Заключительный этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика» в 2014 г.

Вариант № 13

1. Васе и Пете, участвующим в школьной спортивно-развлекательной игре, необходимо, имея на двоих лишь одну пару роликов, как можно быстрее преодолеть дистанцию в 3 км. Они стартуют одновременно, один просто бежит, другой бежит на роликах. В любой момент времени бегущий на роликах может оставить их своему товарищу и продолжить бег без них. Такой обмен можно провести сколько угодно раз. Найдите минимальное время прохождения дистанции друзьями (определяется по последнему прибежавшему), если скорости Васи при простом беге и беге на роликах равны 4 км/ч и 8 км/ч, а Пети – 5 км/ч и 10 км/ч. Считать, что при переходе на ролики и обратно время не теряется. (8 баллов)

2. Решите уравнение $\left(\log_3 x\right)\cdot\log_4\left(x/3\right)=\log_2 3$. (8 баллов)

3. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии S_3 относится к сумме первых двух членов S_2 как $19:15$, а сумма первого и третьего членов равна 13. Найдите первый член и знаменатель прогрессии и определите, в каких пределах может изменяться сумма n членов прогрессии S_n. (8 баллов)

4. Найдите все удовлетворяющие условию $|x|+|y|\le 9$ решения уравнения $\left(\sin^8\left(x/4\right)-\cos^8\left(x/4\right)\right)\left(\cos 4y+4\cos 2y-5\right)=\cos^2\left(x/2\right)-\cos\left(x/2\right)$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{(4^x-12\cdot 2^x+32)(\sqrt{2x-1}-x+2)}{\log_2(x-1)\cdot\log_3(7-x)}\le 0.$ (10 баллов)

6. Для функции $f(x)=g(g(x))+(7+\pi)g(x)-3\pi-1$ найдите множество значений при $x\in[-0,5;\ 0]$, где $g(x)=2\cos\pi x-7x+1$. (10 баллов)

7. Две окружности внешним образом касаются друг друга и сторон треугольника ABC. Первая окружность радиуса $1/18$ касается сторон AB и AC в точках L и K, вторая окружность радиуса $2/9$ касается сторон AC и BC в точках N и M. Найдите площадь треугольника ABC, если $AL=1/9$, $CM=1/6$. (12 баллов)

8. Стороны треугольника ΔABC лежат на касательных к графику функции $y=0,25x^2-x+4$; две из них проходят через точку $A(4;3)$, а точка касания графика с третьей касательной лежит на стороне BC. Какую наибольшую площадь может иметь ΔABC? (12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений $3\left(x-a\right)^2+y=2-a,\quad y^2+\left(\left(x-2\right)/\left(|x|-2\right)\right)^2=1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (12 баллов)

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит равносторонний треугольник ABC, а высота пирамиды, равная $\sqrt{2}$, совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной медиане AD боковой грани TAB и проходящей через середину стороны основания AB и центр сферы радиуса $\sqrt{11/6}$, описанной около пирамиды. (12 баллов)

Решение варианта №13

1. Васе и Пете, участвующим в школьной спортивно-развлекательной игре, необходимо, имея на двоих лишь одну пару роликов, как можно быстрее преодолеть дистанцию в 3 км. Они стартуют одновременно, один просто бежит, другой бежит на роликах. В любой момент времени бегущий на роликах может оставить их своему товарищу и продолжить бег без них. Такой обмен можно провести сколько угодно раз. Найдите минимальное время прохождения дистанции друзьями (определяется по последнему прибежавшему), если скорости Васи при простом беге и беге на роликах равны 4 км/ч и 8 км/ч, а Пети – 5 км/ч и 10 км/ч. Считать, что при переходе на ролики и обратно время не теряется.(8 баллов)

Решение: Вся дистанция делится на несколько этапов, которые один из школьников бежит без роликов, другой на роликах. Пусть x – сумма длин этапов, которые Вася пробегает на роликах, t_1 – время, затраченное им на пробег всей дистанции, а t_2 – время, которое затрачивает Петя на пробег всей дистанции, тогда $t_1 = \frac{x}{8} + \frac{3-x}{4} = \frac{6-x}{8}$ и $t_2 = \frac{3-x}{10} + \frac{x}{5} = \frac{3+x}{10}$. Отметим, что функция $t_1(x)$ убывающая, а функция $t_2(x)$ возрастающая. Укажем значение x, при котором $t_1 = t_2$, то есть, бегуны закончили бы пробег одновременно. Из $\frac{6-x}{8} = \frac{3+x}{10} \Rightarrow x = 2,\ t_1 = t_2 = \frac{1}{2}$ часа. Если $x < 2$, то $t_1(x) > \frac{1}{2} > t_2(x)$, если $x > 2$, то $t_1(x) < \frac{1}{2} < t_2(x)$. Следовательно, минимальное время прохождения дистанции друзьями (по последнему прибежавшему), равно 0,5 часа.
Ответ: 0,5 *ч.*

2. Решите уравнение $(\log_3 x)\cdot\log_4(x/3) = \log_2 3$.

Решение: $(\log_3 x)\cdot\log_4(x/3) = \log_2 3;\ \frac{\log_3(x/3)}{2\log_3 2}\cdot\log_3 x = \frac{1}{\log_3 2};$
$(\log_3 x - 1)\log_3 x = 2;\ \log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0$. 1) $\log_3 x = -1,\quad x = 1/3$,
2) $\log_3 x = 2,\quad x = 9$. Ответ: $\{1/3; 9\}$.

3. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии S_3 относится к сумме первых двух членов S_2 как $19:15$, а сумма первого и третьего членов равна 13. Найдите первый член и знаменатель прогрессии и определите, в каких пределах может изменяться сумма n членов прогрессии S_n.

Решение:

$$\frac{S_3}{S_2} = \frac{a(1+q+q^2)}{a(1+q)} = \frac{19}{15}.\quad 15q^2 + 15q + 15 = 19q + 19;\ 15q^2 - 4q - 4 = 0;$$

$$q = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{15} = \frac{2 \pm 8}{15} = \left[\begin{array}{l} 2/3, \\ -2/5. \end{array}\right.$$ Возможны два решения.

1) Если $q=\dfrac{2}{3}$, из условия $a\left(1+q^2\right)=13\Rightarrow a=9$.

$S_n=9\dfrac{1-(2/3)^n}{1-2/3}=27\left(1-(2/3)^n\right)$; $9\le S_n<27$.

2) Если $q=-\dfrac{2}{5}$, $a\left(1+\dfrac{4}{25}\right)=13$, $a=\dfrac{13\cdot 25}{29}=\dfrac{325}{29}$.

Так как $q<0,\ |q|<1,\ S_2\le S_n\le S_1$. $\dfrac{325}{29}\left(1-\dfrac{2}{5}\right)\le S_n\le\dfrac{325}{29}$, $\dfrac{195}{29}\le S_n\le\dfrac{325}{29}$.

Ответ: 1) $q=\dfrac{2}{3}$, $a=9$, $9\le S_n<27$; 2) $q=-\frac{2}{5}$, $a=\frac{325}{29}$, $\frac{195}{29}\le S_n\le\frac{325}{29}$.

4. Найдите все решения уравнения

$\left(\sin^8\dfrac{x}{4}-\cos^8\dfrac{x}{4}\right)(\cos 4y+4\cos 2y-5)=\cos^2\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}$, удовлетворяющие условию $|x|+|y|\le 9$.

Решение:

После равносильных преобразований имеем

$$\left(\sin^4\frac{x}{4}-\cos^4\frac{x}{4}\right)\left(\sin^4\frac{x}{4}+\cos^4\frac{x}{4}\right)\left(2\cos^2 2y+4\cos 2y-6\right)=\cos^2\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\quad\Leftrightarrow$$

$$\left(\sin^2\frac{x}{4}-\cos^2\frac{x}{4}\right)\left(\sin^4\frac{x}{4}+\cos^4\frac{x}{4}\right)\left(2\cos^2 2y+4\cos 2y-6\right)=-\cos\frac{x}{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\quad\Leftrightarrow$$

$$\cos\frac{x}{2}\left(\sin^4\frac{x}{4}+\cos^4\frac{x}{4}\right)\left(\cos^2 2y+2\cos 2y-3\right)=\cos\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{4}$$

1) $\cos\dfrac{x}{2}=0,\quad y\in R\Leftrightarrow x=\pi+2\pi n,\ n\in Z$. Выберем решения, удовлетворяющие условию $|x|+|y|\le 9$: $x=\pi$, $x=-\pi$, $|y|\le 9-\pi$. В итоге имеем $(\pm\pi;\,y),\quad y\in[\pi-9;9-\pi]$.

2) $\left(\sin^4\dfrac{x}{4}+\cos^4\dfrac{x}{4}\right)\left((\cos 2y+1)^2-4\right)=\sin^2\dfrac{x}{4}$

Так как $\sin^4\dfrac{x}{4}+\cos^4\dfrac{x}{4}>0,\ \sin^2\dfrac{x}{4}\ge 0$ для любых $x\in R$, то $(\cos 2y+1)^2\ge 4$, или

$\cos 2y\ge 1$. Откуда получаем $\cos 2y=1$, $\sin\dfrac{x}{4}=0$, или $x=4\pi n$, $y=\pi k$, $n,k\in Z$.

Поскольку $x\in[-9;9]$, то $n=0$. Тогда $-9\le\pi k\le 9$, и $k=0;\pm1;\pm2$.

Ответ: $(\pm\pi;\,y),\quad y\in[\pi-9;9-\pi]$; $(0;\,\pi k),\ \ k=0;\pm1;\pm2$.

5. Решите неравенство $\dfrac{(4^x-12\cdot 2^x+32)(\sqrt{2x-1}-x+2)}{\log_2(x-1)\cdot\log_3(7-x)}\le 0.$ (10 баллов)

Решение:

ОДЗ: $2x-1\ge 0,\quad x-1>0,\ 7-x>0, x\ne 2, x\ne 6\ \Rightarrow\ x\in(1;2)\cup(2;6)\cup(6;7)$.

Имеем $\dfrac{(2^x-8)(2^x-4)(\sqrt{2x-1}-x+2)}{(\log_2(x-1)-\log_2 1)(\log_3(7-x)-\log_3 1)}\le 0.$

На ОДЗ исходное неравенство эквивалентно следующему

$$\frac{(x-3)(x-2)(\sqrt{2x-1}-(x-2))}{(x-2)(6-x)}\le 0\ \Rightarrow \frac{(x-3)(\sqrt{2x-1}-(x-2))}{(6-x)}\le 0.$$

Если $x\in(1;2)$, то $x-2<0\ \Rightarrow\ \sqrt{2x-1}-(x-2)>0$. Следовательно, приходим к неравенству $\dfrac{(x-3)}{(6-x)}\le 0$, и $x\in(1;2)$.

Если $x\in(2;6)\cup(6;7)$ то приходим к неравенству $\dfrac{(x-3)(2x-1-(x-2)^2)}{(6-x)}\le 0$, и

$$\frac{(x-3)(x-5)(x-1)}{(x-6)}\le 0\Rightarrow\ x\in(2;3]\cup[5;6).$$

Окончательно имеем $x\in(1;2)\cup(2;3]\cup[5;6)$.

Ответ: $x\in(1;2)\cup(2;3]\cup[5;6)$.

6. Найдите множество значений функции $f(x)=g(g(x))+(7+\pi)g(x)-3\pi-1$ при $x\in[-0{,}5;0]$, где $g(x)=2\cos\pi x-7x+1$. (10 баллов)

Решение: Исследуем функцию $g(x)$ на монотонность. Так как $g'(x)=-2\pi\sin\pi x-7<0$ для всех $x\in R$, то функция $g(x)$ убывает на отрезке $[-0{,}5;0]$ и ее множество значений на этом отрезке совпадает с отрезком $[g(0);g(-0{,}5)]=[3;4{,}5]$. Множество значений E_f функции $f(x)=g(g(x))+(7+\pi)g(x)-3\pi-1$ на отрезке $[-0{,}5;0]$ совпадает с множеством значений E_φ функции $\varphi(t)=g(t)+(7+\pi)t-3\pi-1$ на отрезке $[3;4{,}5]$. Найдем E_φ. Функция $\varphi(t)=2\cos\pi t+\pi t-3\pi$ имеет производную $\varphi'(t)=-2\pi\sin\pi t+\pi$. Тогда $\varphi'(t)=0$ в том случае, если $\sin\pi t=0{,}5$, т.е. при $t=\dfrac{1}{6}+2k$ или $t=\dfrac{5}{6}+2k$, $k\in Z$. Из точек, при которых $\varphi'(t)=0$, в отрезок $[3;4{,}5]$ попадает только точка $t=4\dfrac{1}{6}$. Вычислим значения функции φ в точках $t=3, t=4\dfrac{1}{6}, t=4{,}5$:

$$\varphi(3)=-2;\ \varphi(25/6)=\sqrt{3}+\frac{25\pi}{6}-3\pi=\sqrt{3}+\frac{7\pi}{6};\ \varphi(4{,}5)=1{,}5\pi.$$

Так как $\sqrt{3}+\dfrac{7\pi}{6}>1{,}5\pi$, то $E_\varphi=\left[-2;\sqrt{3}+\dfrac{7\pi}{6}\right]$. Следовательно, $E_f=\left[-2;\sqrt{3}+\dfrac{7\pi}{6}\right]$

Ответ: $E_f=\left[-2;\sqrt{3}+\dfrac{7\pi}{6}\right]$.

7. Две окружности касаются друг друга и сторон треугольника ABC. Первая окружность радиуса $\frac{1}{18}$ касается сторон AB и AC в точках L и K, вторая окружность радиуса $\frac{2}{9}$ касается сторон AC и BC в точках N и M. Найдите площадь треугольника ABC, если $AL=\frac{1}{9}$, $CM=\frac{1}{6}$.

Решение:

$a=\frac{1}{9},\quad b=\frac{1}{6},\quad r=\frac{1}{18},\quad R=\frac{2}{9}$ **,** $\quad KN=2\sqrt{rR}=\frac{2}{9},\quad AC=a+KN+b=\frac{1}{2}$

$tg\frac{A}{2}=\frac{r}{a},\quad tg\frac{C}{2}=\frac{R}{b},$

$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{a^2}{a^2+r^2},\quad \cos^2\frac{C}{2}=\frac{b^2}{b^2+R^2},$

$\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}-1=\frac{2a^2}{a^2+r^2}-1=\frac{a^2-r^2}{a^2+r^2}=\frac{3}{5},$

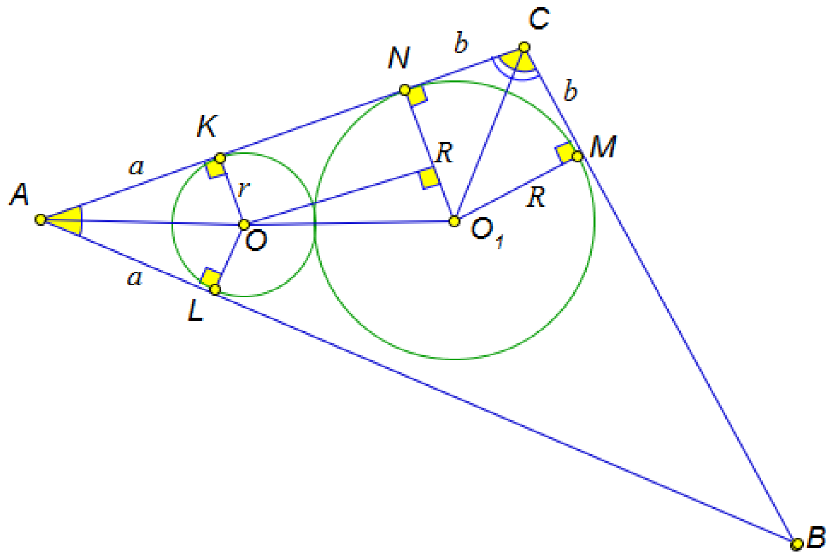
$\cos C=2\cos^2\frac{C}{2}-1=\frac{2b^2}{b^2+R^2}-1=\frac{b^2-R^2}{b^2+R^2}=-\frac{7}{25},\quad \sin A=\frac{2ar}{a^2+r^2}=\frac{4}{5},$

$\sin C=\frac{2bR}{b^2+R^2}=\frac{24}{25},\quad \sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\frac{44}{125}.$

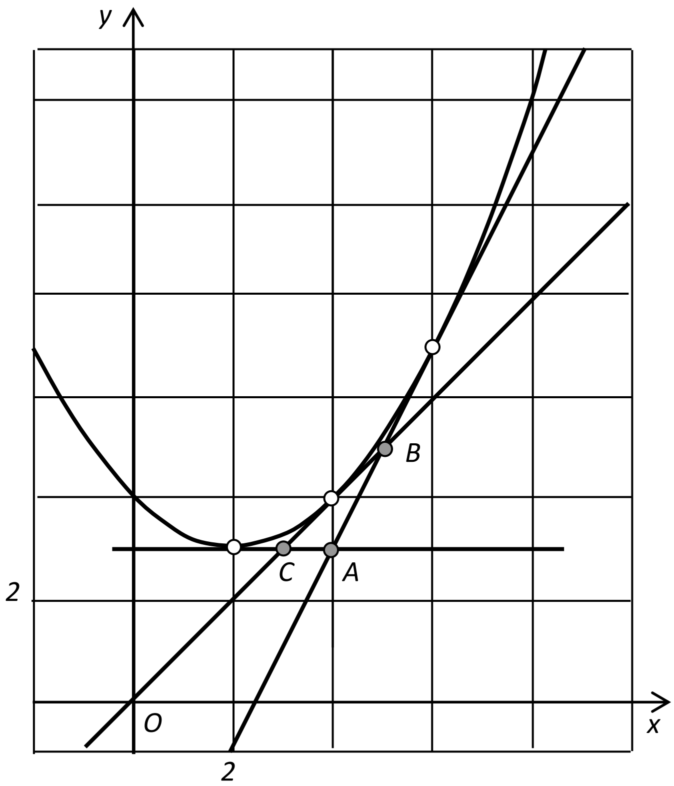
Теорема синусов: $\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}.$

$AB=\frac{AC\sin C}{\sin B},\quad S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A=\frac{AC^2\sin A\sin C}{2\sin B}=\frac{4\cdot24\cdot125}{8\cdot5\cdot25\cdot44}=\frac{3}{11}.$

Ответ: $\frac{3}{11}$.



8. Стороны треугольника ΔABC лежат на касательных к графику функции $y = 0,25x^2 - x + 4$; две из них проходят через точку $A(4;3)$, а точка касания графика с третьей касательной лежит на стороне BC. Какую наибольшую площадь может иметь ΔABC?



$y = 0,25x^2 - x + 4; \quad A(4;3)$.

Уравнение касательной к графику функции:

$y = \frac{1}{4}x_0^2 - x_0 + 4 + \frac{x_0 - 2}{2} \cdot (x - x_0)$, или

$y = -\frac{1}{4}x_0^2 + 4 + \frac{x_0 - 2}{2} \cdot x$.

Для касательных, проходящих через точку A,

$3 = -\frac{1}{4}x_0^2 + 4 + \frac{x_0 - 2}{2} \cdot 4$. Отсюда

$x_0^2 - 8x_0 + 12 = 0$, $x_0 = 4 \pm 2 = \left[\begin{array}{l} 2, \\ 6. \end{array}\right.$

Уравнения касательных, проходящих через точку A: 1) $y = 3$; 2). $y = 2x - 5$

Уравнение прямой CB:

$y = -\frac{1}{4}x_*^2 + 4 + \frac{x_* - 2}{2} \cdot x$,

где x_* – абсцисса точки касания с графиком функции.

В точке $C(y_C; x_C)$ $y_C = 3$. Тогда

$3 = -\frac{1}{4}x_*^2 + 4 + \frac{x_* - 2}{2} \cdot x_C$. Отсюда $x_C = \frac{0,25x_*^2 - 1}{x_* - 2} \cdot 2 = \frac{x_* + 2}{2}$.

В точке $B(x_B; y_B)$ $-\frac{1}{4}x_*^2 + 4 + \frac{x_* - 2}{2} \cdot x_B = 2x_B - 5$, $\frac{x_* - 6}{2} \cdot x_B = \frac{x_*^2 - 36}{4}$, $x_B = \frac{x_* + 6}{2}$.

$y_B = 2x_B - 5 = x_* + 1$. Площадь треугольника ABC равна

$S_{\Delta ABC} = 0,5 \cdot (x_A - x_C) \cdot (y_B - y_A) = \frac{1}{2} \cdot \left(4 - \frac{x_* + 2}{2}\right) \cdot (x_* + 1 - 3) = \frac{1}{4}\left(-12 + 8x_* - x_*^2\right) = S(x_*)$.

$S'(x_*) = 0,25(8 - 2x_*) = 0$ при $x_* = 4$. $\max S_{\Delta ABC} = S(4) = 0,25 \cdot (-12 + 8 \cdot 4 - 16) = 1$.

Ответ: 1 *ед*^{2}.

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$3(x-a)^2 + y = 2 - a, \quad y^2 + \left(\frac{x-2}{|x| - 2}\right)^2 = 1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

Решение. Преобразуем второе уравнение:

$$y^2=\frac{x^2-4|x|+4-x^2+4x-4}{\left(|x|-2\right)^2};\ \ y^2=-\frac{4\left(|x|-x\right)}{\left(|x|-2\right)^2}.$$

При $x<0$ уравнение решений не имеет, так как правая часть меньше нуля; при $x\geq 0$ оно равносильно системе: $x\geq 0,\ \ x\neq 2,\ \ y=0$. Подставляя $y=0$ в первое уравнение, получаем; $3(x-a)^2=2-a$, или $3x^2-6ax+3a^2+a-2=0$ (*), у которого $D/4=9a^2-9a^2-3a+6=6-3a$.

Корень $x=2$ квадратного уравнения может получиться, когда $3(2-a)^2=2-a$, т.е. если 1) $a=2$, уравнение имеет вид $\left(x-2\right)^2=0$, тогда этот корень единственный и заданная система решений не имеет, или 2) $3(2-a)=1$, т.е. $a=5/3$, тогда для x получаем уравнение $3\left(x-5/3\right)^2=2-5/3,\ \ x=5/3\pm 1/3$, у которого, кроме постороннего корня $x_1=2$, есть еще один корень $x_2=4/3$, удовлетворяющий условиям, и заданная система имеет единственное решение $(4/3;0)$.

Рассмотрим остальные случаи, когда решение системы будет единственным.

1. $\begin{cases} D/4=6-3a=0, \\ a>0,\quad a\neq 2. \end{cases}$ Система решений не имеет.

2. $3a^2+a-2<0$, т.е. при $-1<a<2/3$ $x=\left(3a+\sqrt{6-3a}\right)/3$.

3. $3a^2+a-2=0$, отсюда $a=2/3$, $3x^2-4x=0$, $x_1=0$, $x_2=4/3$ удовлетворяют условиям, или $a=-1$, $3x^2+6x=0$, $x_1=0,\ \ x_2=-2$ –посторонний корень.

Рассмотрим случаи, когда система будет иметь два различных решения. Квадратное уравнение (*) будет иметь два различных неотрицательных корня $x_{1,2}=\left(3a\pm\sqrt{6-3a}\right)/3$, если

$\begin{cases} 6-3a>0, \\ a>0, \\ 3a^2+a-2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a<2, \\ \left[\begin{array}{l} a\leq -1, \\ a\geq 2/3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 2/3\leq a<2$. Из этого промежутка надо убрать рассмотренную ранее точку $a=5/3$. Объединяя найденные значения a, получим ответ.

Ответ: $a\in\left[-1;2/3\right),\ \ x=\left(3a+\sqrt{6-3a}\right)/3,\ \ y=0$;

$a\in\left[2/3;5/3\right)\cup\left(5/3;2\right),\ \ x_{1,2}=\left(3a\pm\sqrt{6-3a}\right)/3,\ \ y=0$;

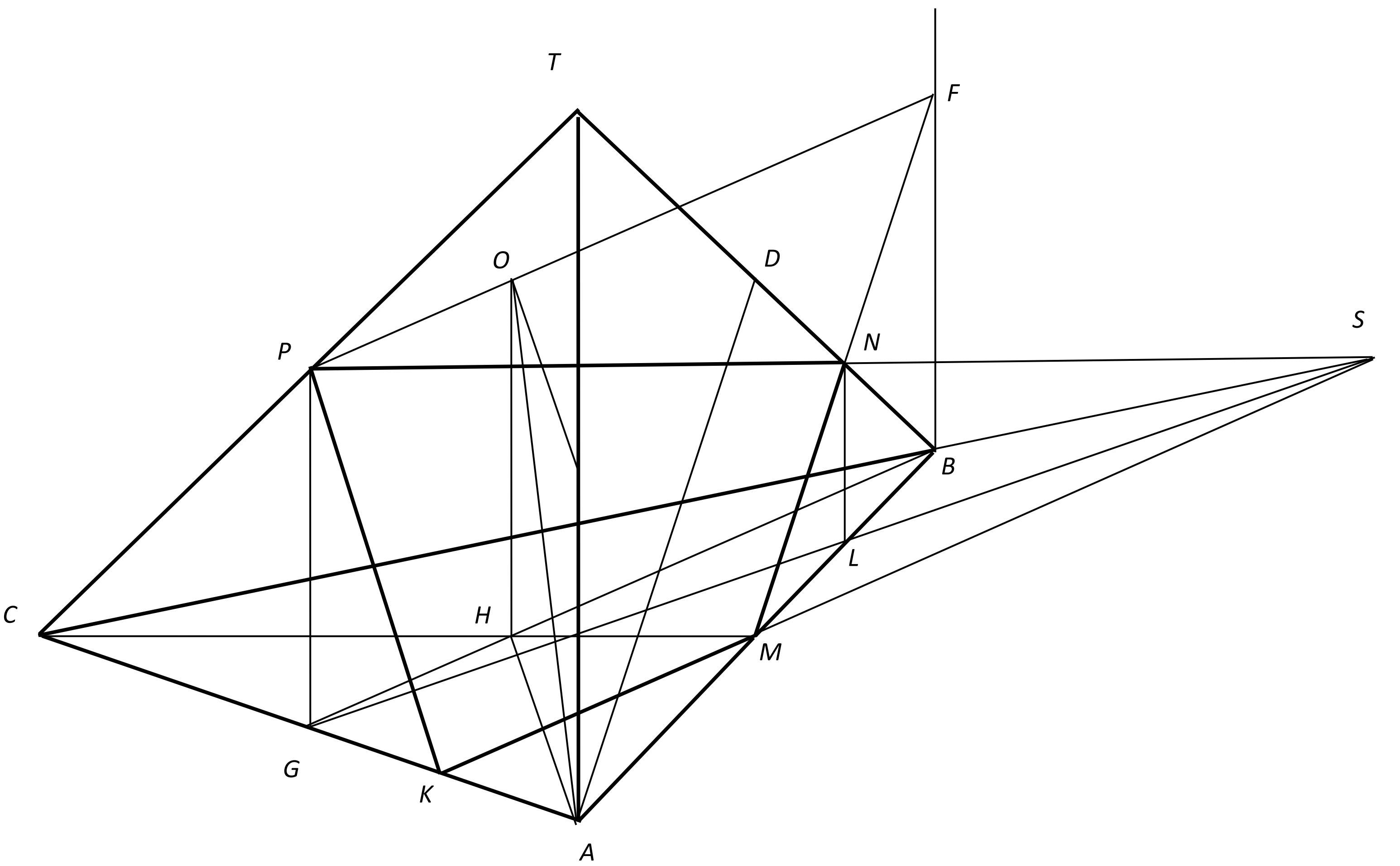
$a=5/3,\ \ x=4/3,\ \ y=0$.

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит равносторонний треугольник ABC, а высота пирамиды, равная $\sqrt{2}$, совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной медиане AD боковой грани TAB и проходящей через середину стороны основания AB и центр сферы радиуса $\sqrt{11/6}$, описанной около пирамиды.

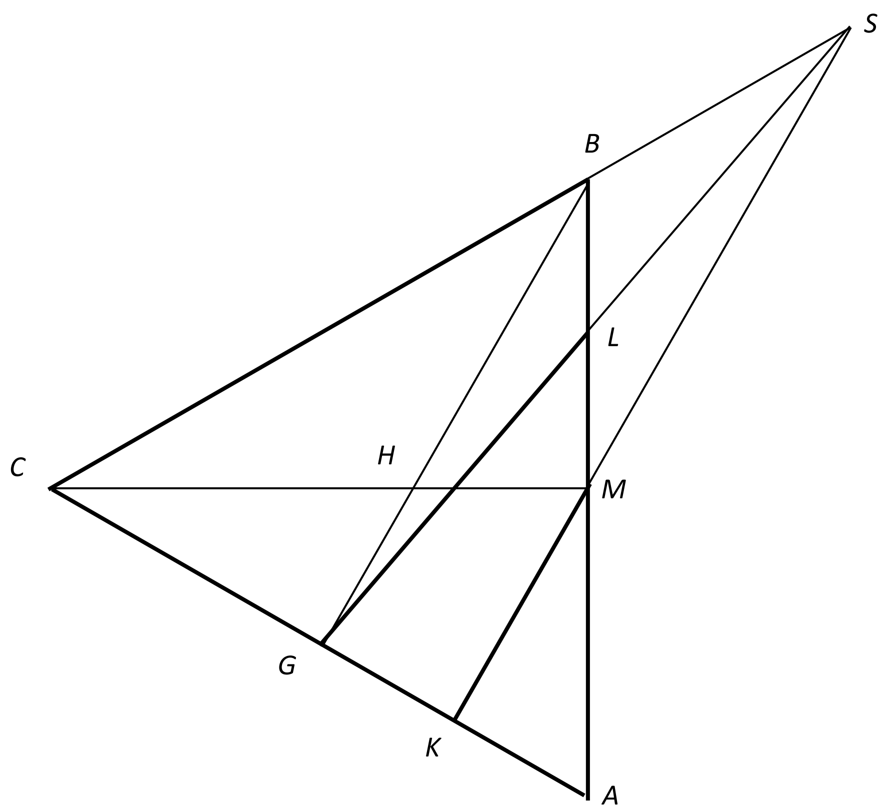
Решение: Центр сферы O лежит на перпендикуляре к плоскости основания, проведенном через центр основания H; $OH = AT/2$. Через вершину B проведем прямую $BE||AT$. Через середину стороны AB точку M проведем прямую $MN||AD,\ N \in TB,$ $TB = 4NB$, и продолжим ее до пересечения с BE в точке F. Очевидно, MF лежит в секущей плоскости и $BF = AT/2$. Прямая FO лежит в секущей плоскости, она параллельна медиане основания BG и пересекает боковое ребро TC в его середине – точке P. Проведем $MK||BG, K \in AC;$ MK – линия пересечения секущей плоскости с основанием пирамиды. Значит, $MNPK$ – искомое сечение. Пусть S – точка пересечения прямых MK и NP; очевидно $S \in (BC)$. Из того, что $\Delta PSG \sim \Delta NSL$ и $NL = 1/2\,PG$, следует $NS = \frac{1}{2}PS$. Кроме того, $MS = \frac{2}{3}KS$. Тогда площадь треугольника MSN $S_{\Delta MSN} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}S_{\Delta KSP} = \frac{1}{3}S_{\Delta KSP}$, а площадь сечения $S_{MNPK} = \frac{2}{3}S_{\Delta KSP}$.

Обозначим $AB = a,\ TA = h,\ OA = R$. В ΔAOH $OH = h/2,\ AH = a/\sqrt{3}$. Так как $OA^2 = OH^2 + AH^2,\ R^2 = (h/2)^2 + \left(a/\sqrt{3}\right)^2,\ a = \sqrt{3}\sqrt{R^2 - (h/2)^2}$. Заметим, что $PK \perp KS$, так как $KM \perp AC$, тогда $S_{\Delta KSP} = \frac{1}{2}KS\cdot PK$. Так как $KS = \frac{3}{2}BG,\ KS = \frac{3\sqrt{3}\,a}{4}$. В треугольнике PKG $PK = \sqrt{GK^2 + PG^2} = \sqrt{(a/4)^2 + (h/2)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{a^2 + 4h^2}$. Площадь треугольника $S_{\Delta KSP} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}\,a}{4}\cdot\frac{\sqrt{a^2+4h^2}}{4} = \frac{3\sqrt{3}\,a\sqrt{a^2+4h^2}}{32}$. Площадь сечения $S_{MNPK} = \frac{2}{3}S_{\Delta FMN} = \frac{\sqrt{3}a\sqrt{a^2+4h^2}}{16}$.

Ответ: $R = \sqrt{\frac{11}{6}}, h = \sqrt{2}, a = \sqrt{3\left(\frac{11}{6} - \frac{1}{2}\right)} = 2,\ S = \frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{4\cdot 2 + 4}}{16} = \frac{3}{4}$.



T
F
O
D
S
P
N
B
L
C
H
M
G
K
A



S
B
L
H
C
M
G
K
A