Заключительный этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика» в 2014 г.

Вариант № 15

1. Васе и Пете, участвующим в школьной спортивно-развлекательной игре, необходимо, имея на двоих лишь одну пару роликов, как можно быстрее преодолеть дистанцию в 3,5 км. Они стартуют одновременно, один просто бежит, другой бежит на роликах. В любой момент времени бегущий на роликах может оставить их своему товарищу и продолжить бег без них. Такой обмен можно провести сколько угодно раз. Найдите минимальное время прохождения дистанции друзьями (определяется по последнему прибежавшему), если скорости Васи при простом беге и беге на роликах равны 3 км/ч и 9 км/ч, а Пети – 4 км/ч и 12 км/ч. Считать, что при переходе на ролики и обратно время не теряется. (8 баллов)

2. Решите уравнение $\left(\log_2 x\right)\cdot\log_{27}\left(4x\right)=\log_3 2$. (8 баллов)

3. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии S_3 относится к сумме первых двух членов S_2 как $21:20$, а сумма первого и третьего членов равна 17. Найдите первый член и знаменатель прогрессии и определите, в каких пределах может изменяться сумма n членов прогрессии S_n. (8 баллов)

4. Найдите все удовлетворяющие условию $|x|+|y|\le 8$ решения уравнения $\left(\sin^8\left(x/4\right)-\cos^8\left(x/4\right)\right)\left(5-\cos 4y-4\cos 2y\right)=\cos^2\left(x/2\right)+\cos\left(x/2\right)$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{(9^x-12\cdot 3^x+27)(\sqrt{x+5}-x+1)}{\log_3 x\cdot\log_4(6-x)}\le 0.$ (10 баллов)

6. Для функции $f(x)=g(g(x))+(7-\pi)g(x)-2+\left(\pi/2\right)$ найдите множество значений при $x\in[0;\ 0,5]$, где $g(x)=2\sin\pi x-7x+2$. (10 баллов)

7. Две окружности внешним образом касаются друг друга и сторон треугольника ABC. Первая окружность радиуса $2/3$ касается сторон AB и AC в точках L и K, вторая окружность радиуса $1/6$ касается сторон AC и BC в точках N и M. Найдите площадь треугольника ABC, если $AL=1,\ CM=1/3.$ (12 баллов)

8. Стороны треугольника ΔABC лежат на касательных к графику функции $y=-0,25x^2+2x-1$; две из них проходят через точку $A\left(2;3\right)$, а точка касания графика с третьей касательной лежит на стороне BC. Какую наибольшую площадь может иметь ΔABC? (12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений $2\left(x-a\right)^2+y=10-a,\ y^2+\left(\left(x-10\right)/\left(|x|-10\right)\right)^2=1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (12 баллов)

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит равносторонний треугольник ABC, а высота пирамиды, равная 2, совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной медиане AD боковой грани TAB и проходящей через середину стороны основания AB и центр сферы радиуса $\sqrt{17}$, описанной около пирамиды. (12 баллов)

Решение варианта №15

1. Васе и Пете, участвующим в школьной спортивно-развлекательной игре, необходимо, имея на двоих лишь одну пару роликов, как можно быстрее преодолеть дистанцию в 3,5 км. Они стартуют одновременно, один просто бежит, другой бежит на роликах. В любой момент времени бегущий на роликах может оставить их своему товарищу и продолжить бег без них. Такой обмен можно провести сколько угодно раз. Найдите минимальное время прохождения дистанции друзьями (определяется по последнему прибежавшему), если скорости Васи при простом беге и беге на роликах равны 3 км/ч и 9 км/ч, а Пети – 4 км/ч и 12 км/ч. Считать, что при переходе на ролики и обратно время не теряется.

Решение: Вся дистанция делится на несколько этапов, которые один из школьников бежит без роликов, другой на роликах. Пусть x – сумма длин этапов, которые Вася пробегает на роликах, t_1 – время, затраченное им на пробег всей дистанции, а t_2 – время, которое затрачивает Петя на пробег всей дистанции, тогда $t_1=\frac{x}{12}+\frac{3,5-x}{4}=\frac{10,5-2x}{12}$ и $t_2=\frac{3,5-x}{9}+\frac{x}{3}=\frac{3,5+2x}{9}$. Отметим, что функция $t_1(x)$ убывающая, а функция $t_2(x)$ возрастающая. Укажем значение x, при котором $t_1=t_2$, то есть, бегуны закончили бы пробег одновременно. Из $\frac{10,5-2x}{12}=\frac{2x+3,5}{9}\Rightarrow x=\frac{5}{4}$, $t_1=t_2=\frac{2}{3}$ часа. Если $x<5/4$, то $t_1(x)>\frac{2}{3}>t_2(x)$, если $x>5/4$, то $t_1(x)<\frac{2}{3}<t_2(x)$. Следовательно, минимальное время прохождения дистанции друзьями (по последнему прибежавшему), равно 2/3 часа.

Ответ: 2/3 *ч.*

2. Решите уравнение $(\log_2 x)\cdot\log_{27}(4x)=\log_3 2$.

Решение: $(\log_2 x)\cdot\log_{27}(4x)=\log_3 2$; $\frac{\log_2(4x)}{3\log_2 3}\cdot\log_2 x=\frac{1}{\log_2 3}$;

$(2+\log_2 x)\log_2 x=3$; $\log_2^2 x+2\log_2 x-3=0$.

1) $\log_2 x=-3,\ x=1/8$, 2) $\log_2 x=1,\ x=2$. Ответ: $\{1/8;2\}$.

3. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии S_3 относится к сумме первых двух членов S_2 как $21:20$, а сумма первого и третьего членов равна 17. Найдите первый член и знаменатель прогрессии и определите, в каких пределах может изменяться сумма n членов прогрессии S_n.

Решение:

$$\frac{S_3}{S_2}=\frac{a\left(1+q+q^2\right)}{a(1+q)}=\frac{21}{20}.\quad 20q^2+20q+20=21q+21;\ 20q^2-q-1=0;$$

$$q=\frac{1\pm\sqrt{1+80}}{40}=\frac{1\pm 9}{40}=\left[\begin{array}{l}1/4,\\-1/5.\end{array}\right.$$ Возможны два решения.

1) Если $q=\frac{1}{4}$, из условия $a\left(1+q^2\right)=17\Rightarrow a=16$.

$S_n = 16\dfrac{1-(1/4)^n}{1-1/4} = \dfrac{64}{3}\left(1-(1/4)^n\right)$; $16 \le S_n < \dfrac{64}{3}$.

2) Если $q = -\dfrac{1}{5}$, $a\left(1+\dfrac{1}{25}\right) = 17$, $a = \dfrac{25\cdot 17}{26} = \dfrac{425}{26}$.

Так как $q < 0, |q| < 1$, $S_2 \le S_n \le S_1$. $\dfrac{425}{26}\left(1-\dfrac{1}{5}\right) \le S_n \le \dfrac{425}{26}$, $\dfrac{340}{26} \le S_n \le \dfrac{425}{26}$.

Ответ: 1) $q = \dfrac{1}{4}$, $a = 16$, $16 \le S_n < \dfrac{64}{3}$; 2) $q = -\frac{1}{5}$, $a = \frac{425}{26}$, $\frac{340}{26} \le S_n \le \frac{425}{26}$.

4. Найдите все решения уравнения

$\left(\sin^8\dfrac{x}{4} - \cos^8\dfrac{x}{4}\right)(5-\cos 4y - 4\cos 2y) = \cos^2\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}$, удовлетворяющие условию $|x| + |y| \le 8$.

Решение: После равносильных преобразований имеем

$$\left(\cos^4\frac{x}{4} - \sin^4\frac{x}{4}\right)\left(\sin^4\frac{x}{4} + \cos^4\frac{x}{4}\right)\left(2\cos^2 2y + 4\cos 2y - 6\right) = \cos^2\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\cos^2\frac{x}{4} - \sin^2\frac{x}{4}\right)\left(\sin^4\frac{x}{4} + \cos^4\frac{x}{4}\right)\left(2\cos^2 2y + 4\cos 2y - 6\right) = \cos\frac{x}{2}\left(1+\cos\frac{x}{2}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\cos\frac{x}{2}\left(\sin^4\frac{x}{4} + \cos^4\frac{x}{4}\right)\left(\cos^2 2y + 2\cos 2y - 3\right) = \cos\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{4}$$

1) $\cos\dfrac{x}{2} = 0, \quad y \in R \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$. Выберем решения, удовлетворяющие условию $|x| + |y| \le 8$: $x = \pi$, $x = -\pi$, $|y| \le 8 - \pi$. В итоге имеем

$(\pm\pi;\, y), \quad y \in [\pi - 8; 8 - \pi]$.

2) $\left(\sin^4\dfrac{x}{4} + \cos^4\dfrac{x}{4}\right)\left((\cos 2y + 1)^2 - 4\right) = \cos^2\dfrac{x}{4}$

Так как $\sin^4\dfrac{x}{4} + \cos^4\dfrac{x}{4} > 0$, $\cos^2\dfrac{x}{4} \ge 0$ для любых $x \in R$, то $(\cos 2y + 1)^2 \ge 4$, или

$\cos 2y \ge 1$. Откуда получаем $\cos 2y = 1$, $\cos\dfrac{x}{4} = 0$, или $x = 2\pi + 4\pi n$, $y = \pi k$, $n, k \in Z$.

Поскольку $x \in [-8; 8]$, то $n = 0; -1$. Тогда $2\pi - 8 \le \pi k \le 8 - 2\pi$, и $k = 0$. В итоге имеем решения: $(2\pi;\, 0)$, $(-2\pi;\, 0)$.

Ответ: $(\pm\pi;\, y), \quad y \in [\pi - 8; 8 - \pi]$; $(2\pi;\, 0)$, $(-2\pi;\, 0)$.

5. Решите неравенство $\dfrac{(9^x - 12\cdot 3^x + 27)(\sqrt{x+5} - x + 1)}{\log_3 x \cdot \log_4(6-x)} \le 0.$

Решение:

ОДЗ: $x + 5 \ge 0, \quad x > 0,\ 6 - x > 0, x \ne 1, x \ne 5 \quad \Rightarrow \quad x \in (0;1) \cup (1;5) \cup (5;6)$.

Имеем $\dfrac{(3^x - 9)(3^x - 3)(\sqrt{x+5} - x + 1)}{(\log_3 x - \log_3 1)(\log_4(6-x) - \log_4 1)} \le 0.$

На ОДЗ исходное неравенство эквивалентно следующему

$$\frac{(x-2)(x-1)(\sqrt{x+5}-(x-1))}{(x-1)(5-x)}\le 0 \;\Rightarrow\; \frac{(x-2)(\sqrt{x+5}-(x-1))}{(5-x)}\le 0.$$

Если $x\in(0;1)$, то $x-1<0 \Rightarrow \sqrt{x+5}-(x-1)>0$. Следовательно, приходим к неравенству $\dfrac{(x-2)}{(5-x)}\le 0$, и $x\in(0;1)$.

Если $x\in(1;5)\cup(5;6)$ то приходим к неравенству $\dfrac{(x-2)(x+5-(x-1)^2)}{(5-x)}\le 0$, и $\dfrac{(x-2)(x+1)(x-4)}{(x-5)}\le 0 \Rightarrow x\in(1;2]\cup[4;5)$.

Окончательно имеем $x\in(0;1)\cup(1;2]\cup[4;5)$.

Ответ: $x\in(0;1)\cup(1;2]\cup[4;5)$.

6. Найдите множество значений функции $f(x)=g(g(x))+(7-\pi)g(x)-2+\dfrac{\pi}{2}$ при $x\in[0;0{,}5]$, где $g(x)=2\sin\pi x-7x+2$. (10 баллов)

Решение: Исследуем функцию $g(x)$ на монотонность. Так как $g'(x)=2\pi\cos\pi x-7<0$ для всех $x\in R$, то функция $g(x)$ убывает на отрезке $[0;0{,}5]$ и ее множество значений на этом отрезке совпадает с отрезком $[g(0{,}5);g(0)]=[0{,}5;2]$. Множество значений E_f функции $f(x)=g(g(x))+(7-\pi)g(x)-2+\dfrac{\pi}{2}$ на отрезке $[0;0{,}5]$ совпадает с множеством значений E_φ функции $\varphi(t)=g(t)+(7-\pi)t-2+\dfrac{\pi}{2}$ на отрезке $[0{,}5;2]$. Найдем E_φ. Функция $\varphi(t)=2\sin\pi t-\pi t+\dfrac{\pi}{2}$ имеет производную $\varphi'(t)=2\pi\cos\pi t-\pi$. Тогда $\varphi'(t)=0$ в том случае, если $\cos\pi t=0{,}5$, т.е. при $t=\dfrac{1}{3}+2k$ или $t=-\dfrac{1}{3}+2k$, $k\in Z$. Из точек, при которых $\varphi'(t)=0$, в отрезок $[0{,}5;2]$ попадает только точка $t=\dfrac{5}{3}$. Вычислим значения функции φ в точках $t=0{,}5$, $t=\dfrac{5}{3}$, $t=2$:

$$\varphi(0{,}5)=2;\; \varphi(5/3)=-\sqrt{3}-\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=-\sqrt{3}-\frac{7\pi}{6};\; \varphi(2)=-1{,}5\pi.$$

Так как $\sqrt{3}+\dfrac{7\pi}{6}>1{,}5\pi$, то $E_\varphi=\left[-\sqrt{3}-\dfrac{7\pi}{6};2\right]$. Следовательно, $E_f=\left[-\sqrt{3}-\dfrac{7\pi}{6};2\right]$.

Ответ: $E_f=\left[-\sqrt{3}-\dfrac{7\pi}{6};2\right]$.

7. Две окружности внешним образом касаются друг друга и сторон треугольника ABC. Первая окружность радиуса $\frac{2}{3}$ касается сторон AB и AC в точках L и K, вторая окружность радиуса $\frac{1}{6}$ касается сторон AC и BC в точках N и M. Найдите площадь треугольника ABC, если $AL = 1$, $CM = \frac{1}{3}$.

Решение:

$a = 1, \quad b = \frac{1}{3}, \quad r = \frac{2}{3}, \quad R = \frac{1}{6}, \quad KN = 2\sqrt{rR} = \frac{2}{3}, \quad AC = a + KN + b = 2$

$tg\frac{A}{2} = \frac{r}{a}, \quad tg\frac{C}{2} = \frac{R}{b},$

$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{a^2}{a^2 + r^2}, \quad \cos^2\frac{C}{2} = \frac{b^2}{b^2 + R^2},$

$\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1 = \frac{2a^2}{a^2 + r^2} - 1 = \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2} = \frac{5}{13},$

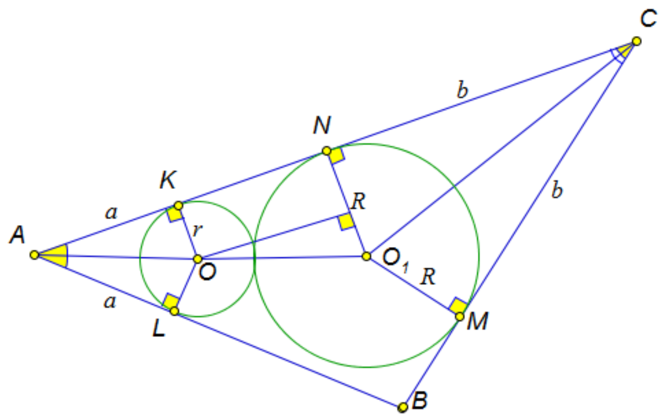
$\cos C = 2\cos^2\frac{C}{2} - 1 = \frac{2b^2}{b^2 + R^2} - 1 = \frac{b^2 - R^2}{b^2 + R^2} = \frac{3}{5}, \quad \sin A = \frac{2ar}{a^2 + r^2} = \frac{12}{13},$

$\sin C = \frac{2bR}{b^2 + R^2} = \frac{4}{5}, \quad \sin B = \sin(A + C) = \sin A\cos C + \cos A\sin C = \frac{56}{65}.$

Теорема синусов: $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}.$

$AB = \frac{AC\sin C}{\sin B}, \quad S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC\sin A = \frac{AC^2 \sin A\sin C}{2\sin B} = \frac{4 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 65}{2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 56} = \frac{12}{7}.$

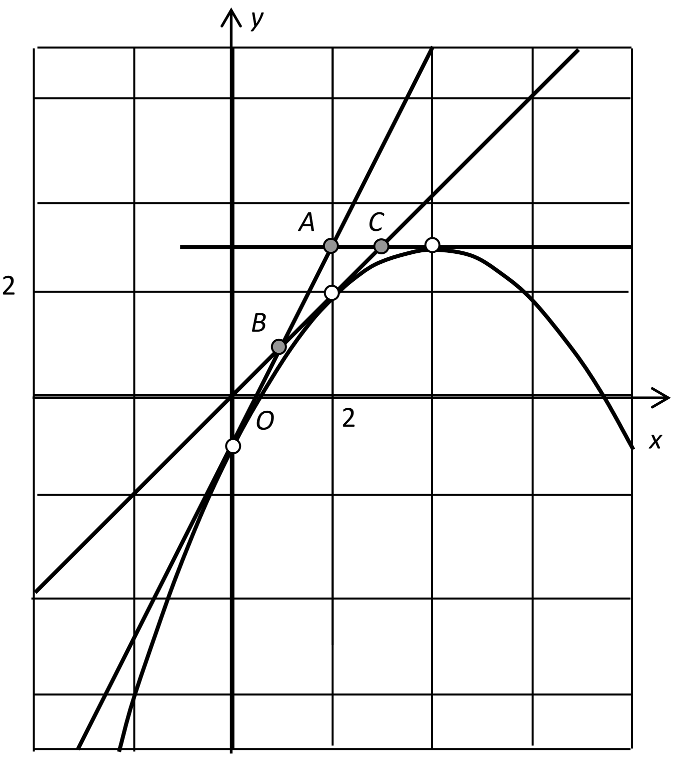
Ответ: $\frac{12}{7}$.



8. Стороны треугольника ΔABC лежат на касательных к графику функции $y=-0,25x^2+2x-1$; две из них проходят через точку $A(2;3)$, а точка касания графика с третьей касательной лежит на стороне BC. Какую наибольшую площадь может иметь ΔABC?

Решение:

$y=-0,25x^2+2x-1;\quad A(2;3)$.



Уравнение касательной к графику функции:

$$y=-\frac{1}{4}x_0^2+2x_0-1+\frac{4-x_0}{2}\cdot(x-x_0),$$

или

$$y=\frac{1}{4}x_0^2-1+\frac{4-x_0}{2}\cdot x.$$

Для касательных, проходящих через точку *A*,

$3=\frac{1}{4}x_0^2-1+\frac{4-x_0}{2}\cdot 2$. Отсюда

$x_0^2-4x_0=0$, $x_0=\left[\begin{array}{l}4,\\0.\end{array}\right.$ Уравнения касательных, проходящих через точку *A*: 1) $y=3$; 2). $y=2x-1$

Уравнение прямой CB:

$$y=\frac{1}{4}x_*^2-1+\frac{4-x_*}{2}\cdot x,$$

где x_* – абсцисса точки касания с графиком функции.

В точке $C(y_C;x_C)$ $y_C=3$. Тогда $3=\frac{1}{4}x_*^2-1+\frac{4-x_*}{2}\cdot x_C$. Отсюда

$$x_C=\frac{0,25x_*^2-4}{x_*-4}\cdot 2=\frac{x_*+4}{2}.$$

В точке $B(x_B;y_B)$ $\frac{1}{4}x_*^2-1+\frac{4-x_*}{2}\cdot x_B=2x_B-1$, $x_B=\frac{x_*}{2}$, $y_B=2\frac{x_B}{2}-1=x_*-1$.

Площадь треугольника *ABC* равна

$$S_{\Delta ABC}=0,5\cdot(x_C-x_A)\cdot(y_A-y_B)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x_*+4}{2}-2\right)\cdot(3+1-x_*)=\frac{1}{4}\left(4x_*-x_*^2\right)=S(x_*).$$

$S'(x_*)=0,25(4-2x_*)=0$ при $x_*=2$. $\max S_{\Delta ABC}=S(2)=0,25\cdot(8-4)=1$.

Ответ: 1 *ед*^{2}.

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$2(x-a)^2+y=10-a,\quad y^2+\left(\frac{x-10}{|x|-10}\right)^2=1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

Решение: Преобразуем второе уравнение:

$$y^2=\frac{x^2-20|x|+100-x^2+20x-100}{\left(|x|-10\right)^2};\;\; y^2=-\frac{20\left(|x|-x\right)}{\left(|x|-10\right)^2}.$$

При $x<0$ уравнение решений не имеет, так как правая часть меньше нуля; при $x\ge 0$ оно равносильно системе: $x\ge 0,\;\; x\ne 10,\;\; y=0$. Подставляя $y=0$ в первое уравнение, получаем; $2(x-a)^2=10-a$, или $2x^2-4ax+2a^2+a-10=0$ (*), у которого $D/4=4a^2-4a^2-2a+20=20-2a$.

Корень $x=10$ квадратного уравнения может получиться, когда $2(10-a)^2=10-a$, т.е. если 1) $a=10$, уравнение имеет вид $\left(x-10\right)^2=0$, тогда этот корень единственный и заданная система решений не имеет, или 2) $2(10-a)=1$, т.е. $a=19/2$, тогда для x получаем уравнение $2\left(x-19/2\right)^2=10-19/2,\;\; x=19/2\pm 1/2$, у которого, кроме постороннего корня $x_1=10$, есть еще один корень $x_2=9$, удовлетворяющий условиям, и заданная система имеет единственное решение $(9;0)$.

Рассмотрим остальные случаи, когда решение системы будет единственным.

1. $\begin{cases} D/4=20-2a=0, \\ a>0,\quad a\ne 10. \end{cases}$ Система решений не имеет.

2. $2a^2+a-10<0$, т.е. при $-5/2<a<2\;\; x=\left(2a+\sqrt{20-2a}\right)/2$.

3. $2a^2+a-10=0$, отсюда $a=2$, $2x^2-8x=0$, $x_1=0$, $x_2=4$ удовлетворяют условиям, или $a=-5/2$, $2x^2+10x=0$, $x_1=0,\;\; x_2=-5$ – посторонний корень.

Рассмотрим случаи, когда система будет иметь два различных решения. Квадратное уравнение (*) будет иметь два различных неотрицательных корня $x_{1,2}=\left(2a\pm\sqrt{20-2a}\right)/2$, если

$\begin{cases} 20-2a>0, \\ a>0, \\ 2a^2+a-10\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a<10, \\ \left[\begin{array}{l} a\le -5/2, \\ a\ge 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow\;\; 2\le a<10$. Из этого промежутка надо убрать рассмотренную ранее точку $a=19/2$. Объединяя найденные значения a, получим ответ.

Ответ: $a\in\left[-5/2;2\right),\;\; x=\left(2a+\sqrt{20-2a}\right)/2,\;\; y=0$;

$a\in\left[2;19/2\right)\cup\left(19/2;10\right),\;\; x_{1,2}=\left(2a\pm\sqrt{20-2a}\right)/2,\;\; y=0$;

$a=19/2,\;\; x=9,\;\; y=0$.

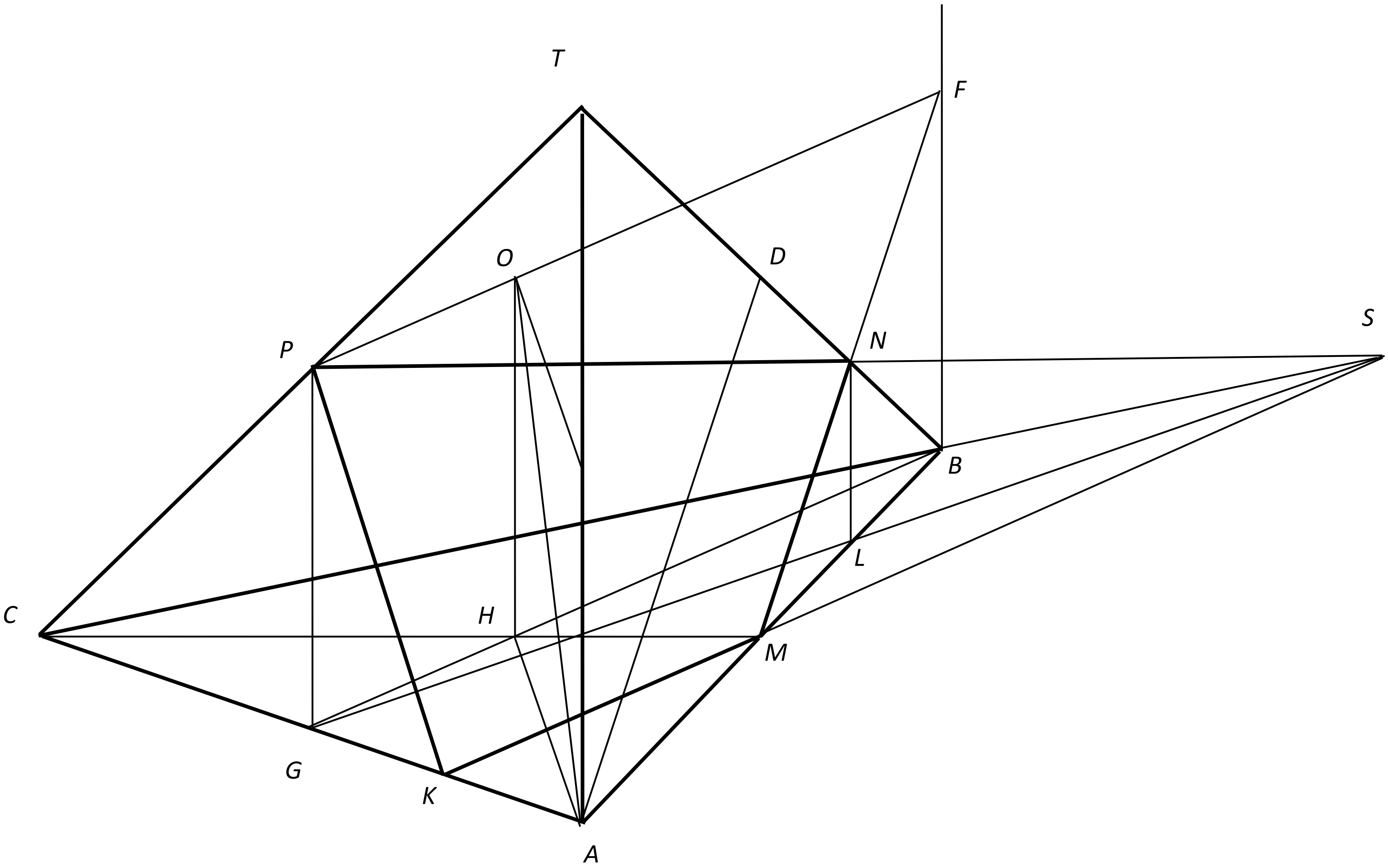
10. Основанием пирамиды $TABC$ служит равносторонний треугольник ABC, а высота пирамиды, равная 2, совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной медиане AD боковой грани TAB и проходящей через середину стороны основания AB и центр сферы радиуса $\sqrt{17}$, описанной около пирамиды.

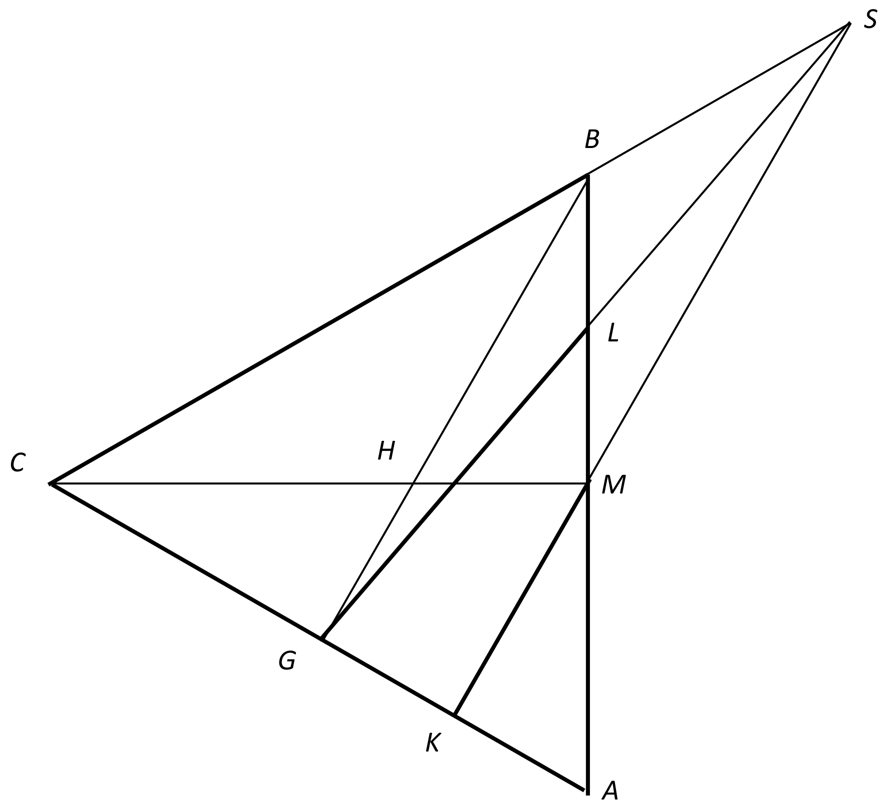
Решение: Центр сферы O лежит на перпендикуляре к плоскости основания, проведенном через центр основания H; $OH = AT/2$. Через вершину B проведем прямую $BE||AT$. Через середину стороны AB точку M проведем прямую $MN||AD,\ N \in TB,$ $TB = 4NB$, и продолжим ее до пересечения с BE в точке F. Очевидно, MF лежит в секущей плоскости и $BF = AT/2$. Прямая FO лежит в секущей плоскости, она параллельна медиане основания BG и пересекает боковое ребро TC в его середине – точке P. Проведем $MK||BG,\ K \in AC;$ MK – линия пересечения секущей плоскости с основанием пирамиды. Значит, $MNPK$ – искомое сечение. Пусть S – точка пересечения прямых MK и NP; очевидно $S \in (BC)$. Из того, что $\Delta PSG \sim \Delta NSL$ и $NL = 1/2\,PG$, следует $NS = \dfrac{1}{2}PS$. Кроме того, $MS = \dfrac{2}{3}KS$. Тогда площадь треугольника MSN $S_{\Delta MSN} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}S_{\Delta KSP} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta KSP}$, а площадь сечения $S_{MNPK} = \dfrac{2}{3}S_{\Delta KSP}$.

Обозначим $AB = a,\ TA = h,\ OA = R$. В ΔAOH $OH = h/2,\ AH = a/\sqrt{3}$. Так как $OA^2 = OH^2 + AH^2,\ R^2 = (h/2)^2 + \left(a/\sqrt{3}\right)^2,\ a = \sqrt{3}\sqrt{R^2 - (h/2)^2}$. Заметим, что $PK \perp KS$, так как $KM \perp AC$, тогда $S_{\Delta KSP} = \dfrac{1}{2}KS \cdot PK$. Так как $KS = \dfrac{3}{2}BG,\ KS = \dfrac{3\sqrt{3}\,a}{4}$. В треугольнике PKG $PK = \sqrt{GK^2 + PG^2} = \sqrt{(a/4)^2 + (h/2)^2} = \dfrac{1}{4}\sqrt{a^2 + 4h^2}$. Площадь треугольника $S_{\Delta KSP} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}\,a}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{a^2+4h^2}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}\,a\sqrt{a^2+4h^2}}{32}$. Площадь сечения

$$S_{MNPK} = \frac{2}{3}S_{\Delta FMN} = \frac{\sqrt{3}a\sqrt{a^2+4h^2}}{16}.$$

Ответ: $R = \sqrt{17}, h = 2, a = \sqrt{3(17-1)} = 4\sqrt{3},\ S = \dfrac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\sqrt{16\cdot 3 + 4\cdot 4}}{16} = 6.$


T
F
O
D
S
P
N
B
L
C
H
M
G
K
A


S
B
L
C
H
M
G
K
A