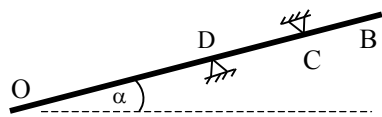


ЗАДАЧА 1.

После выстрела из пушки снаряд массы $m = 10$ кг, упал на землю через 10 секунд. Определите модуль изменения импульса снаряда за последние две секунды полёта. Спротивлением воздуха пренебречь.

ЗАДАЧА 2.

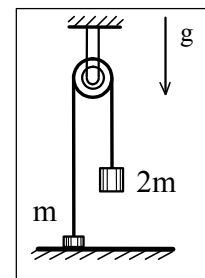


Однородный тонкий стержень OB лежит на двух опорах D и C , расстояние между которыми $a = 0,2$ м. Коэффициент трения стержня об опоры равен $\mu = 0,5$. Угол наклона стержня к горизонту $\alpha = 60^\circ$, длина участка $CB = b = 0,42$ м. Найдите длину стержня L , при которой он будет

находиться в равновесии.

ЗАДАЧА 3.

Два груза массы $2m$ и m связаны невесомой нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижный блок. В начальный момент груз массы m удерживают, прижимая его к столу. Затем груз отпускают. На какую максимальную высоту поднимется этот груз над столом, если при ударе груза $2m$ о стол выделяется количество теплоты, равное Q ? Удар абсолютно неупругий. Массой блока и силами трения в блоке пренебречь.



ЗАДАЧА 4.

Тонкий однородный стержень массы m и длины L лежит на дне сосуда с водой. За нить, привязанную к одному концу стержня, его медленно поднимают в вертикальное положение, в котором стержень, опираясь на дно сосуда, выступает над поверхностью воды на $0,4L$. Найдите работу, которую необходимо совершить при таком подъеме стержня. Плотность стержня в три раза больше плотности воды. Силами сопротивления и массой нити пренебречь.

ЗАДАЧА 5.

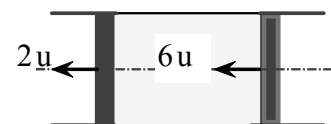
Математический маятник с длиной нити L прикреплен к потолку лифта, который движется вниз с ускорением $a = g/2$, где g – ускорение свободного падения. Определите период малых колебаний маятника.

ЗАДАЧА 6.

Где и во сколько раз больше атомов: в стакане воды или в равном по объёму куске меди? Плотность меди $\rho_{Cu} = 9,0 \cdot 10^3$ кг/м³.

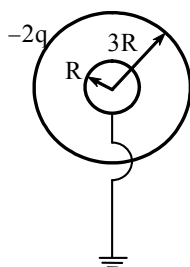
ЗАДАЧА 7.

В длинной трубе между двумя поршнями массы M каждый находится моль идеального одноатомного газа при температуре T_0 . Масса газа много меньше массы поршней. В остальном пространстве трубы – вакуум. В начальный момент левый поршень имеет скорость $2u$, а правый – $6u$. Определите максимальную температуру газа при дальнейшем движении поршней. Система теплоизолирована, теплоемкостями поршней и трубы, а также трением пренебречь.



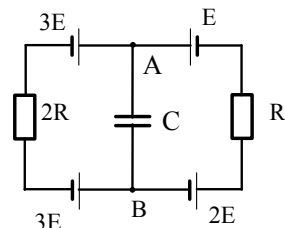
ЗАДАЧА 8.

Две концентрические металлические сферы радиусами R и $3R$ жестко закреплены. Внутренняя сфера соединена с землей, а внешняя сфера заряжена отрицательным зарядом $-2q$. Какую минимальную скорость должен иметь точечный отрицательный заряд $-q$ массы m на бесконечно большом расстоянии от сфер, чтобы двигаясь к их центру, достигнуть точки A , находящейся на расстоянии $4R$ от центра сфер. Перераспределением зарядов на сферах под действием точечного заряда пренебречь.



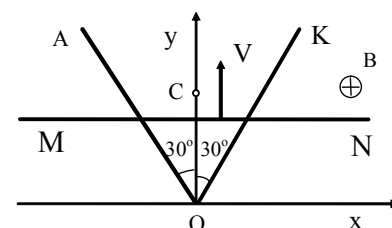
ЗАДАЧА 9.

В схеме, приведенной на рисунке, найдите энергию конденсатора. Параметры элементов схемы, изображенных на рисунке, считать известными. Внутренним сопротивлением источников тока пренебречь.



ЗАДАЧА 10.

Проводник AOK , согнутый под углом 60° , расположен в плоскости xy , как показано на рисунке, в постоянном однородном магнитном поле индукции B , перпендикулярной плоскости xy . По проводнику из начала координат O перемещают поступательно вдоль оси y с постоянной скоростью v переключку MN , параллельную оси x . Сопротивление единицы длины переключки равно ρ . Пренебрегая сопротивлением проводника и скользящих контактов, а также индуктивностью



контура, найдите полное количество теплоты Q , выделившейся в перемычке, за время её движения до точки С. Длина отрезка ОС равна L .

6-1

ОСЕННЯЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2014-2015 г.г.

I ТУР

РЕШЕНИЕ ВАРИАНТА № 6

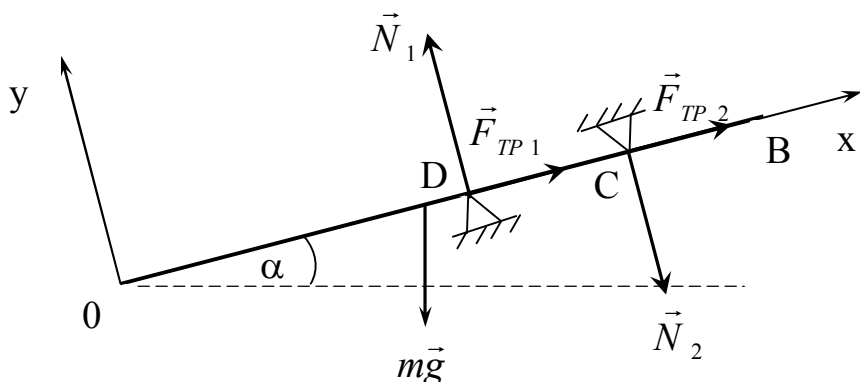
ЗАДАЧА 1. (8 баллов)

Ответ:
$$\Delta p = mg\Delta t = 10 \cdot 9,8 \cdot 2 = 196 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$$

ЗАДАЧА 2. (8 баллов)

Ответ:
$$L \geq 2b + a \left(1 + \frac{\text{tg}\alpha}{\mu} \right) \geq 1,7 \text{ м}.$$

На стержень ОВ действуют:



mg - сила тяжести; N_1 и N_2 - силы нормальной реакции опор D и C; $F_{\text{ТР}1}$ и $F_{\text{ТР}2}$ - силы трения. Силы трения направлены вдоль стержня вверх, так как стержень стремится соскользнуть вниз.

Стержень будет находиться в равновесии, если будут выполняться два условия: Равенства нулю всех сил, действующих на стержень $\sum F_i = 0$ и равенства нулю моментов всех

сил, действующих на стержень, относительно оси проходящей, например, через опору С, $\sum M_C(F_i) = 0$. Напишем для стержня первое условие равновесия:

$$mg + N_1 + F_{\text{ТР}1} + F_{\text{ТР}2} + N_2 = 0 \quad (1)$$

Направим ось x вдоль стержня, ось y перпендикулярно ей, и спроецируем на них уравнение (1).

$$F_{\text{ТР}1} + F_{\text{ТР}2} - mg \sin \alpha = 0 \quad (2)$$

$$N_1 - N_2 - mg \cos \alpha = 0 \quad (3)$$

Принимая во внимание, что $F_{\text{ТР}} \leq \mu N$, перепишем уравнения (2) и (3) в виде

$$\mu N_1 + \mu N_2 - mg \sin \alpha \geq 0 \quad (4)$$

$$N_1 - N_2 - mg \cos \alpha = 0 \quad (5)$$

Напишем для стержня второе условие равновесия относительно оси, проходящей через точку С:

$$M_1 - M_2 = 0 \quad (6), \text{ где } M_1 = mg\ell_1, \quad M_2 = N_1\ell_2 \text{ - моменты сил } mg \text{ и } N_1$$

относительно выбранной оси, где $\ell_1 = (L/2 - b) \cos \alpha$ и $\ell_2 = a$ - плечи сил mg и N_1 . Подставим выражения для M_1 и M_2 в (6), получим

$$mg(L/2 - b) \cos \alpha - N_1 a = 0 \quad (7).$$

Из уравнение (5) и (7) найдём

$$N_1 = \frac{mg \cos \alpha (L/2 - b)}{a} \quad N_2 = \frac{mg \cos \alpha (L/2 - b - a)}{a}, \text{ а затем из уравнения (4) выразим длину}$$

стержня:
$$L \geq 2b + a \left(1 + \frac{\text{tg}\alpha}{\mu} \right).$$

Подставим $a = 0,2$; $b = 0,4$; $\mu = 0,5$; $\alpha = 60^\circ$; $\text{tg}60^\circ = \sqrt{3}$, найдём

$$L \geq 2 \cdot 0,4 + 0,2 \left(1 + \frac{1,73}{0,5} \right) = 0,8 + 0,2 \cdot (1 + 3,46) = 1,7 \text{ м}$$

ЗАДАЧА 3. (10 баллов)

Ответ: $H = \frac{2Q}{mg}$

1) $H = h_1 + h_2$ (1), где h_1 – высота груза m_1 над столом до начала движения; h_2 – высота подъема груза m_2 над столом после удара груза m_1 о стол.

2) Используя закон сохранения энергии и уравнение равнопеременного движения, получим

$$Q = W_{k_1} = \frac{m_1 v^2}{2} \quad (2), \quad \text{откуда} \quad v^2 = \frac{2Q}{m_1}$$

$$3) \quad h_1 = \frac{v^2}{2a} = \frac{Q}{m_1 a} \quad (3); \quad 4) \quad h_2 = \frac{v^2}{2g} = \frac{Q}{m_1 g} \quad (4)$$

5) Подставляя (3) и (4) в (1), получим

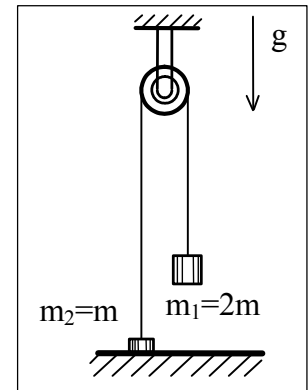
$$H = \frac{Q}{m_1} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{g} \right) \quad (5), \quad \text{где} \quad a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), найдем

$$H = \frac{Q}{m_1} \left(\frac{g+a}{ag} \right) = \frac{Q}{m_1 g} \left(\frac{g}{a} + 1 \right) = \frac{Q}{m_1 g} \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} + 1 \right) = \frac{2Q}{(m_1 - m_2)g} \quad (7)$$

Подставим значения $m_1 = 2m$ $m_2 = m$ в (7), найдем

$$H = \frac{2Q}{(2m - m)g} = \frac{2Q}{mg}$$

**ЗАДАЧА 4.** (10 баллов)

Ответ: $A_1 = 0,36mgL$

$\Delta W_{кин} = \sum A_i$ По условию $\Delta W_{кин} = 0$, следовательно, $A_1 + A_2 + A_3 = 0$, где A_1 -работа внешней силы, A_2 - работа силы тяжести, A_3 - работа силы Архимеда.

Искомая работа $A_1 = -A_2 - A_3$. $A_2 = -mg \frac{L}{2}$

$$A_3 = \rho g 0,4V \cdot 0,6L + \rho g \cdot 0,6V \cdot 0,3L = (0,4 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,6) \rho g VL = 0,42 \frac{m}{n} gL. \quad \text{При } n = 3$$

$$A_3 = \frac{0,42}{3} mgL = 0,14mgL \quad A_2 = -\frac{mgL}{2} \quad A_1 = 0,5mgL - 0,14mgL = (0,5 - 0,14)mgL = 0,36mgL$$

ЗАДАЧА 5. (10 баллов)

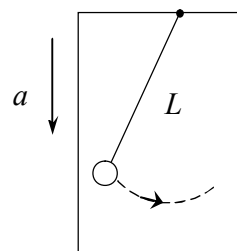
Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{g}}$

$$a = \frac{g}{2}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g_{эфф}}}, \quad (1) \quad \text{где}$$

$$g_{эфф} = g - a = g - \frac{g}{2} = \frac{g}{2}$$

Подставляя $g_{эфф}$ в (1), получим

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{g}}$$



ЗАДАЧА 6. (10 баллов)

Ответ: Число атомов воды больше числа атомов меди в $\frac{3N_1}{N_2} = \frac{167}{140,6} = 1,2$ раза.

В стакане воды содержится число молекул $N_1 = \frac{\rho_1 V}{\mu_1} N_A$ и $3N_1$ атомов, а в куске меди -

$N_2 = \frac{\rho_2 V}{\mu_2} N_A$ атомов. Подставляя числовые значения, получим: для воды

$$3N_1 = 3 \frac{10^3}{0,018} V \cdot N_A = 167 \cdot 10^3 \cdot V \cdot N_A.$$

Для меди: $N_2 = \frac{9,0 \cdot 10^3}{0,064} V \cdot N_A = 140,6 \cdot 10^3 \cdot V \cdot N_A$. Здесь N_A - число Авогадро, V - объём стакана,

ρ_1 и ρ_2 - плотности воды и меди соответственно. Следовательно, число атомов воды больше числа атомов меди в $\frac{3N_1}{N_2} = \frac{167}{140,6} = 1,2$ раза.

ЗАДАЧА 7. (10 баллов)

Ответ: $T = T_0 + \frac{8 Mu^2}{3 R}$.

В системе отсчёта, связанной с центром масс поршней, они движутся навстречу друг другу с равными скоростями (так как по условию их массы одинаковые). При этом кинетическая энергия поршней, переходит во внутреннюю энергию газа.

$$E_{\text{кин}} + U_0 = U,$$

где U_0 - начальная внутренняя энергия газа $U_0 = \nu c_v T_0$, где $\nu = 1$.

U - внутренняя энергия газа при максимальном его сжатии $U = \nu c_v T$.

Скорость центра масс поршней $v_C = \frac{M \cdot 2u + M \cdot 6u}{2M} = 4u$

Скорость левого поршня в системе центра масс $v = 2u - v_C = 2u - 4u = -2u$.

Скорость правого поршня в системе центра масс $v = 6u - v_C = 6u - 4u = 2u$.

Используя закон сохранения энергии, запишем

Используя закон сохранения энергии, запишем (при $\nu = 1$):

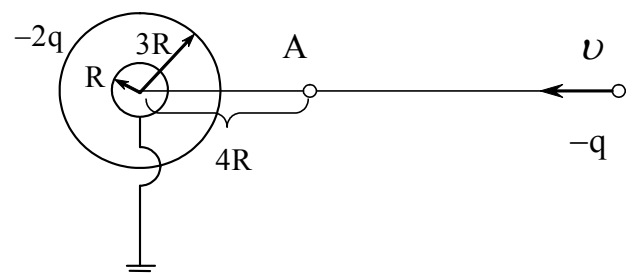
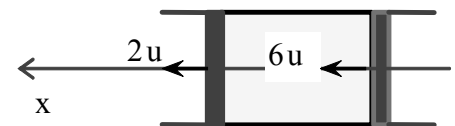
$$2 \frac{M}{2} (2u)^2 + \frac{3}{2} RT_0 = \frac{3}{2} RT, \text{ откуда } T = T_0 + \frac{8 Mu^2}{3 R}.$$

ЗАДАЧА 8. (10 баллов)

Ответ: $v = \sqrt{\frac{2q\varphi_A}{m}} = q \sqrt{\frac{1}{6m\pi\epsilon_0 R}}$.

На заземлённой сфере наводится заряд q_x , который находится из условия равенства нулю потенциала внутренней сферы. Согласно принципу суперпозиции, потенциал внутренней сферы равен

$$\varphi = \frac{q_x}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 \cdot 3R} = 0,$$



откуда находим искомый заряд $q_x = \frac{2}{3}q$.

Потенциал в точке А $\varphi_A = \frac{2}{3} \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot 4R} - \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 \cdot 4R} = -\frac{1}{12} \frac{q}{\pi\epsilon_0 \cdot R}$ $\varphi_A = -\frac{1}{12} \frac{q}{\pi\epsilon_0 \cdot R}$.

По закону сохранения энергии $\frac{mv_{\min}^2}{2} = q\varphi_A$. Откуда $v = \sqrt{\frac{2q\varphi_A}{m}} = q\sqrt{\frac{1}{6m\pi\epsilon_0 R}}$.

ЗАДАЧА 9. (12 баллов)

Ответ: $W = 2CE^2$.

Ток в цепи $I = \frac{3E}{3R} = \frac{E}{R}$ (1)

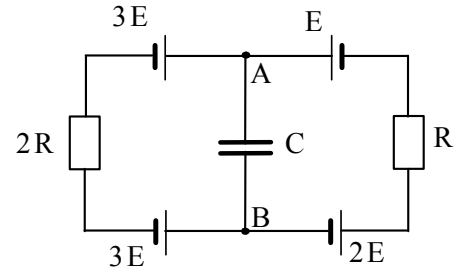
Закон Ома для правого участка цепи (участок АВ):

$$-I = \frac{(\varphi_A - \varphi_B)C - 3E}{R} \quad (2)$$

Из (1) и (2) найдем $\varphi_A - \varphi_B = -IR + 3E = -E + 3E = 2E$.

Обозначим $\varphi_A - \varphi_B = U$, тогда энергия конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2} = 2CE^2$$



ЗАДАЧА 10. (12 баллов)

Ответ: $Q = \frac{B^2 v \cdot L^2}{\rho \sqrt{3}}$

1) Длина перемычки

$$\ell = 2y \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}; \quad \text{при } y = C \quad \ell_{\max} = 2L \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

2) Сопротивление перемычки

$$R = \rho \ell = 2\rho y \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}; \quad R_{\max} = \rho \ell_{\max} = 2\rho L \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

3) ЭДС индукции $E = Bv \cdot \ell$; $E_{\max} = 2Bv \cdot L \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

4) Тепловая мощность, выделившаяся в перемычке

$$P = \frac{E^2}{R} = \frac{B^2 v^2 \ell^2}{\rho \ell} = \frac{B^2 v^2 \ell}{\rho}; \quad P_{\max} = \frac{E_{\max}^2}{R_{\max}} = \frac{2B^2 v^2 L \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\rho}.$$

5) Средняя мощность $P_{\text{cp}} = \frac{1}{2} P_{\max}$ за время $t_o = \frac{L}{v}$,

6) Полное количество теплоты, выделившейся в перемычке,

$$Q = P_{\text{cp}} t_o = \frac{B^2 v^2 L \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\rho} \cdot \frac{L}{v} = \frac{B^2 v L^2}{\rho} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

Итак, при $\alpha = 60^\circ$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$$Q = \frac{B^2 v L^2}{\rho} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{B^2 v \cdot L^2}{\rho \sqrt{3}}$$

