенство $\sqrt{\frac{x-24}{x}} - \sqrt{\frac{x}{x-24}} < \frac{24}{5}$.

**Решение:**

$\sqrt{\frac{x-24}{x}} - \sqrt{\frac{x}{x-24}} < \frac{24}{5}$. Обозначим $\sqrt{\frac{x}{x-24}} = y > 0$; $\frac{1}{y} - y < \frac{24}{5}$; $5y^2 + 24y - 5 > 0$;

$y_{1,2} = \frac{-12 \pm 13}{5}$, $y_1 = \frac{1}{5}, y_2 = -5$. След. $y > \frac{1}{5}$, $\frac{x}{x-24} > \frac{1}{25} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-24} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x > 24. \end{array}\right.$

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (24; +\infty)$.

**3.** Какое наибольшее значение может принять сумма $S_n$ первых $n$ членов арифметической прогрессии, у которой сумма $S_3 = 327$ и сумма $S_{57} = 57$?

**Решение:**

Если $a$ – первый член и $d$ – разность арифметической прогрессии,

$$\begin{cases} \frac{a+a+2d}{2}\cdot 3 = 327, \\ \frac{a+a+56d}{2}\cdot 57 = 57 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+d = 109, \\ a+28d = 1 \end{cases} \Rightarrow 27d = -108;\ d = -4,\ a = 113.$$

Сумма первых $n$ членов арифметической прогрессии $S_n$ принимает наибольшее значение, если $a_n > 0$, а $a_{n+1} \le 0$. Так как $a_n = a + d(n-1)$, то из неравенства $113 - 4(n-1) > 0$ найдем $n = [117/4] = 29$. Тогда $\max S_n = S_{29} = 0,5\cdot(113 + 113 - 4\cdot 28)\cdot 29 = 1653$.

Ответ: 1653.

**4.** Решите уравнение $\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} = \sin x + \cos x$. Найдите все его корни, удовлетворяющие условию $|2x - 5| < 2$.

**Решение:**

При условии $\sin x + \cos x \ge 0$ обе части уравнения $\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} = \sin x + \cos x$ можно возвести в квадрат. Так как $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \pi/4)$, то $-\pi/4 + 2\pi n \le x \le 3\pi/4 + 2\pi n$, $n \in Z$. При найденных ограничениях уравнение равносильно следующему:

$1+\operatorname{tg}x=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x$, $\operatorname{tg}x-2\sin x\cos x=0$, $\sin x\left(1-2\cos^2 x\right)=0$. Таким образом, приходим к совокупности уравнений: 1) $\sin x=0$, $x=\pi n,\ n\in Z$, 2) $\cos^2 x=1/2$, $\cos x=\pm\sqrt{2}/2$, $x=\pm\pi/4+\pi n,\ n\in Z$. Учитывая ограничения, получаем решения исходного уравнения: $x=2\pi n,\quad x=\pm\pi/4+2\pi n,\ x=3\pi/4+2\pi n,\ n\in Z$. При условии $|2x-5|<2$ имеем $x\in(1{,}5;3{,}5)$, следовательно, $x=3\pi/4$. Ответ: решения: $2\pi n,\quad \pm\pi/4+2\pi n,$ $3\pi/4+2\pi n,\ n\in Z$; корень, удовлетворяющий условию: $3\pi/4$.

**5.** Решите неравенство

$$\left(3x+4-2\sqrt{2x^2+7x+3}\right)\left(\left|x^2-4x+2\right|-\left|x-2\right|\right)\le 0.$$

**Решение:**

$\left(3x+4-2\sqrt{2x^2+7x+3}\right)\left(\left|x^2-4x+2\right|-\left|x-2\right|\right)\le 0.$ ОДЗ: $2x^2+7x+3\ge 0,\ \Rightarrow$ $x\in(-\infty;-3]\cup[-0{,}5;+\infty)$. Исходное неравенство эквивалентно следующему

$$\left(3x+4-2\sqrt{2x^2+7x+3}\right)\left(\left(x^2-4x+2\right)^2-(x-2)^2\right)\le 0\ \Leftrightarrow$$

$$\left(3x+4-2\sqrt{2x^2+7x+3}\right)\left(x^2-5x+4\right)\left(x^2-3x\right)\le 0\ \Leftrightarrow$$

$$\left(3x+4-2\sqrt{2x^2+7x+3}\right)(x-1)(x-4)x(x-3)\le 0.$$

Если $x\le-3$, то $3x+4<0$, и $\left(3x+4-2\sqrt{2x^2+7x+3}\right)<0$. Таким образом, приходим к неравенству $(x-1)(x-4)x(x-3)\ge 0$, и $x\in(-\infty;-3]$. Если $x\ge-0{,}5$, то приходим к неравенству $\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+3}\right)^2(x-1)(x-4)x(x-3)\le 0$, и $x\in[0;1]\cup\{2\}\cup[3;4]$.

Окончательно имеем: Ответ: $x\in(-\infty;-3]\cup[0;1]\cup\{2\}\cup[3;4]$.

**6.** Найдите множество значений функции

$f(x)=\sqrt{g^2(x)-245}$, где $g(x)=15-2\cos 2x-4\sin x$.

**Решение:**

$f(x)=\sqrt{g^2(x)-245}$, где $g(x)=15-2\cos 2x-4\sin x$.

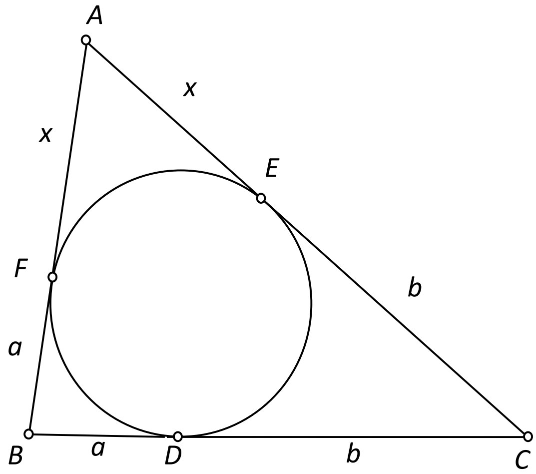
Найдем множество значений функции $z=g(x)=15-2\cos 2x-4\sin x$. Функция $g(x)$ определена на всей числовой оси. Сделаем замену переменного. Пусть $t=\sin x$. Тогда $z=13+4t^2-4t=12+(2t-1)^2$ при $t\in[-1;1]$, и $E_g=[12;21]$. Функция $y=f(x)=\sqrt{g^2(x)-245}$ имеет то же множество значений, что и функция $y=\sqrt{z^2-245}$ при $z\in\left[\sqrt{245};21\right]$, поскольку функция $y=\sqrt{z^2-245}$ определена при $z\in(-\infty;-\sqrt{245}]\cup[\sqrt{245};+\infty)$, а $z=g(x)$ принимает все значения из отрезка $[12;21]$.

Минимальное значение функции $y=\sqrt{z^2-245}$ на отрезке $\left[\sqrt{245};21\right]$ равно 0, максимальное – равно 14. Следовательно, $E_f=[0;14]$. Ответ: $E_f=[0;14]$.

**7.** Вписанная в треугольник окружность точкой касания делит одну из его сторон на отрезки равные 3 и 4. Найдите площадь треугольника, если радиус описанной около него окружности равен $7/\sqrt{3}$ .

**Решение:**

Пусть $D$ - точка касания окружности стороны $BC$.




По условию $BD=a=3,\ DC=b=4.$ Отсюда имеем $BC=a+b=7.$ Так как $2R_{on}=BC/\sin\angle A$ , то $\sin\angle A=BC/2R_{on}=\sqrt{3}/2$. Следовательно, $\angle A=60°$ или $\angle A=120°$. Если $F$ и $E$ - точки касания окружности сторон $BA$ и $AC$ соответственно, то $BF=a=3,\ EC=b=4,$ и $FA=AE=x.$ По теореме косинусов имеем:

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\angle A.$$

1) Если $\angle A=60°$, то

$$49=(x+3)^2+(x+4)^2-(x+3)(x+4),\ \text{и}$$

$$x^2+7x-36=0,\ x=\frac{\sqrt{193}-7}{2}.$$

Тогда $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}(3+x)(4+x)\sin\angle A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{\sqrt{193}-1}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{193}+1}{2}\right)=12\sqrt{3}.$

2) Если $\angle A=120°$, то $49=(x+3)^2+(x+4)^2+(x+3)(x+4),$ и $x^2+7x-4=0,$

$x=\dfrac{\sqrt{65}-7}{2}.$ Тогда $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}(3+x)(4+x)\sin\angle A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{\sqrt{65}-1}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{65}+1}{2}\right)=4\sqrt{3}.$

Ответ: $12\sqrt{3}$ или $4\sqrt{3}$.

**8.** На прямой $3x+4y=2$ найдите точку, через которую проходят две перпендикулярные друг другу касательные к графику функции $y=x^2$, и напишите уравнения этих касательных.

**Решение:**

$y=x^2$, $3x+4y=2$, $M\left(x_0;y_0\right)$. Уравнение касательной: $y=y_0+k\left(x-x_0\right)$.

Уравнение $x^2=y_0+k\left(x-x_0\right)$, или $x^2-kx+kx_0-y_0=0$, имеет единственное решение, если $D=k^2-4kx_0+4y_0=0$. Найденные из этого уравнения два значения $k$ должны удовлетворять условию перпендикулярности $k_1\cdot k_2=-1$. Так как $k_1\cdot k_2=4y_0$, $y_0=-1/4$. Из уравнения прямой $x_0=\left(2-4y_0\right)/3=\left(2+1\right)/3=1$. Из $k^2-4k-1=0$ найдём $k_{1,2}=2\pm\sqrt{5}$.

Ответ: $M\left(1;-1/4\right)$, уравнения касательных: $y=-1/4+\left(2\pm\sqrt{5}\right)\left(x-1\right)$.

**9.** Найдите все значения параметра $a$, при которых система уравнений $\begin{cases} 4\sqrt{y}=x-a, \\ y^2-x^2+2y-4x-3=0. \end{cases}$ имеет единственное решение. Укажите это решение при каждом $a$.

**Решение:**

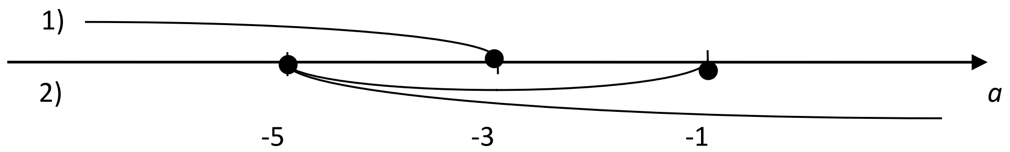
$\begin{cases} 4\sqrt{y}=x-a, \\ y^2-x^2+2y-4x-3=0. \end{cases}$ Преобразуем второе уравнение системы.

$\left(y^2+2y+1\right)-\left(x^2+4x+4\right)=0,\ \left(y+1\right)^2-\left(x+2\right)^2=0,\ \left(y+x+3\right)\left(y-x-1\right)=0.$

1) $y+4\sqrt{y}+a+3=0$, $\sqrt{y}=-2\mp\sqrt{4-a-3}=-2\mp\sqrt{1-a}$. Один корень, $\sqrt{y}=-2-\sqrt{1-a}<0$, – посторонний, другой, $\sqrt{y}=-2+\sqrt{1-a}\ge 0$, если $\sqrt{1-a}\ge 2$, т. е. при $a\le -3$.

2) $y-4\sqrt{y}-a-1=0$, $\sqrt{y}=2\pm\sqrt{4+a+1}=2\pm\sqrt{a+5}$.

$\left(\sqrt{y}\right)_1=2+\sqrt{a+5}\ge 0$, если $a+5\ge 0,\ a\ge -5$. $\left(\sqrt{y}\right)_2=2-\sqrt{a+5}\ge 0$, если $\sqrt{a+5}\le 2,\ 0\le a+5\le 4,\ -5\le a\le -1.$ При $a=-5$ $\left(\sqrt{y}\right)_1=\left(\sqrt{y}\right)_2=2$



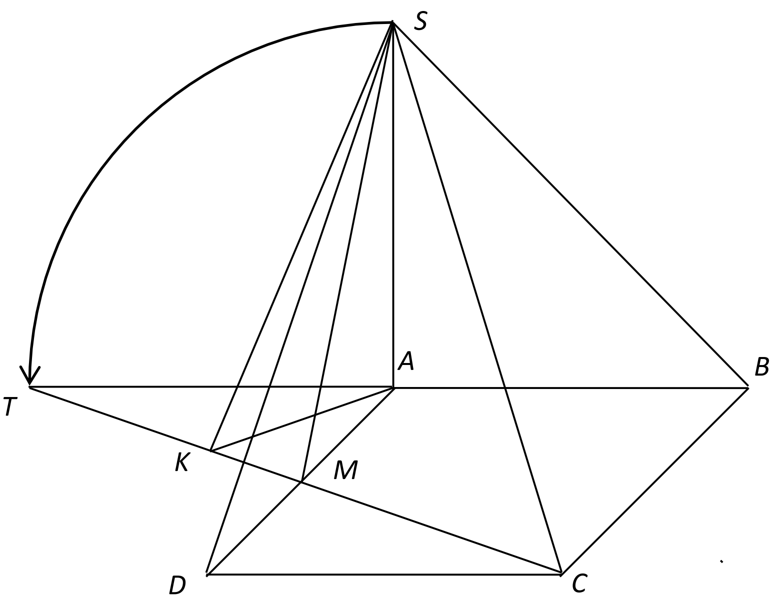

Сопоставляя решения 1) и 2), видим, что единственное решение система уравнений имеет при $a\in\left(-\infty;-5\right)\cup\left(-1;+\infty\right)$.

Ответ: $a\in\left(-\infty;-5\right),\ x=4\left(-2+\sqrt{1-a}\right)+a,\ y=\left(-2+\sqrt{1-a}\right)^2$;

$a\in\left(-1;+\infty\right),\ x=4\left(2+\sqrt{a+5}\right)+a,\ y=\left(2+\sqrt{a+5}\right)^2$.

**10.** Прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 1$ и $AD = 10$ служит основанием пирамиды $SABCD$ , а ребро $SA = 4$ перпендикулярно основанию. Найдите на ребре $AD$ такую точку $M$ , чтобы треугольник $SMC$ имел наименьший периметр. Найдите площадь этого треугольника.

**Решение:**




Отложим $AT = AS$ на продолжении ребра $AB$ . При любом положении точки $M$ на стороне $AD$ $TM = SM$ , поэтому наименьшее значение суммы $SM + MC$ будет при $M = TC \cap AD$ .

Введём обозначения $AB = a,\ AD = b,\ AS = c,\ AM = x$. Из $\Delta TAM \sim \Delta CDM$ следует

$$\frac{TA}{CD} = \frac{AM}{DM},\quad \frac{c}{a} = \frac{x}{b-x},$$

$$x = \frac{bc}{a+c} = AM,\quad \frac{ab}{a+c} = DM\ .$$

Проведём $AK \perp TC$ и соединим $K$ и $S$ .

$$AK = \frac{TA \cdot AM}{\sqrt{TA^2 + AM^2}} = \frac{cx}{\sqrt{c^2 + x^2}} =$$

$$= \frac{bc}{\sqrt{(a+c)^2 + b^2}}.\quad SK = \sqrt{AS^2 + AK^2} = \sqrt{c^2 + \frac{b^2c^2}{(a+c)^2 + b^2}} = c\,\frac{\sqrt{(a+c)^2 + 2b^2}}{\sqrt{(a+c)^2 + b^2}}\ .$$

$$MC = \sqrt{DC^2 + MD^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2b^2}{(a+c)^2}} = \frac{a\sqrt{(a+c)^2 + b^2}}{a+c}\ .$$

$$S_{\Delta MCS} = \frac{1}{2}\cdot MC \cdot SK = \frac{1}{2}\cdot\frac{ac}{a+c}\cdot\sqrt{(a+c)^2 + 2b^2} = \frac{1}{2}\cdot ac\sqrt{1 + 2\left(\frac{b}{a+c}\right)^2}\ .$$

Ответ: при $a = 1,\ b = 10,\ c = 4$ $\quad x = 8,\ S_{\Delta MCS} = 6$ .